Емкость двухслойного цилиндрического конденсатора

Рассчитать емкость на единицу длины двухслойного цилиндрического конденсатора

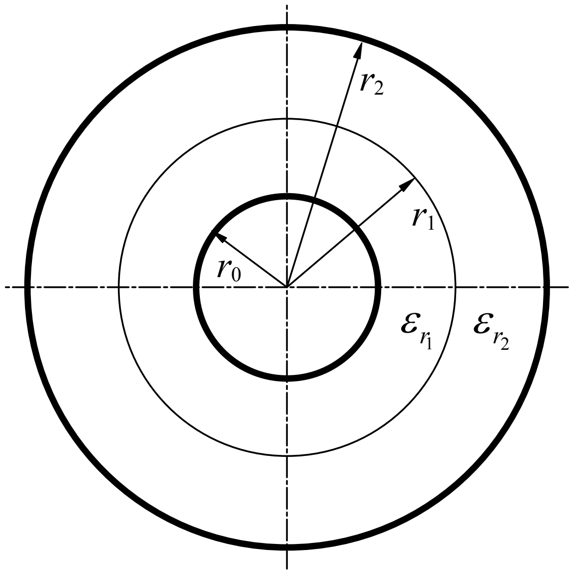

Рис. 1

Решение

1 Внутри металлической центральной жилы конденсатора радиуса r_0 поля не будет: $E = 0$. Все точки центральной жилы конденсатора имеют один и тот же потенциал.

Полагаем длину конденсатора L значительно больше наружного радиуса r_2. Очевидно, что в силу $L \gg r_2$ его поле симметрично относительно любой плоскости, перпендикулярной к оси конденсатора.

В этом случае вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ имеет в любой точке, лежащей на цилиндрической поверхности радиуса r, единственную радиальную составляющую. В любой точке поверхности постоянного радиуса значение вектора $\vec{E}$ постоянно.

2 Рассмотрим слои диэлектриков.

2.1 Область **I** (рис. 2) $r_0 < r < r_1$.

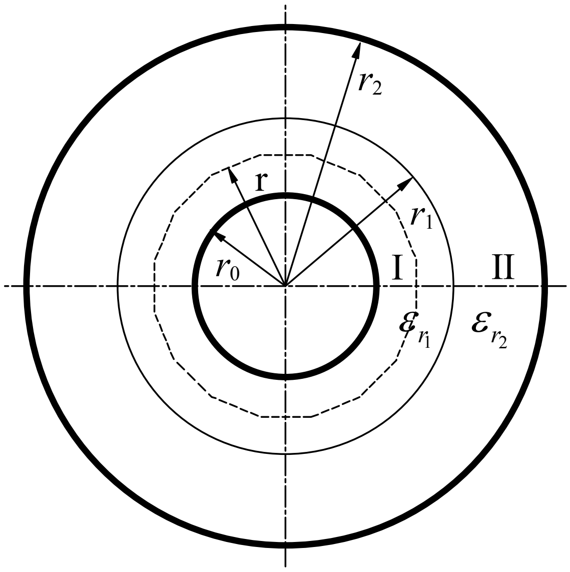

Рис. 2

По теореме Гаусса

$$\oint_S \vec{E}_1 d\vec{S} = \oint_S E_1 dS = E_1 \oint_S dS = E_1 \cdot 2\pi r L = \frac{q}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0},$$

где q – заряд в области цилиндра радиуса $r < r_1$ (заряд центральной обкладки конденсатора длиной L); ε_{r1} – относительная диэлектрическая проницаемость слоя диэлектрика $\left(r_0 < r < r_1\right)$; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{Ф}}{\text{м}}$ – диэлектрическая постоянная.

Находим

$$E_1 \cdot 2\pi r L = \frac{q}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0};\; E_1 = \frac{\tau}{2\pi \cdot \varepsilon_{r1}\varepsilon_0}\frac{1}{r},$$

где τ – линейная плотность зарядов центральной обкладки конденсатора.

Тогда решение для области **I**

$$E_1\left(r\right) = \frac{\tau}{2\pi \cdot \varepsilon_{r1}\varepsilon_0}\frac{1}{r}.$$

Потенциал в области **I**

$$\varphi_1\left(r\right) = -\int \vec{E}_1 d\vec{r} + C_1 = -\int E_1 dr + C_1 =$$

$$= -\int \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}\frac{1}{r}dr + C_1 = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}\int \frac{1}{r}dr + C_1 =$$

$$= -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}\ln r + C_1.$$

Для области **I** (рис. 2) $r_0 < r < r_1$ получили:

$$E_1(r) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_{r1}\varepsilon_0}\frac{1}{r};$$

$$\varphi_1(r) = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}\ln r + C_1,$$

где C_1 – постоянная интегрирования для первой области.

