Вывод формулы емкости сферического конденсатора

Вывести формулу емкости сферического конденсатора, изображенного на рис. 1.

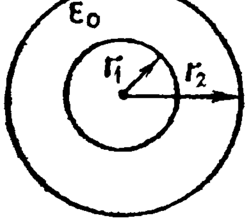

Рис. 1

Решение

Анализ

1. Поле обладает центральной симметрией. Решение целесообразно проводить в сферической системе координат, начало которой совмещено с центром шара.

2. В этом случае вектор напряженности $\vec{E}$ имеет в любой точке, лежащей на сфере радиуса r, единственную радиальную составляющую $\vec{E} = E \cdot \vec{e}_r$.

3. В любой точке поверхности постоянного радиуса значения вектор $\vec{E}$ постоянен.

Аналитическое описание поля сферического конденсатора

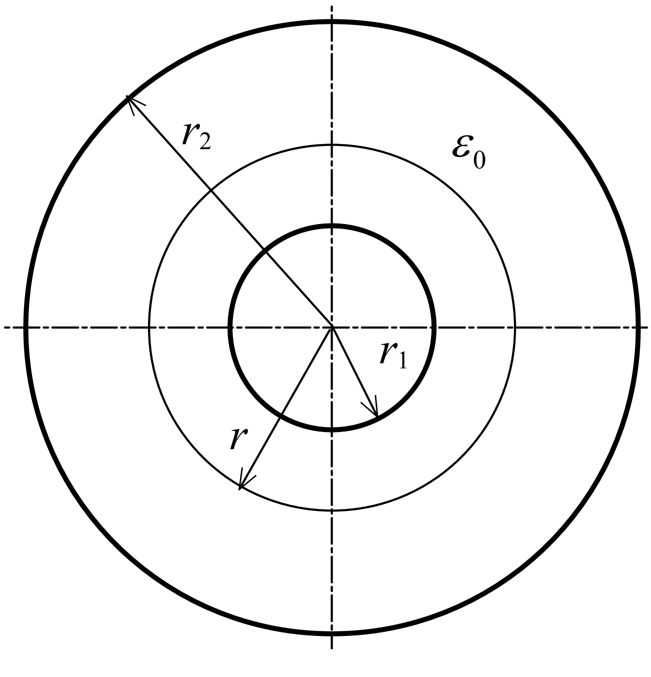

Рис. 2

1. По теореме Гаусса

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \oint_S EdS = E\oint_S dS = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_r\varepsilon_0},$$

где

q – заряд в области шара $r \le r_2$ (заряд сферического конденсатора);

ε_r – относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика конденсатора;

$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{Ф}}{\text{м}}$ – диэлектрическая постоянная.

Тогда решение для области $r_1 \le r \le r_2$

$$E\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_r\varepsilon_0};$$

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}\frac{1}{r^2}.$$

Потенциал области

$$\varphi = -\int \vec{E}d\vec{r} + c = -\int Edr + c = -\int \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}\frac{1}{r^2}dr + c = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}\frac{1}{r} + c.$$

Определим постоянную интегрирования c. Считая, что при $r \to \infty$ $\varphi \to 0$, получим $c = 0$:

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}\frac{1}{r}.$$

Запишем выражения для напряженности электрического поля и потенциала:
напряженность электрического поля

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}\frac{1}{r^2}\left[\frac{\text{В}}{\text{м}}\right],\ r_1 < r < r_2; \qquad (1)$$

потенциал

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}\frac{1}{r}\,[\text{В}],\ r_1 < r < r_2. \qquad (2)$$

2. Напряжение между обкладками конденсатора

$$U = \varphi(r_1) - \varphi(r_2) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}\frac{1}{r_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}\frac{1}{r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Тогда выражения для напряженности электрического поля и потенциала:

напряженность электрического поля

$$E(r)=\frac{U}{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}\frac{1}{r^2}\left[\frac{\text{В}}{\text{м}}\right],\ r_1<r<r_2; \tag{3}$$

потенциал

$$\varphi(r)=\frac{U}{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}\frac{1}{r}\ [\text{В}],\ r_1<r<r_2. \tag{4}$$

3. Электроемкость конденсатора дается выражением

$$C=\frac{q}{U}.$$

Для сферического конденсатора

$$C=\frac{q}{U}=\frac{q}{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}.$$

Тогда электроемкость сферического конденсатора

$$C=\frac{4\pi\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}\ [\Phi].$$