

# СОДЕРЖАНИЕ

Задание .....	3
Выбор варианта .....	3
1 Исходные данные задачи.....	5
2 Классический метод расчета .....	6
3 Операторный метод расчета.....	19
4 Построение графика переходного процесса.....	22
Список литературы .....	25

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

### РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Предполагается, что до срабатывания коммутаторов (коммутатор работает на замыкание) цепь находилась в установившемся режиме.

Задача расчета переходных процессов сводится к решению системы дифференциальных уравнений, связывающих заданные воздействия и искомые токи и напряжения в исследуемой послекоммутационной цепи. Сформулированная задача может быть решена на основе классической теории дифференциальных уравнений (классический метод), операционного исчисления (операторный метод), численных методов (метод пространства состояний).

#### Задание

1. Изобразить электрическую цепь, подлежащую расчету, привести численные значения параметров и задающих источников тока и напряжения.
2. Рассчитать ток или напряжение в одной из ветвей классическим методом.
3. Составить эквивалентную операторную схему и записать для нее систему уравнений по законам Кирхгофа. Рассчитать искомый ток операторным методом.
4. Построить график изменения во времени найденной величины.

#### Выбор варианта

1. Расчетная цепь выбирается в соответствии с номером варианта с помощью табл. 1.

Таблица 1

Вариант	Граф	Ключ	Расположение элементов в ветвях цепи					
			$E_1$	$E_2$	$J$	$R$	$L$	$C$
	<i>б</i>	2	5	3	–	1, 2, 3, 5	4	1

Граф 2 расчетной цепи изображены на рис. 1.

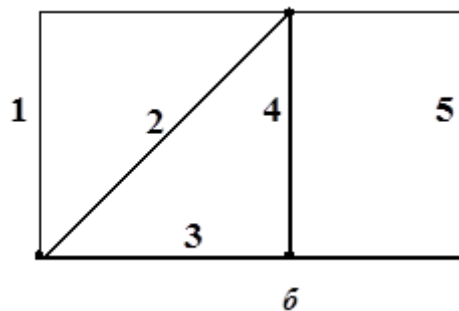


Рис. 1

2. Параметры пассивных элементов цепи и задающих источников определим следующим образом:

$$L = 0.5M = 0.5 \cdot 1.5 = 0.75 \text{ Гн},$$

$$C = 100N = 100 \cdot 2 = 200 \text{ мкФ};$$

величина сопротивлений для четных ветвей

$$R_2 = 100A_r = 100 \cdot 8 = 800 \text{ Ом},$$

для нечетных ветвей

$$R_1 = R_3 = R_5 = 20 \cdot (A_r + N) = 20 \cdot (8 + 2) = 200 \text{ Ом};$$

параметры источников

$$E_1 = 20 \cdot (N + M) = 20 \cdot (2 + 1.5) = 70 \text{ В},$$

$$E_2 = 20N = 20 \cdot 2 = 40 \text{ В},$$

где

$N = 2$  – номер группы (для студентов заочного отделения, обучающихся в сокращенные сроки);

$M = 1.5$  – шифр специальности, для ЭС;

$A_r = 0 + 8 = 8$  – сумма цифр номера варианта.

# 1 Исходные данные задачи

Изобразим электрическую цепь, подлежащую расчету на рис. 2

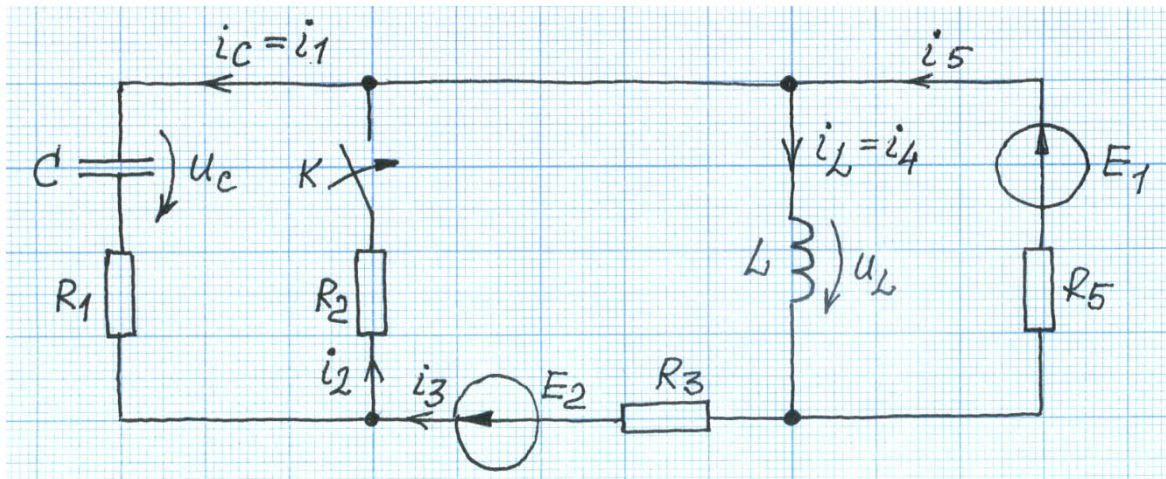


Рис. 2

Параметры элементов цепи и источников:

$$L = 0.75 \text{ Гн};$$

$$C = 200 \text{ мкФ};$$

$$R_2 = 800 \text{ Ом};$$

$$R_1 = R_3 = R_5 = 200 \text{ Ом};$$

$$E_1 = 70 \text{ В},$$

$$E_2 = 40 \text{ В},$$

Требуется рассчитать ток через конденсатор:  $i_C(t)$ .

## 2 Классический метод расчета

Переходный процесс рассчитаем классическим методом в следующей последовательности:

1. Расчет докоммутационного установившегося режима с целью получения независимых начальных условий (правил коммутации):

$$i_L(0-) = i_L(0+), u_C(0-) = u_C(0+).$$

2. Составление характеристического уравнения цепи и определение его корней.

