СОДЕРЖАНИЕ

Дискретные сигналы

Дискретные сигналы

1. Процедура аналого-цифрового преобразования

Процедура аналого-цифрового преобразования непрерывного сигнала представляет собой преобразование непрерывной функции, например, напряжения $u(t)$ в последовательность чисел $u(t_n)$, где n = 0, 1, 2 …, отнесенных к некоторым фиксированным моментам времени. При дискретизации непрерывная функция $u(t)$ преобразуется в последовательность ее отсчетов $u(t_n)$, как показано на рис. 1.1, *а*.

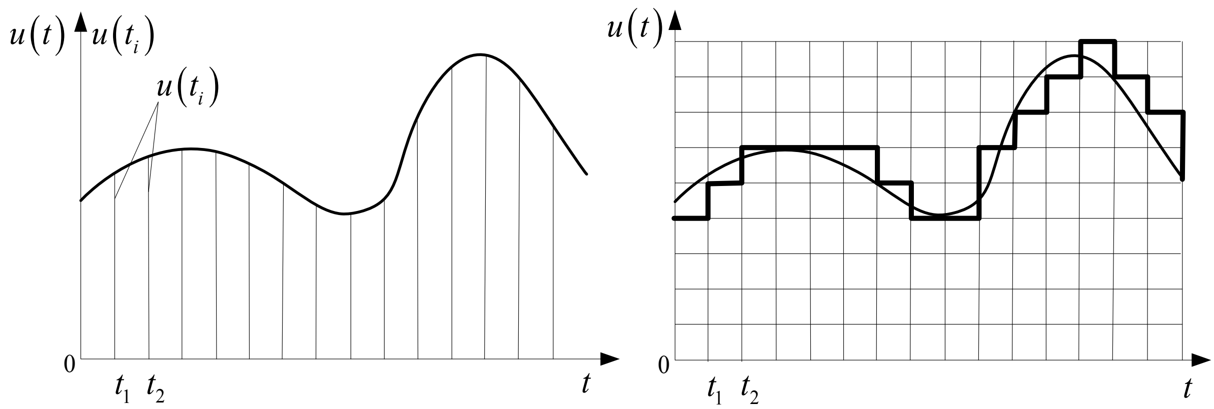


Рис. 1.1. Процесс дискретизации (*а*) и квантования (*б*) непрерывного сигнала

Вторая операция, называемая квантованием, состоит в том, что мгновенные значения функции $u(t)$ ограничиваются только определенными уровнями, которые называются уровнями квантования. В результате квантования непрерывная функция $u(t)$ принимает вид ступенчатой кривой $u_Д(t)$, показанной на рис. 1.1, *б*.

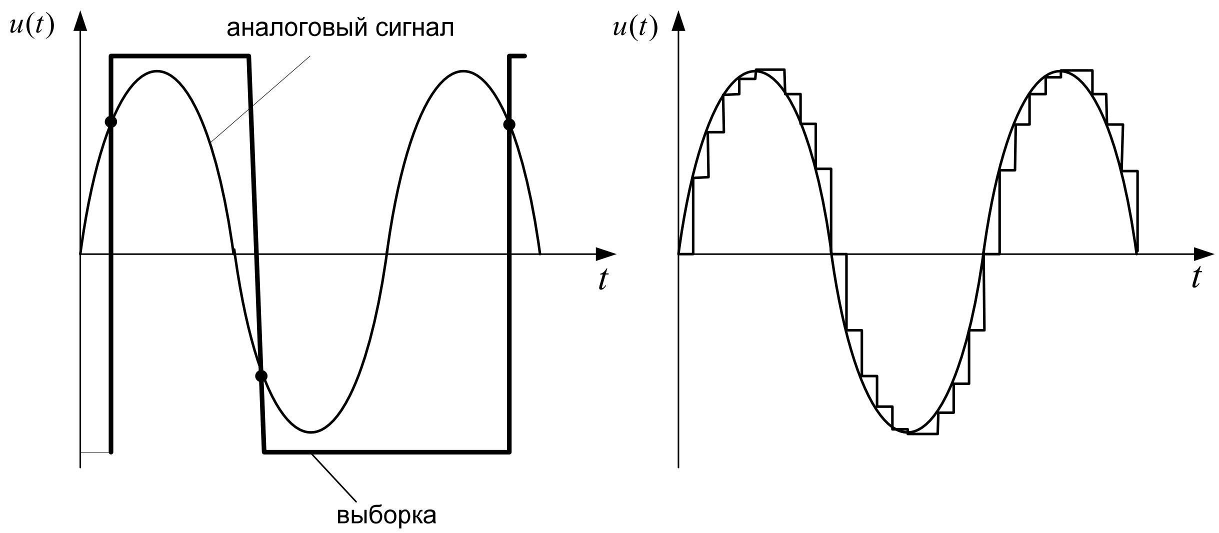
Третья операция – кодирование представляет дискретные квантованные величины в виде цифрового кода. С помощью операции кодирования осуществляется условное представление численного значения величины. Переходы от исходной функции $u(t)$ к дискретной и далее к квантованной по уровню сопряжены с некоторой потерей информации. На этапе кодирования подобные потери отсутствуют.