2.2 Область **II** (рис. 3) $r_1 < r < r_2$.

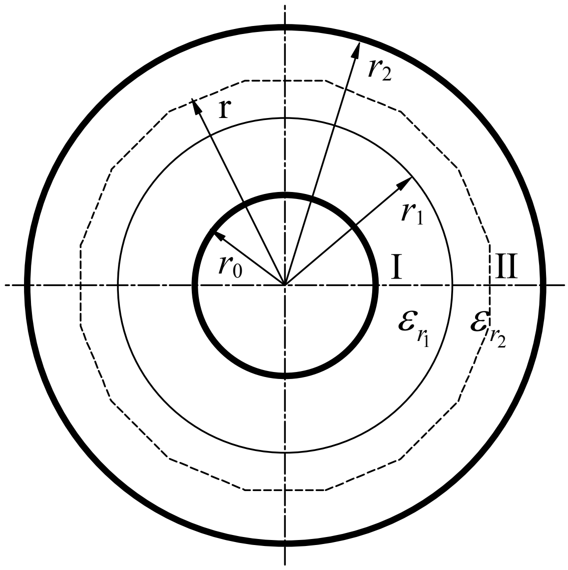

Рис. 3

По теореме Гаусса

$$\oint_S \vec{E}_2 d\vec{S} = \oint_S E_2 dS = E_2 \oint_S dS = E_2 \cdot 2\pi r L = \frac{q}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0},$$

где q – заряд в области цилиндра радиуса $r < r_2$ (заряд центральной обкладки конденсатора длиной L); ε_{r2} – относительная диэлектрическая проницаемость слоя диэлектрика $(r_1 < r < r_2)$; $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$ – диэлектрическая постоянная.

Находим

$$E_2 \cdot 2\pi r L = \frac{q}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0};\ E_2 = \frac{\tau}{2\pi \cdot \varepsilon_{r2}\varepsilon_0}\frac{1}{r}.$$

Тогда решение для области **II**

$$E_2(r) = \frac{\tau}{2\pi \cdot \varepsilon_{r2}\varepsilon_0}\frac{1}{r}.$$

Потенциал области

$$\varphi_2(r) = -\int \vec{E}_2 d\vec{r} + C_2 = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}\ln r + C_2.$$

Для области **II** (рис. 3) $r_1 < r < r_2$ получили:

$$E_2(r) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}\frac{1}{r};$$

$$\varphi_2(r) = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}\ln r + C_2,$$

где C_2 – постоянная интегрирования для второй области.

3 Определим постоянные интегрирования.

Полагаем потенциал наружной оболочки конденсатора равным нулю (заземляем наружную оболочку)

$$\varphi_2(r_2) = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}\ln r\Big|_{r=r_2} + C_2 = 0.$$

Откуда

$$C_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}\ln r_2;$$

$$\varphi_2(r) = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}\ln r + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}\ln r_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}\ln\frac{r_2}{r}.$$

Из условия непрерывности потенциала на границе области **I** и **II**

$$\varphi_1(r_1) = \varphi_2(r_1).$$

Откуда

$$-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}\ln r_1 + C_1 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}\ln\frac{r_2}{r_1};$$

$$C_1 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}\ln r_1 + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}\ln\frac{r_2}{r_1};$$

$$\varphi_1(r) = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}\ln r + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}\ln r_1 + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}\ln\frac{r_2}{r_1} =$$
$$= \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}\ln\frac{r_1}{r} + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

4. Определим линейную плотность заряда τ конденсатора из условия

$$U = \varphi(r_0) - \varphi(r_2).$$

Находим

$$U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}} \ln\frac{r_1}{r_0} + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}} \ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Откуда

$$\tau = \frac{U}{\frac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}} \ln\frac{r_1}{r_0} + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}} \ln\frac{r_2}{r_1}}. \qquad (1)$$

5. Емкость на единицу длины

$$C_0 = \frac{C}{L} = \frac{\frac{q}{U}}{L} = \frac{\tau}{U}. \qquad (2)$$

Емкость на единицу длины двухслойного цилиндрического конденсатора по формулам (1) и (2)

$$C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{1}{\frac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}} \ln\frac{r_1}{r_0} + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}} \ln\frac{r_2}{r_1}}.$$