3. Запись полного решения в виде суммы принужденной и свободной составляющих.

4. Расчет послекоммутационного установившегося режима с целью получения принужденных составляющих.

5. Расчет необходимых начальных условий (значение искомой величины и ее производной в момент  $t = 0+$ ) с использованием уравнений Кирхгофа и независимых начальных условий или схем замещения в момент  $t = 0+$ .

6. Определение постоянных интегрирования и функции, описывающей изменение искомой величины в переходном режиме.

## Решение

### 1 Независимые начальные условия

Для идеальных реактивных элементов – катушки индуктивности и конденсатора при установившемся режиме – токи и напряжения

$$u_L(0-) = 0, i_C(0-) = 0;$$

$$u_{L\text{ уст}} = 0, i_{C\text{ уст}} = 0.$$

Рассмотрим установившийся режим расчетной цепи до коммутации (рис. 3).

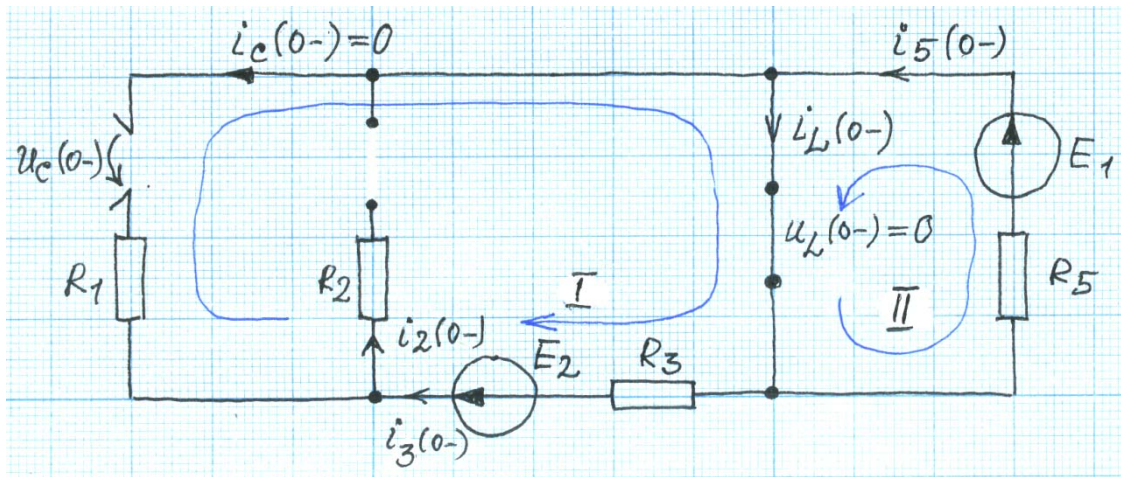


Рис. 3

По первому закону Кирхгофа

$$i_3(0-) = i_2(0-) - i_C(0-) = 0; i_L(0-) = i_3(0-) + i_5(0-) = i_5(0-).$$

Запишем для контуров I и II

$$i_3(0-) \cdot R_3 - i_C(0-) \cdot R_1 - u_C(0-) = E_2; i_5(0-) \cdot R_5 = E_1.$$

Откуда получим для независимых переменных

$$i_L(0-) = i_5(0-) = \frac{E_1}{R_5} = \frac{70}{200} = 0.35 \text{ A};$$

$$u_C(0-) = -E_2 = -40 \text{ В}.$$

Независимые начальные условия – ток через катушку индуктивности и напряжение на конденсаторе – по частным законам коммутации

$$\begin{cases} i_L(0) = i_L(0-) = 0.35 \text{ A}; \\ u_C(0) = u_C(0-) = -40 \text{ В}. \end{cases} \quad (1)$$

### 2. Составление характеристического уравнения цепи

## 2.1. Совместное решение однородной системы дифференциальных уравнений

Составляем систему дифференциальных уравнений для мгновенных значений токов и напряжений по законам Кирхгофа для цепи после коммутации (рис. 4).

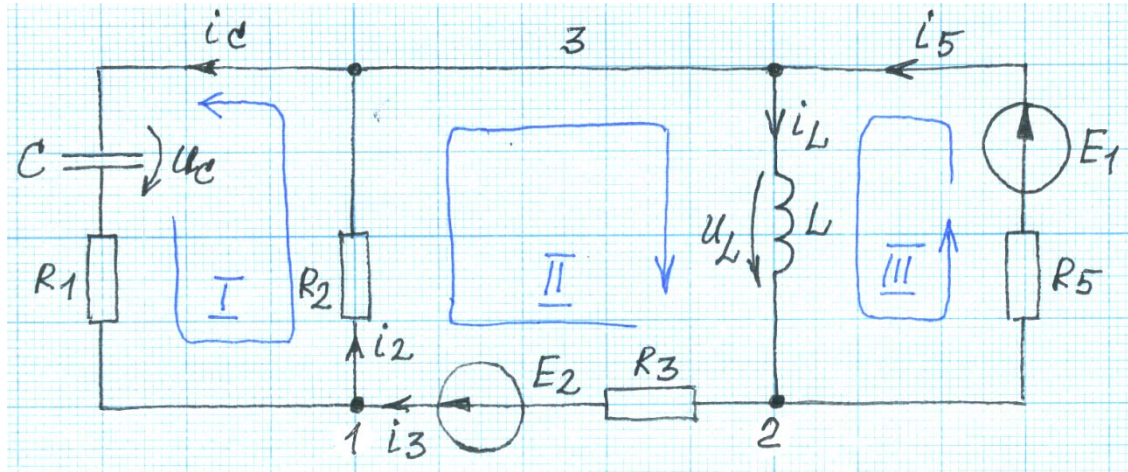


Рис. 4

$$\begin{cases} i_2 = i_3 + i_C; & i_L = i_3 + i_5; \\ i_2 \cdot R_2 + u_C + i_C \cdot R_1 = 0; \\ i_3 \cdot R_3 + i_2 \cdot R_2 + u_L = E_2; \\ u_L + i_5 \cdot R_5 = E_1, \end{cases} \quad (2)$$

где  $i_C = C \frac{du_C}{dt}$ ;  $u_L = L \frac{di_L}{dt}$ .