Дискретизация сигнала заключается в регулярном взятии отсчетов его мгновенных значений, называемых выборками. Чем меньше интервал дискретизации, тем точнее представляется сигнал. Однако при малом интервале дискретизации необходим большой объем памяти и высокое быстродействие АЦП. На рис. 1.2 показаны примеры различного соотношения частоты сигнала и интервала дискретизации. Первый рисунок показывает, что результат будет неудовлетворительным, если частота дискретизации сравнима с частотой сигнала. Увеличение частоты выборок дает значительно более достоверное представление о сигнале.

Частоту дискретизации $f_Д$ определяют из теоремы Котельникова:

$$f_Д \geq 2f_{\text{МАКС}}, \tag{1.1}$$

где $f_{\text{МАКС}}$ – наибольшая частота спектра дискретизируемого сигнала.



а) *б*)

Рис. 1.2. Неправильный (*а*) и правильный (*б*) выбор интервала дискретизации

2. Математическое описание дискретных сигналов

В отличие от аналогового сигнала $u(t)$ дискретный сигнал можно обозначить $u_Д(t)$. Однако чаще его обозначают $u(nT)$, заменяя непрерывное время t дискретными моментами nT, следующими строго через интервал T. Используются и более краткие обозначения: $u[n]$ и u_n. Причем во всех этих записях n – целое число, принимающее как положительные, так и отрицательные значения.

Дискретные сигналы можно задавать графиками, как это показано на рис. 1.1, формулами, например, $u_Д(t) = \sin(2\pi f \cdot nT)$, в виде таблиц дискретных значений или в виде комбинации этих способов.

Рассмотрим пример дискретного сигнала, полученного из единичного ступенчатого аналогового сигнала.

Единичная функция $1(t)$ приведена на рис. 2.1, *а*. Соответствующий ей дискретный сигнал $1[n]$ называется ступенчатой последовательностью и определяется следующим образом:

Такая последовательность приведена на рис. 2.2, *б*.

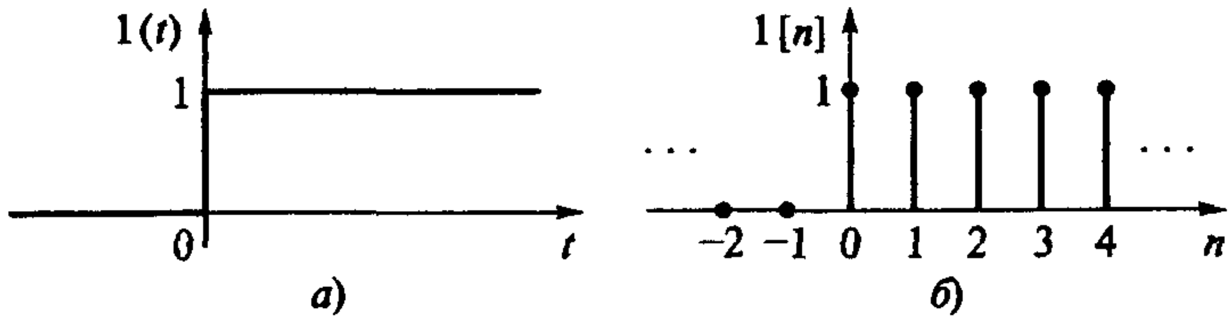


Рис. 2.2. Единичный ступенчатый аналоговый (*а*) и дискретный (*б*) сигналы

Рассмотрим пример дискретного сигнала, полученного из единичного импульсного сигнала. δ-импульс в аналоговой области приведен на рис. 2.3.