Выразим зависимые переменные  $i_2$ ,  $i_3$ ,  $i_5$ ,  $i_C$ ,  $u_L$  через независимые  $i_L$ ,  $u_C$

$$\begin{cases} i_2 = \frac{(E_2 - E_1)R_1 - u_C(R_3 + R_5) + i_L R_1 R_5}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_5) + R_1 R_2}; \\ i_3 = \frac{(E_2 - E_1)(R_1 + R_2) + u_C R_2 + i_L (R_1 + R_2) R_5}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_5) + R_1 R_2}; \\ i_5 = \frac{(E_1 - E_2)(R_1 + R_2) - u_C R_2 + i_L (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_5) + R_1 R_2}; \\ i_C = \frac{(E_1 - E_2)R_2 - u_C (R_2 + R_3 + R_5) - i_L R_2 R_5}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_5) + R_1 R_2}; \\ u_L = \frac{E_1 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) + E_2 (R_1 + R_2) R_5 + u_C R_2 R_5 - i_L (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) R_5}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_5) + R_1 R_2}. \end{cases} \quad (3)$$

Дифференцируем третье уравнение системы дифференциальных уравнений (2)

$$i'_2 R_2 + u'_c + i'_c R_1 = 0.$$

Откуда ( $i_c = C \cdot u'_c$ )

$$u''_c + \frac{1}{R_1 C} u'_c + \frac{R_2}{R_1 C} i'_2 = 0.$$

Подставим в полученное уравнение выражение для  $i_2$  из (3)

$$u''_c + \frac{1}{R_1 C} u'_c + \frac{R_2}{R_1 C} \frac{-u'_c (R_3 + R_5) + i'_L R_1 R_5}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_5) + R_1 R_2} = 0.$$

Также выразим из (3)

$$i'_L = \frac{u_L}{L}.$$

После приведения подобных слагаемых и группирования получаем дифференциальное неоднородное уравнение второго порядка

$$u''_c + \left( \frac{1}{C \left[ R_1 + \frac{R_2 (R_3 + R_5)}{R_2 + R_3 + R_5} \right]} + \frac{R_5}{L} \frac{R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{R_3 + R_5 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \right) u'_c + \frac{(R_2 + R_3) R_5}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_5) + R_1 R_2} \frac{1}{LC} u_c = \frac{-R_2 R_5}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_5) + R_1 R_2} \frac{E_2}{LC}.$$

Характеристическое уравнение получается из соответствующего однородного дифференциального уравнения

$$u''_c + \left( \frac{1}{C \left[ R_1 + \frac{R_2 (R_3 + R_5)}{R_2 + R_3 + R_5} \right]} + \frac{R_5}{L} \frac{R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{R_3 + R_5 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \right) u'_c + \frac{(R_2 + R_3) R_5}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_5) + R_1 R_2} \frac{1}{LC} u_c = 0.$$

в результате замены производных на соответствующие степени оператора  $p$  получим



$$p^2 + \left( \frac{1}{C \left[ R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_5)}{R_2 + R_3 + R_5} \right]} + \frac{R_5}{L} \frac{R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{R_3 + R_5 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \right) \cdot p + \frac{(R_2 + R_3) R_5}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_5) + R_1 R_2} \frac{1}{LC} = 0. \quad (4)$$

## 2.2. Алгебраизация дифференциальных уравнений

Для получения характеристических уравнений записывается система уравнений по методу контурных токов (рис. 5) для свободных составляющих, которая впоследствии переписывается в алгебраической форме с помощью вспомогательного символа  $p$ , заменяющего операцию дифференцирования, и  $1/p$ , заменяющего операцию интегрирования.

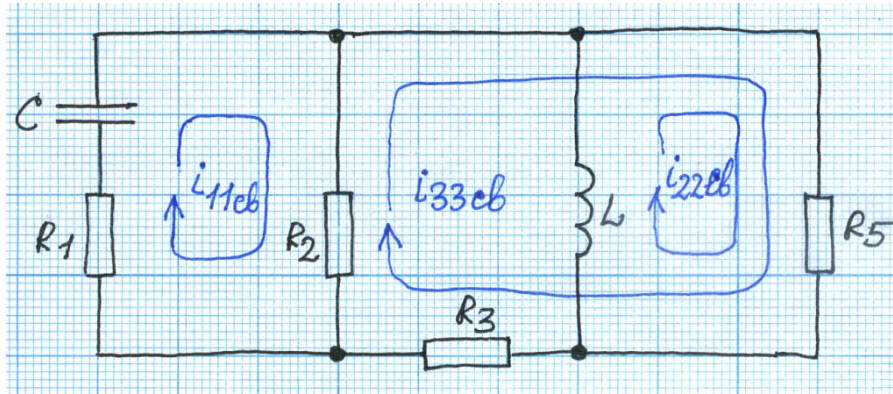


Рис. 5

$$\begin{cases} i_{11cb} \cdot (R_1 + R_2) + \frac{1}{C} \int i_{11cb} dt - i_{33cb} R_2 = 0; \\ i_{22cb} \cdot R_5 + L \frac{di_{22cb}}{dt} + i_{33cb} R_5 = 0; \\ i_{33cb} (R_2 + R_3 + R_5) - i_{11cb} R_2 + i_{22cb} R_5 = 0. \end{cases}$$