Дельта-последовательность, или дискретный δ-импульс, определяется выражением

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 \text{ при } n = 0; \\ 0 \text{ при } n \neq 0. \end{cases}$$

Последовательность $\delta[n]$, приведенная на рис. 2.3, *б*, принимает единственное значение, равное 1, при $n = 0$. Этот сигнал можно сдвинуть на k интервалов (рис. 2.3, *в*):

$$\delta[n-k] = \begin{cases} 1 \text{ при } n = k; \\ 0 \text{ при } n \neq k. \end{cases}$$

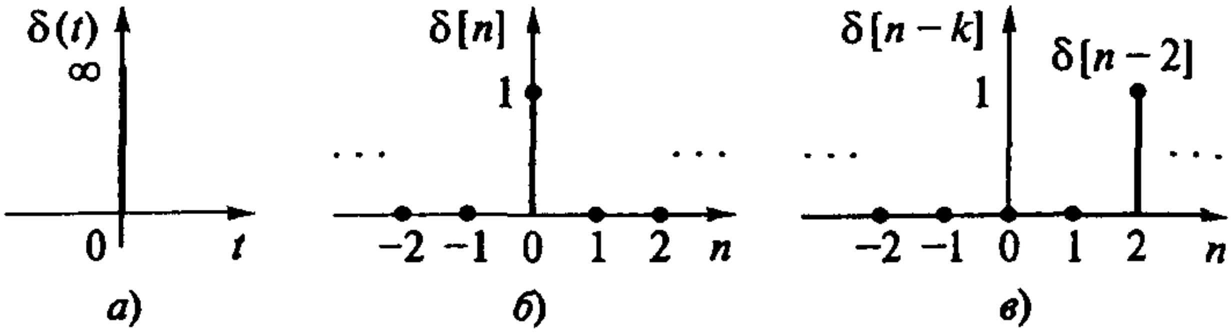


Рис. 2.3. Аналоговый (*а*) и дискретный (*б* и *в*) δ-импульс

Математическая запись любого дискретного сигнала может быть представлена в виде последовательности дискретных δ-импульсов с весовыми коэффициентами, равными отсчетам $u[k]$ аналогового сигнала $u(t)$ в точках kT:

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k] \cdot \delta[n-k]. \qquad (2.1)$$

3. Свойства дискретных сигналов. Спектры аналоговых и дискретных сигналов и их связь

Дискретные отсчеты аналогового сигнала нужно брать с такой частотой, чтобы по ним можно было однозначно восстановить исходный сигнал.

Аналоговые сигналы после их дискретизации можно обрабатывать на компьютере. Если задано напряжение на входе цепи $u_{вх}(t)$, то напряжение на ее выходе $u_{вых}(t)$, воспользовавшись интегралом свертки:

$$u_{вых}(t)=\int_0^t u_{вх}(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau. \tag{3.1}$$

Заменим непрерывные сигналы в формуле (3.1) их дискретными отсчетами. Тогда интеграл заменяется суммой и выражение (3.1) запишется в виде

$$u_{вых}(nT)=\sum_{m=0}^{n} u_{вых}(mT)\cdot h\left[(n-m)T\right]. \tag{3.2}$$

Поскольку любой отсчет сигнала – это число, то формулу (3.2) можно запрограммировать на вычислительном устройстве.

Устройство, преобразующее непрерывный (аналоговый) сигнал в двоичный код (или, что то же, в цифровой сигнал), называют аналого-цифровым преобразователем (АЦП). Обратное преобразование выполняет цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП), содержащий декодер и интерполятор.

Дискретный сигнал имеет периодический спектр

Формулы для расчета спектра дискретного сигнала можно получить из формул преобразования Фурье для аналогового сигнала. Сигнал, имеющий ограниченную протяженность во времени, обладает неограниченным по полосе спектром (рис. 3.1, *а*). И наоборот, сигнал с ограниченным спектром имеет бесконечную протяженность во времени (рис. 3.2, *а*). Как следует из этих рисунков, аналоговый сигнал и ограниченной, и бесконечной протяженности во времени имеет сплошной спектр.

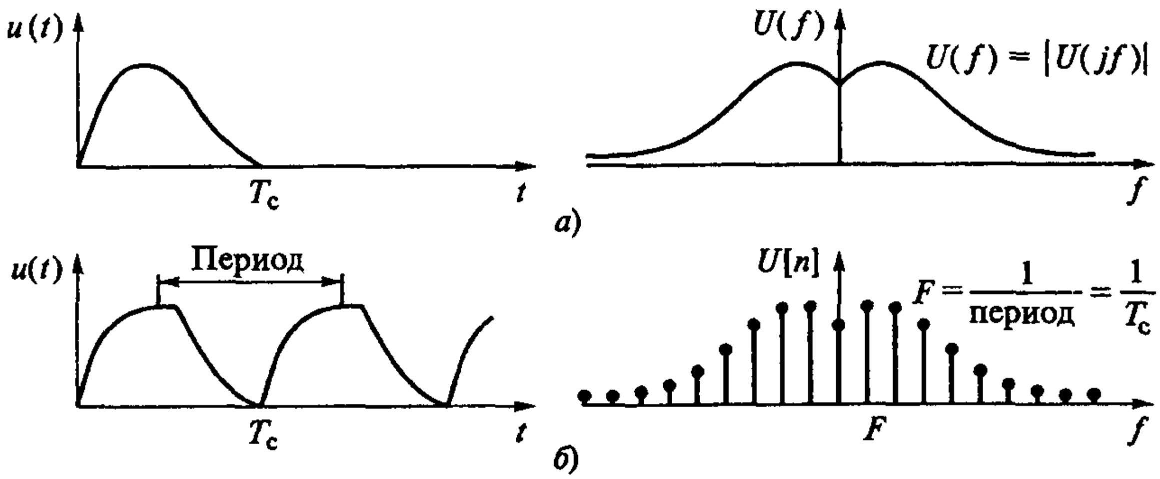


Рис. 3.1. Спектры аналогового сигнала с ограниченной длительностью (*а*) и образованного из него периодического сигнала (*б*)

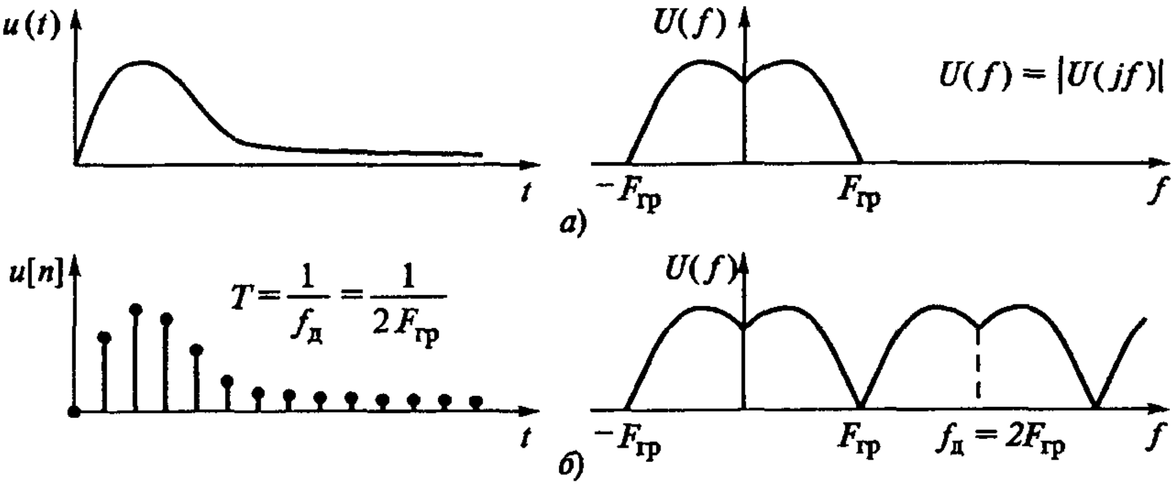


Рис. 3.2. Спектры аналогового (*а*) и дискретного (*б*) сигналов бесконечной протяженности во времени

Если сигнал $u(t)$ является периодическим, то спектр его – дискретный, т.е. теперь вместо $U(jf)$ используют отсчеты $\underline{U}[n]$. Эта ситуация показана на рис. 3.1, *б*. Период сигнала равен длительности сигнала T_c. Интервал дискретизации спектра по частоте F определяется периодом сигнала $F = 1/T_c$.

В соответствии с принципом дуальности можно сказать: если периодическим является спектр, то дискретным будет сигнал (рис. 3.2, *б*). Обозначая период повторения спектра $f_Д$, получаем интервал дискретизации сигнала $T = 1/f_Д$.