В алгебраической форме

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + 1/(pC)) \cdot i_{11cb} & - R_2 \cdot i_{33cb} = 0; \\ & (R_5 + pL) \cdot i_{22cb} & + R_5 \cdot i_{33cb} = 0; \\ - R_2 \cdot i_{11cb} & + R_5 \cdot i_{22cb} + (R_2 + R_3 + R_5) \cdot i_{33cb} = 0. \end{cases}$$

Данная система алгебраических уравнений имеет решение, отличное от нулевого только тогда, когда ее определитель равен нулю

$$\begin{vmatrix} R_1 + R_2 + \frac{1}{pC} & 0 & -R_2 \\ 0 & R_5 + pL & R_5 \\ -R_2 & R_5 & R_2 + R_3 + R_5 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\left(R_1 + R_2 + \frac{1}{pC}\right)(R_5 + pL)(R_2 + R_3 + R_5) - R_5^2 \left(R_1 + R_2 + \frac{1}{pC}\right) - R_2^2 (R_5 + pL) = 0.$$

Выполним следующие преобразования. Умножим на  $pC$  и приведем подобные

$$\begin{aligned} & [(R_1 + R_2)pC + 1][(R_5 + pL)(R_2 + R_3 + R_5) - R_5^2] - R_2^2 pC(R_5 + pL) = 0; \\ & [(R_1 + R_2)(R_3 + R_5) + R_1 R_2] LC \cdot p^2 + \\ & + [(R_2 + R_3 + R_5)L + R_5(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)C] \cdot p + (R_2 + R_3)R_5 = 0. \end{aligned}$$

Умножаем на  $\frac{1}{[(R_1 + R_2)(R_3 + R_5) + R_1 R_2] LC}$

$$\begin{aligned} p^2 + \left[ \frac{R_2 + R_3 + R_5}{C[(R_1 + R_2)(R_3 + R_5) + R_1 R_2]} + \frac{R_5(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)}{[(R_1 + R_2)(R_3 + R_5) + R_1 R_2]L} \right] \cdot p + \\ + \frac{(R_2 + R_3)R_5}{[(R_1 + R_2)(R_3 + R_5) + R_1 R_2]LC} = 0. \end{aligned}$$

В результате преобразования получим

$$\begin{aligned} p^2 + \left( \frac{1}{C \left[ R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_5)}{R_2 + R_3 + R_5} \right]} + \frac{R_5}{L} \frac{R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{R_3 + R_5 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \right) \cdot p + \\ + \frac{(R_2 + R_3)R_5}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_5) + R_1 R_2} \frac{1}{LC} = 0. \end{aligned}$$

характеристическое уравнение (4).

### 2.3. Метод входного сопротивления

Удалим из цепи после коммутации (рис. 4) источники в соответствии с известным правилом: источники ЭДС заменяются короткозамкнутыми участками, ветви с источниками тока размыкаются, реактивные сопротивления заменяются их операторными изображениями

$$X_L = \omega L \rightarrow pL; X_C = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \frac{1}{pC}.$$

В произвольной ветви, разорвав цепь (рис. 6),

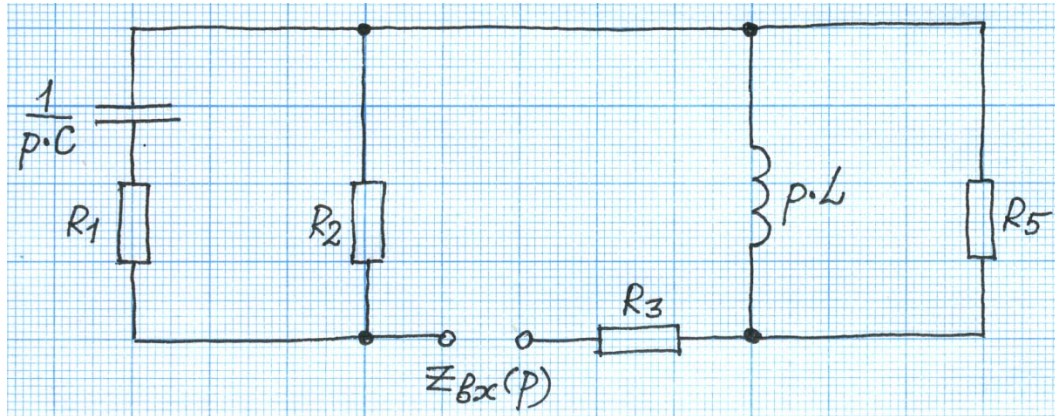


Рис. 6

запишем входное сопротивление

$$\begin{aligned} Z_{\text{вх}}(p) &= R_3 + \frac{R_5 pL}{R_5 + pL} + \frac{R_2 \cdot \left( R_1 + \frac{1}{pC} \right)}{R_2 + \left( R_1 + \frac{1}{pC} \right)} = \\ &= R_3 + \frac{R_5 L p}{R_5 + pL} + \frac{R_2 (R_1 C p + 1)}{(R_1 + R_2) C p + 1} = \\ &= \frac{R_3 (R_5 + pL) [(R_1 + R_2) C p + 1] + R_5 L p [(R_1 + R_2) C p + 1] + R_2 (R_1 C p + 1) (R_5 + pL)}{(R_5 + pL) [(R_1 + R_2) C p + 1]} = \\ &= \frac{[(R_1 + R_2)(R_3 + R_5) + R_1 R_2] L C \cdot p^2 + [(R_2 + R_3 + R_5) L + R_5 R^2 C] \cdot p + (R_2 + R_3) R_5}{(R_5 + pL) [(R_1 + R_2) C p + 1]}, \end{aligned}$$

где

$$R^2 = R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3.$$

Приравняв входное сопротивление (числитель входного сопротивления) нулю получим

$$F_2(p) = p^2 + \left( \frac{1}{C \left[ R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_5)}{R_2 + R_3 + R_5} \right]} + \frac{R_5}{L} \frac{R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{R_3 + R_5 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \right) \cdot p + \frac{(R_2 + R_3)R_5}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_5) + R_1 R_2} \frac{1}{LC} = 0.$$

характеристическое уравнение цепи (4).