4 Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) и обратное ДПФ

Формулы прямого и обратного преобразований Фурье для дискретных сигналов получают из формул

$$U(jf) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j2\pi f \cdot t} dt \tag{4.1}$$

и

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(jf) e^{j2\pi f \cdot t} df \tag{4.2}$$

для *аналоговых сигналов*, заменив непрерывное время t на дискретные значения nT.

Дискретное прямое преобразование Фурье для *аналоговых сигналов*

$$U(jf) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n] \cdot e^{-j2\pi f \cdot nT}. \tag{4.3}$$

Дискретное обратное преобразование Фурье для *аналоговых сигналов*

$$u[n] = \frac{1}{f_Д} \int_{0}^{f_Д} U(jf) e^{j2\pi f \cdot nT} df. \tag{4.4}$$

В формулах (4.3) и (4.4) использовано обозначение $u[n] = u(nT)$.

Рассчитаем спектр дискретного сигнала, состоящего из одного отсчета $u[n] = [a; 0; 0; 0; ...]$.

Воспользуемся формулой (4.3), в которую подставим значения $u[n]$ заданного сигнала:

$$U(jf) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n] \cdot e^{-j2\pi f \cdot nT} = a \cdot e^{-j2\pi f \cdot 0T} = a.$$

Рассчитаем спектр экспоненциальной дискретной функции $u[n] = 0{,}5^n$, $n \geq 0$.

График дискретной функции $u[n]$ приведен на рис. 4.1, а ее отсчеты можно записать в виде последовательности $u[n] = \{1; 0{,}5; 0{,}25; 0{,}125; ...\}$.

Спектр дискретной экспоненты рассчитаем по формуле (4.3):

$$U(jf)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u[n]\cdot e^{-j2\pi f\cdot nT}=\sum_{n=0}^{\infty}0{,}5^{n}\cdot e^{-j2\pi f\cdot nT}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(0{,}5\cdot e^{-j2\pi f\cdot T}\right)^{n}=\frac{1}{1-0{,}5e^{-j2\pi f\cdot T}},$$

где для суммирования ряда использована формула суммы геометрической прогрессии.

Используя формулу Эйлера

$$e^{jx}=\cos x+j\sin x,$$

получим выражение для спектра амплитуд (рис. 4.1, *б*)

$$U(f)=\frac{1}{\sqrt{\left[1-0{,}5\cos(-2\pi fT)\right]^{2}+\left[0{,}5\sin(-2\pi fT)\right]^{2}}}.$$

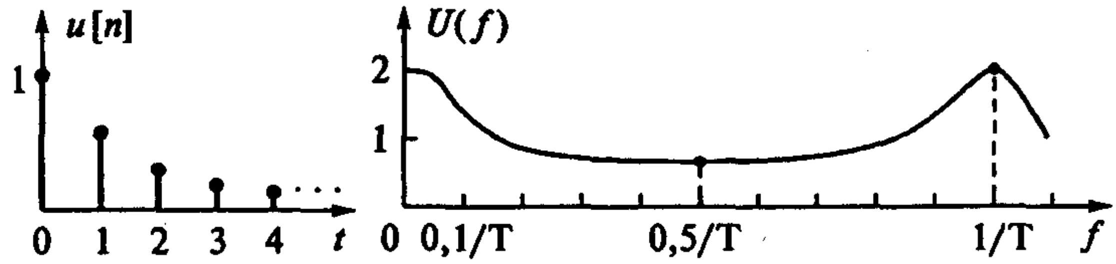


Рис. 4.1. Дискретная экспоненциальная функция (*а*)
спектр амплитуд экспоненциальной дискретной функции (*б*)

Спектры дискретных периодических сигналов являются периодическими и дискретными. Для их расчета используется дискретное преобразование Фурье.

В формулах (4.3) и (4.4) один из компонентов уже является дискретным. Остается только заменить в этих формулах оставшуюся непрерывную переменную *f* дискретными значениями.