Для характеристического уравнения (3)

$$p^2 + 2\delta \cdot p + \omega_0^2 = 0,$$

где

$$\delta = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{C \left[ R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_5)}{R_2 + R_3 + R_5} \right]} + \frac{R_5}{L} \frac{R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{R_3 + R_5 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \right) = 91.0714 \text{ 1/c};$$

$$\omega_0^2 = \frac{(R_2 + R_3)R_5}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_5) + R_1 R_2} \frac{1}{LC} = 2380.9524 \text{ 1/c}^2$$

корни

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} =$$

$$= -91.0714 \pm \sqrt{91.0714^2 - 2380.9524} = -91.0714 \pm 76.8964 \text{ c}^{-1}.$$

являются вещественными различными

$$\begin{cases} p_1 = -\delta + \omega = -91.0714 + 76.8964 = -14.175 \text{ c}^{-1}; \\ p_2 = -\delta - \omega = -91.0714 - 76.8964 = -167.968 \text{ c}^{-1}, \end{cases} \quad (5)$$

следовательно, переходный процесс в цепи имеет аperiodический характер.

### 3. Определение принужденной составляющей

Рассматриваемая цепь в принужденном режиме (установившийся режим после коммутации) имеет вид, представленный на рис. 7.

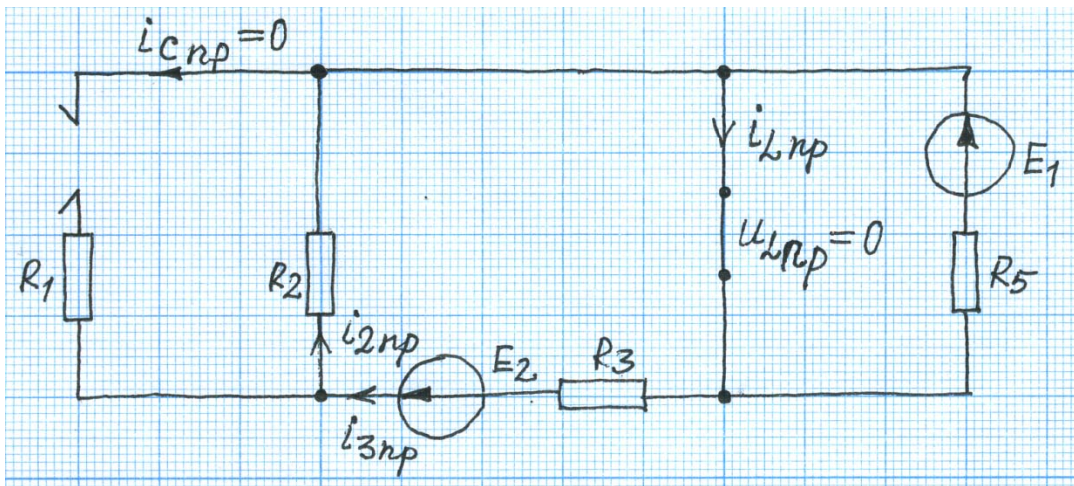


Рис. 7

Принужденная составляющая тока через конденсатор

$$i_{3 np} = \frac{E_2}{R_2 + R_3} = \frac{40}{800 + 200} = 0.04 \text{ A.} \quad (6)$$

#### 4. Определение свободной составляющей

Для цепей, характеристические числа которых имеют вещественные различные значения, свободная составляющая определяется в виде

$$i_{cb}(t) = Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t},$$

где

$p_1, p_2$  – корни характеристического уравнения;

$A, B$  – постоянные интегрирования.

Общее решение для переходного тока

$$i(t) = i_{cb}(t) + i_{np}(t) = Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t} + i_{np}. \quad (7)$$

Из (6) получим для момента времени  $t = 0+$

$$\begin{cases} i(0) = A + B + i_{np}; \\ \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = p_1 A + p_2 B \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} A + B = i_{np} - i(0); \\ p_1 A + p_2 B = \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}. \end{cases}$$

Решение системы уравнений для постоянных интегрирования  $A$  и  $B$  находим методом определителей.

## Определители системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} = p_2 - p_1;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} i(0) - i_{np} & 1 \\ \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} & p_2 \end{vmatrix} = [i(0) - i_{np}] p_2 - \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & i(0) - i_{np} \\ p_1 & \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} \end{vmatrix} = \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} - [i(0) - i_{np}] p_1;$$

Решение для постоянных интегрирования  $A$  и  $B$

$$\begin{cases} A = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{[i(0) - i_{np}] p_2 - \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}}{p_2 - p_1}; \\ B = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} - [i(0) - i_{np}] p_1}{p_2 - p_1}. \end{cases} \quad (8)$$

4.1. Вычисление постоянных интегрирования по формуле (8) ведется с помощью (1), (6)

$$i_L(0) = 0.35 \text{ А}; u_C(0) = -40 \text{ В}; i_{C np} = 0$$

и системы уравнений (2), составленных для момента  $t = 0+$

$$i_3(0) = \frac{(E_2 - E_1)(R_1 + R_2) + u_C(0)R_2 + i_L(0)(R_1 + R_2)R_5}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_5) + R_1R_2};$$

$$\left. \frac{di_3}{dt} \right|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{(E_2 - E_1)(R_1 + R_2) + u_C R_2 + i_L (R_1 + R_2) R_5}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_5) + R_1 R_2} \right]_{t=0} =$$

$$= \frac{u'_C(0) \cdot R_2 + i'_L(0) \cdot (R_1 + R_2) R_5}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_5) + R_1 R_2},$$