Или из формул

$$\underline{U}_{mk}=\frac{2}{T}\int_{0}^{T}u(t)e^{-j\frac{2\pi k}{T}t}dt \qquad (4.5)$$

и

$$u(t)=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underline{U}_{m\,k}e^{j\frac{2\pi k}{T}t} \tag{4.6}$$

после замены времени t на nT, получим формулы

$$\underline{U}[m]=\sum_{n=0}^{N-1}u[n]\cdot e^{-j2\pi n\cdot m\frac{1}{N}}, \tag{4.7}$$

$$u[n]=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\underline{U}[m]\cdot e^{j2\pi n\cdot m\frac{1}{N}}. \tag{4.8}$$

Следует заметить, что при этом периодический сигнал $u(t)$ стал дискретным сигналом $u(nT)$ или $u[n]$, а значит, дискретный спектр $\underline{U}[m]$ начал периодически повторяться (рис. 4.2). Суммирование дискретных составляющих спектра $\underline{U}[m]$ в формуле (4.6) следует теперь вести не в бесконечных пределах, а на периоде, где укладывается N отсчетов (4.8).

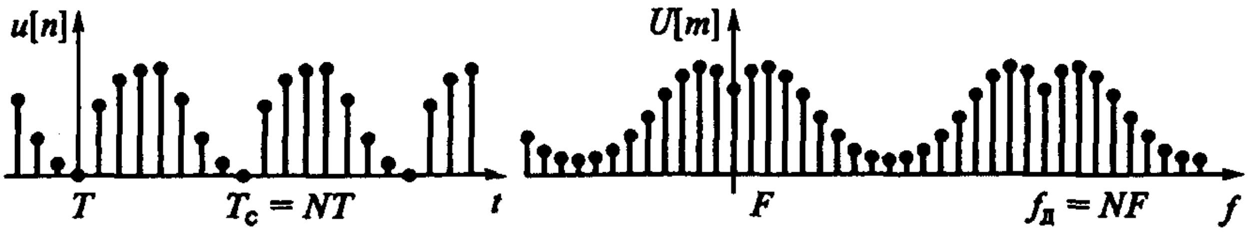


Рис. 4.2. Спектр дискретного периодического сигнала

На периоде повторения T_c дискретного сигнала $u[n]$ также укладывается N отсчетов, включая нулевой отсчет. Интеграл в (4.5) заменяется суммой с индексом суммирования n, изменяющимся от $n = 0$ до $n = N - 1$ в (4.7). Переменная dt в формуле (4.5) при переходе от интеграла к сумме заменяется на T, так что отношение $T/T_c = 1/N$, так как $T_c = NT$. Частота дискретизации $f_Д = NF$. Отсюда вытекают соотношения

$$T=\frac{1}{NF} \text{ и } F=\frac{1}{NT}.$$

Выражения (4.7) и (4.8) называются прямым и обратным дискретным преобразованием Фурье.

Формулы дискретного преобразования Фурье (ДПФ) удобны для расчетов на компьютере.

Рассчитаем ДПФ дискретного периодического сигнала, заданного тремя отсчетами: $u[n] = \{0;\ 1;\ 2\}$.

Для расчета воспользуемся формулой ДПФ (4.7):

$$\underline{U}[0] = u[0]\cdot e^{-j2\pi 0\cdot 0\frac{1}{3}} + u[1]\cdot e^{-j2\pi 1\cdot 0\frac{1}{3}} + u[2]\cdot e^{-j2\pi 2\cdot 0\frac{1}{3}} = 0+1+2 = 3;$$

$$\underline{U}[1] = u[0]\cdot e^{-j2\pi 0\cdot 1\cdot\frac{1}{3}} + u[1]\cdot e^{-j2\pi 1\cdot 1\cdot\frac{1}{3}} + u[2]\cdot e^{-j2\pi 2\cdot 1\cdot\frac{1}{3}} =$$
$$= 0\cdot e^{-j0^\circ} + 1\cdot e^{-j120^\circ} + 2\cdot e^{-j240^\circ} = \frac{1}{2}\left(-3 + j\sqrt{3}\right) = 1{,}74\cdot e^{j150^\circ};$$

$$\underline{U}[2] = u[0]\cdot e^{-j2\pi 0\cdot 2\frac{1}{3}} + u[1]\cdot e^{-j2\pi 1\cdot 2\frac{1}{3}} + u[2]\cdot e^{-j2\pi 2\cdot 2\frac{1}{3}} =$$
$$= 0\cdot e^{-j0^\circ} + 1\cdot e^{-j240^\circ} + 2\cdot e^{-j480^\circ} = \frac{1}{2}\left(-3 - j\sqrt{3}\right) = 1{,}74\cdot e^{j210^\circ}.$$

Графики заданного дискретного периодического сигнала $u[n]$ и рассчитанного дискретного периодического спектра амплитуд $U[m]$ приведены на рис. 4.3.

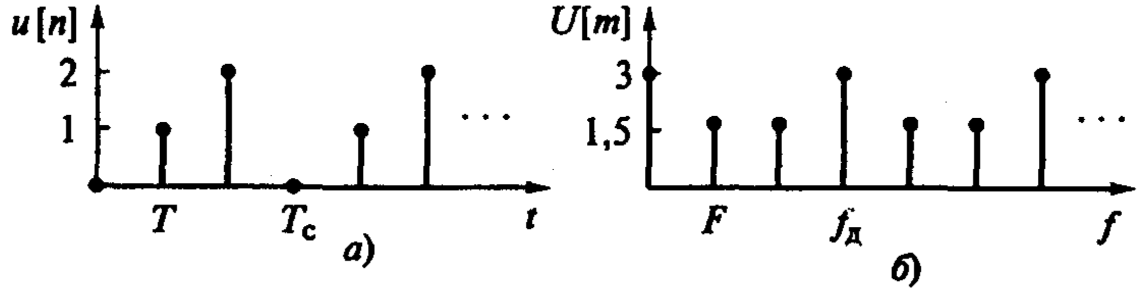


Рис. 4.3. Дискретный периодический сигнал (*а*) и его спектр (*б*)

5. Z-преобразование и его связь с преобразованием Лапласа

Подобно преобразованию по Лапласу аналогового сигнала существует 2-преобразование дискретного сигнала. Дискретный сигнал и его спектр описываются формулами (4.4) и (4.3). Произведем в формуле (4.3) замену:

$$e^{j2\pi fT} = z.$$

Тогда формула примет вид

$$U(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n] \cdot z^{-n}. \qquad (5.1)$$

Выражение (5.1) получило название z-преобразования или z-изображения дискретного сигнала $u[n]$. Если начать суммирование с $n = 0$, то выражение

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u[n] \cdot z^{-n} \qquad (5.2)$$

есть одностороннее z-преобразование. Оно применяется для сигналов $u[n] = 0$ при $n < 0$.

Укажем на связь z-преобразования с преобразованием Лапласа дискретного сигнала

$$U(p) = \sum_{n=0}^{\infty} u[n] \cdot z^{-pnT},$$

которое легко получить из (4.3), положив $j2\pi f = p$.

Очевидно, что $z = e^{pT}$ или $p = \frac{1}{T}\ln z$.

Эти формулы устанавливают связь между точками в плоскостях $p = \alpha + j\omega$ и $z = x + jy$ (рис. 5.1).

Если положить $\alpha = 0$, то мы будем перемещаться по оси $j\omega$ в плоскости p. При переходе в z-плоскость точки мнимой оси $j\omega$ будут располагаться на единичной окружности $z = e^{j\omega T}$. Точка $j0$ на p-плоскости переходит в точку $z = +1$ на вещественной оси z-плоскости, а точки $\pm j0{,}5\omega_Д$ – в точку $z = -1$. Это означает, что точки отрезка $[-j0{,}5\omega_Д; +j0{,}5\omega_Д]$ p-плоскости проектируются в точки на единичной окружности z-плоскости. Так как функция $e^{\pm j\omega T}$ периодическая, то последующие отрезки оси $j\omega$ на p-плоскости такой же длины будут вновь проектироваться на единичную окружность.

Точкам левой p-полуплоскости соответствуют точки внутри единичной окружности z-плоскости, а точкам правой p-полуплоскости — точки вне этой окружности.