где

$$u'_C(0) = \frac{i_C(0)}{C}; i'_L(0) = \frac{u_L(0)}{L}.$$

Находим

$$i_3(0) = \frac{(E_2 - E_1)(R_1 + R_2) + u_C(0)R_2 + i_L(0)(R_1 + R_2)R_5}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_5) + R_1R_2} = 0.0142857 \text{ А};$$

$$i_C(0) = \frac{(E_1 - E_2)R_2 - u_C(0)(R_2 + R_3 + R_5) - i_L(0)R_2R_5}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_5) + R_1R_2} = 0.0285714 \text{ A};$$

$$u'_C(0) = \frac{i_C(0)}{C} = 142.857 \text{ B/c};$$

$$u_L(0) = \frac{(E_1 - i_L(0)R_5)(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3) + E_2(R_1 + R_2)R_5 + u_C(0)R_2R_5}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_5) + R_1R_2} =$$

$$= 2.857143 \text{ B}.$$

$$i'_L(0) = \frac{u_L(0)}{L} = 4.025157 \text{ A/c};$$

$$i'_3(0) = \frac{u'_C(0) \cdot R_2 + i'_L(0) \cdot (R_1 + R_2)R_5}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_5) + R_1R_2} = 3.809524 \text{ A/c}.$$

$$A = \frac{[i_3(0) - i_{3np}]p_2 - i'_3(0)}{p_2 - p_1} = -0.0179108 \text{ A};$$

$$B = \frac{i'_3(0) - [i_3(0) - i_{3np}]p_1}{p_2 - p_1} = -0.0078035 \text{ A}.$$

Получили

$$\begin{cases} A = -0.0179108 \text{ A}; \\ B = -0.0078035 \text{ A}. \end{cases} \quad (9)$$

4.2. Определение  $i_3(0)$  и  $i_3'(0)$  с использованием резистивных схем замещения в момент  $t = 0+$  (рис. 8).

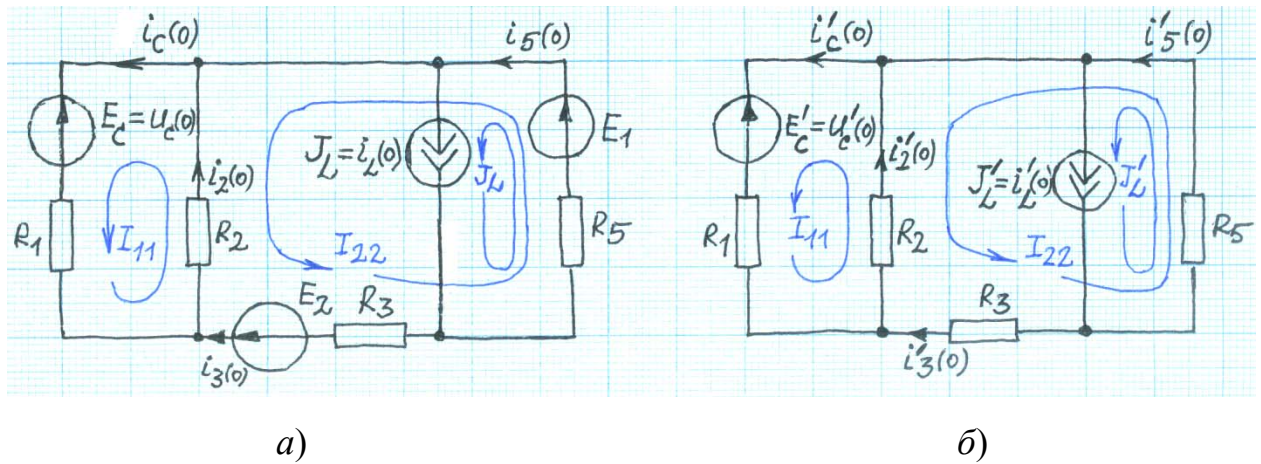


Рис. 8

Ток в третьей ветви при  $t = 0+$  для схемы (рис. 8, а) находим по методу контурных токов

$$\begin{cases} I_{11}(R_1 + R_2) - I_{22}R_2 = -u_c(0); \\ I_{22}(R_2 + R_3 + R_5) - I_{11}R_2 + i_L(0)R_5 = E_1 - E_2 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} I_{11}(R_1 + R_2) - I_{22}R_2 & = -u_c(0); \\ -I_{11}R_2 & + I_{22}(R_2 + R_3 + R_5) = E_1 - E_2 - i_L(0)R_5. \end{cases}$$

Методом определителей находим

$$\begin{aligned} i_3(0) = -I_{22} &= -\frac{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -u_c(0) \\ -R_2 & E_1 - E_2 - i_L(0)R_5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_5 \end{vmatrix}} = \\ &= -\frac{(R_1 + R_2)(E_1 - E_2 - i_L(0)R_5) - u_c(0)R_2}{(R_1 + R_2)(R_2 + R_3 + R_5) - (-R_2)^2} = \\ &= \frac{(E_2 - E_1)(R_1 + R_2) + u_c(0)R_2 + i_L(0)(R_1 + R_2)R_5}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_5) + R_1R_2}. \end{aligned}$$

Производная тока при  $t = 0+$  для эквивалентной схемы (рис. 8, б) по методу контурных токов

$$\begin{cases} I_{11}(R_1 + R_2) - I_{22}R_2 & = -u'_c(0); \\ -I_{11}R_2 & + I_{22}(R_2 + R_3 + R_5) = -i'_L(0)R_5; \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
i_3'(0) = -I_{22} &= -\frac{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -u'_C(0) \\ -R_2 & -i'_L(0)R_5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_5 \end{vmatrix}} = \\
&= -\frac{-i'_L(0)R_5(R_1 + R_2) - R_2u'_C(0)}{(R_1 + R_2)(R_2 + R_3 + R_5) - (-R_2)^2} = \\
&= \frac{u'_C(0)R_2 + i'_L(0)(R_1 + R_2)R_5}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_5) + R_1R_2}.
\end{aligned}$$

## 5. Общее решение

Полное решение (7) переходного тока через конденсатор

$$\begin{aligned}
i_3(t) &= Ae^{p_1t} + Be^{p_2t} + i_{3np} = \\
&= 0.01791 \cdot e^{-14.175t} + 0.00780 \cdot e^{-167.968t} + 0.04 \text{ A.}
\end{aligned} \tag{10}$$

### 3 Операторный метод расчета

С учетом независимых начальных условий (1) изображаем операторную схему замещения цепи (рис. 9).