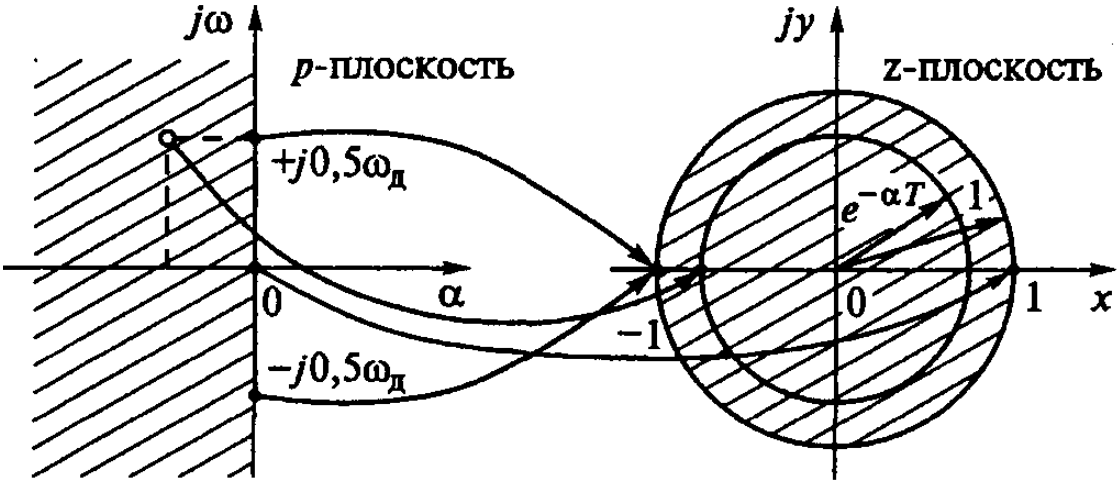


Рис. 5.1. Связь между точками в p- и z-плоскостях

Рассчитаем z-преобразование дискретного сигнала $u[n]$, имеющего вид

$$u[n] = \begin{cases} 0 \text{ при } n \le 0; \\ 1 \text{ при } n = 1,2,3; \\ 0 \text{ при } n > 3. \end{cases}$$

Воспользовавшись формулой (5.2), получаем

$$U(z) = \sum_{n=1}^{3} u[n] \cdot z^{-n} = z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} = \frac{z^2 + z + 1}{z^3}.$$

Найдем z-преобразование $U(z)$ дискретного экспоненциального сигнала $u[n] = e^{-\alpha n T}$.

Подставив значение $u[n]$ в формулу (5.2), получим

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u[n] \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha n T} \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\alpha T} \cdot z^{-1}\right)^n.$$

Из теории рядов следует, что при выполнении условия $\left|e^{-\alpha T} \cdot z^{-1}\right| < 1$ сумма ряда $U(z)$ равна

$$\frac{1}{1-e^{-\alpha T}\cdot z^{-1}}$$

или

$$U(z)=\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}.$$

z-преобразование $U(z)$ дискретного сигнала $u[n]$ определено только для области z, в которой степенной ряд (5.2) сходится. Эта область сходимости включает в себя все значения z, находящиеся вне некоторого круга на комплексной z плоскости, радиус которого r_0 называется радиусом сходимости (рис. 5.2), т.е. при $r_0 < |z| < \infty$ ряд сходится. В области сходимости существует взаимно-однозначное соответствие между $U(z)$ и $u[n]$, т.е. каждому $u[n]$ соответствует одно, и только одно $U(z)$, определенное для $|z| > r_0$, и наоборот.

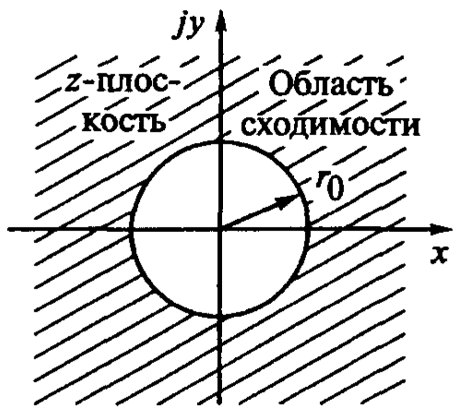


Рис. 5.2. Область сходимости ряда

Список литературы

1. Сато Ю. Обработка сигналов. Первое знакомство. / Пер. с яп.; под ред. Ёсифуми Амэмия. - М: Изд-кий дом «Додэка-XXI», 2002.

2. Введение в цифровую фильтрацию /под ред. Р. Богнера и А. Константинидиса; перевод с англ. - М: Изд-во «Мир», 1977.

3. Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций /Авторы: А.И. Солонина, Д.А. Улахович, С.М. Арбузов, Е.Б. Соловьев, И.И. Гук. - СПб: Изд-во «БХВ-Петербург», 2005.

4. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов (второе издание) - СПб: Изд-во «Питер», 2006.

5. Солонина А.И., Арбузов С.М. Цифровая обработка сигналов. Моделирование в MATLAB. - СПб: Изд-во «БХВ-Петербург», 2008.

6. Карташкин А.С. Линейные цифровые фильтры. Вопросы и задачи. М: Изд-во «Радио и связь», 1995.