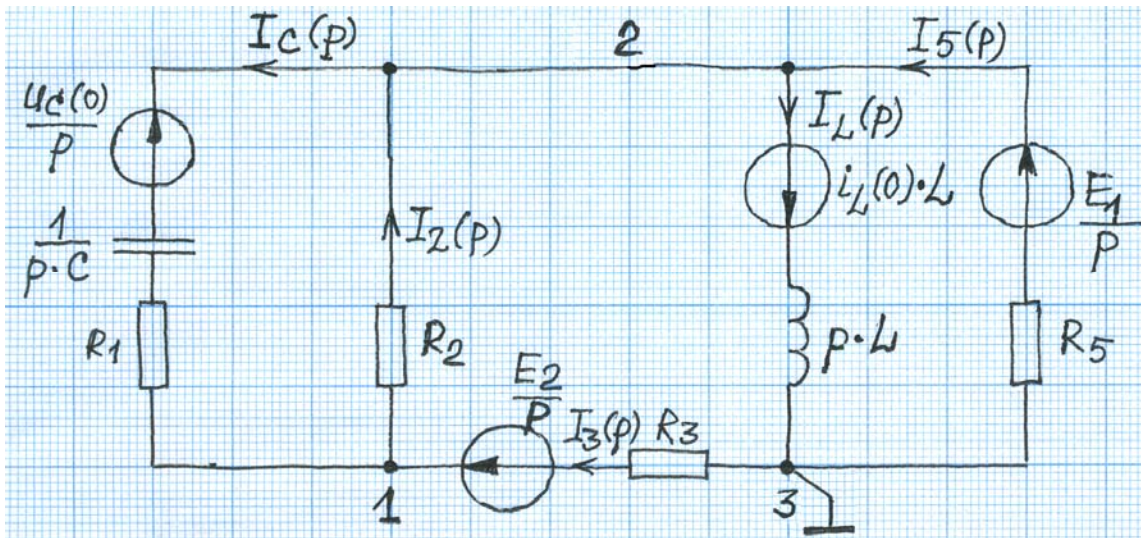


Рис. 9

Операторная система уравнений по методу узловых потенциалов

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_1 \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{pC}} \right) - \varphi_2 \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{pC}} \right) &= \frac{E_2}{p} \frac{1}{R_3} - \frac{u_c(0)}{p} \frac{1}{R_1 + \frac{1}{pC}}; \\ -\varphi_1 \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{pC}} \right) + \varphi_2 \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{pL} + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{pC}} \right) &= \\ &= -\frac{L \cdot i_L(0)}{pL} + \frac{E_1}{p} \frac{1}{R_5} + \frac{u_c(0)}{p} \frac{1}{R_1 + \frac{1}{pC}}. \end{aligned} \right.$$

С учетом  $u_c(0) = -E_2$

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_1 \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{Cp}{R_1 Cp + 1} \right) - \varphi_2 \left( \frac{1}{R_2} + \frac{Cp}{R_1 Cp + 1} \right) &= \frac{E_2}{p} \left( \frac{1}{R_3} + \frac{Cp}{R_1 Cp + 1} \right); \\ -\varphi_1 \left( \frac{1}{R_2} + \frac{Cp}{R_1 Cp + 1} \right) + \varphi_2 \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{pL} + \frac{Cp}{R_1 Cp + 1} \right) &= -\frac{L \cdot i_L(0)}{pL} + \frac{E_1}{p} \frac{1}{R_5} - \frac{E_2}{p} \frac{Cp}{R_1 Cp + 1}. \end{aligned} \right.$$

Операторное изображение потенциала  $\varphi_1(p)$  находим методом определителей

$$\begin{aligned} \Delta(p) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{Cp}{R_1 Cp + 1} & -\left(\frac{1}{R_2} + \frac{Cp}{R_1 Cp + 1}\right) \\ -\left(\frac{1}{R_2} + \frac{Cp}{R_1 Cp + 1}\right) & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{pL} + \frac{Cp}{R_1 Cp + 1} \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{Cp}{R_1 Cp + 1}\right) \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{pL} + \frac{Cp}{R_1 Cp + 1}\right) - \left(\frac{1}{R_2} + \frac{Cp}{R_1 Cp + 1}\right)^2 = \\ &= C \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_5) + R_1 R_2}{R_2 R_3 R_5 p (R_1 Cp + 1)} \cdot F_2(p); \end{aligned}$$

где характеристический многочлен

$$\begin{aligned} F_2(p) &= p^2 + \left( \frac{1}{C \left[ R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_5)}{R_2 + R_3 + R_5} \right]} + \frac{R_5}{L} \frac{R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{R_3 + R_5 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \right) \cdot p + \\ &+ \frac{(R_2 + R_3) R_5}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_5) + R_1 R_2} \frac{1}{LC} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_1(p) &= \begin{vmatrix} \frac{E_2}{p} \left(\frac{1}{R_3} + \frac{Cp}{R_1 Cp + 1}\right) & -\left(\frac{1}{R_2} + \frac{Cp}{R_1 Cp + 1}\right) \\ -\frac{L \cdot i_L(0)}{pL} + \frac{E_1}{p} \frac{1}{R_5} - \frac{E_2}{p} \frac{Cp}{R_1 Cp + 1} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{pL} + \frac{Cp}{R_1 Cp + 1} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{E_2}{p} \left(\frac{1}{R_3} + \frac{Cp}{R_1 Cp + 1}\right) \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{pL} + \frac{Cp}{R_1 Cp + 1}\right) - \\ &- \frac{1}{p} \left( i_L(0) - \frac{E_1}{R_5} + \frac{E_2 Cp}{R_1 Cp + 1} \right) \left(\frac{1}{R_2} + \frac{Cp}{R_1 Cp + 1}\right); \end{aligned}$$

$$\varphi_1(p) = \frac{\Delta_1(p)}{\Delta(p)}.$$

Операторный ток третьей ветви

$$I_3(p) = \frac{\frac{E_2}{R_3} - \varphi_1(p)}{p}.$$

После подстановки численных значений получим

$$I_3(p) = \frac{F_1(p)}{p \cdot F_2(p)} = \frac{\frac{1}{70}p^2 + \frac{25}{6}p + \frac{2000}{21}}{p \cdot \left( p^2 + \frac{1275}{7} \cdot p + \frac{50000}{21} \right)}.$$

Оригинал искомого тока находим с помощью теоремы разложения

$$I_3(p) = \frac{F_1(p)}{p \cdot F_2(p)} \doteq i_C(t) = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=1}^2 \frac{F_1(p_k)}{p_k \cdot F_2'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (10)$$

где  $p_k$  корни характеристического уравнения (3)  $F_2(p) = 0$ :

$$\begin{cases} p_1 = -14.175 \text{ с}^{-1}; \\ p_2 = -167.968 \text{ с}^{-1}, \end{cases}$$

здесь

$$F_1(p) = \frac{1}{70}p^2 + \frac{25}{6}p + \frac{2000}{21};$$

$$F_2(p) = p^2 + \frac{1275}{7} \cdot p + \frac{50000}{21};$$

$$F_2'(p) = 2p + \frac{1275}{7}.$$

Выполним расчет по теореме разложения (10)

$$\frac{F_1(0)}{F_2(0)} = \frac{95.24}{2381} = 0.04 \text{ А};$$

$$\frac{F_1(p_1)}{p_1 \cdot F_2'(p_1)} = \frac{39.046}{(-14.175) \cdot 153.79} = -0.01791 \text{ А};$$

$$\frac{F_1(p_2)}{p_2 \cdot F_2'(p_2)} = \frac{-201.58}{-167.968 \cdot (-153.79)} = -0.00780 \text{ А}.$$

Полное решение переходного тока в первой ветви операторным методом

$$i_3(t) = 0.04 + 0.01791 \cdot e^{-14.175t} + 0.00780 \cdot e^{-167.968t} \text{ А}.$$

Данное решение совпадает с решением (7), полученным классическим методом.

## 4 Построение графика переходного процесса

Построение графика изменения тока

$$i_3(t) = 0.01791 \cdot e^{-14.175t} + 0.00780 \cdot e^{-167.968t} + 0.04 \text{ А.}$$

Определяем время переходного процесса

$$t_n \approx 4 \cdot \max\left(\left|\frac{1}{p_1}\right|, \left|\frac{1}{p_2}\right|\right) = 4 \cdot 0.0705 = 0.3 \text{ с} = 300 \text{ мс.}$$

За время  $4 \cdot \tau$  амплитуда экспоненты (свободной составляющей тока) уменьшится в

$$\frac{Ae^{-\frac{0}{\tau}}}{Ae^{-\frac{t_n}{\tau}}} = e^{\frac{4\tau}{\tau}} = e^4 \approx 50 \text{ раз.}$$

Переходной ток практически примет значение принужденной составляющей тока – установившееся значение тока после коммутации.

Результаты расчетов значений тока  $i_3(t)$  записаны в табл. 2., а график изменения  $i_3(t)$  изображен на рис. 11.

## Расчет тока

$N_2$	$t$ , мс	$A \cdot e^{p_1 \cdot t}$ , $A$	$B \cdot e^{p_2 \cdot t}$ , $A$	$i_{cs}(t) =$ $A \cdot e^{p_1 \cdot t} + B \cdot e^{p_2 \cdot t}$ , $A$	$i_{np}(t)$ , $A$	$i(t) =$ $i_{cs}(t) + i_{np}(t)$ , $A$
0	0	-0,01791	-0,00780	-0,0257	0,04	0,0143
1	20	-0,01349	-0,00027	-0,0138	0,04	0,0262
2	40	-0,01016	-0,00001	-0,0102	0,04	0,0298
3	60	-0,00765	0,00000	-0,0077	0,04	0,0323
4	80	-0,00576	0,00000	-0,0058	0,04	0,0342
5	100	-0,00434	0,00000	-0,0043	0,04	0,0357
6	120	-0,00327	0,00000	-0,0033	0,04	0,0367
7	140	-0,00246	0,00000	-0,0025	0,04	0,0375
8	160	-0,00185	0,00000	-0,0019	0,04	0,0381
9	180	-0,00140	0,00000	-0,0014	0,04	0,0386
10	200	-0,00105	0,00000	-0,0011	0,04	0,0389
11	220	-0,00079	0,00000	-0,0008	0,04	0,0392
12	240	-0,00060	0,00000	-0,0006	0,04	0,0394
13	260	-0,00045	0,00000	-0,0004	0,04	0,0396
14	280	-0,00034	0,00000	-0,0003	0,04	0,0397
15	300	-0,00025	0,00000	-0,0003	0,04	0,0397

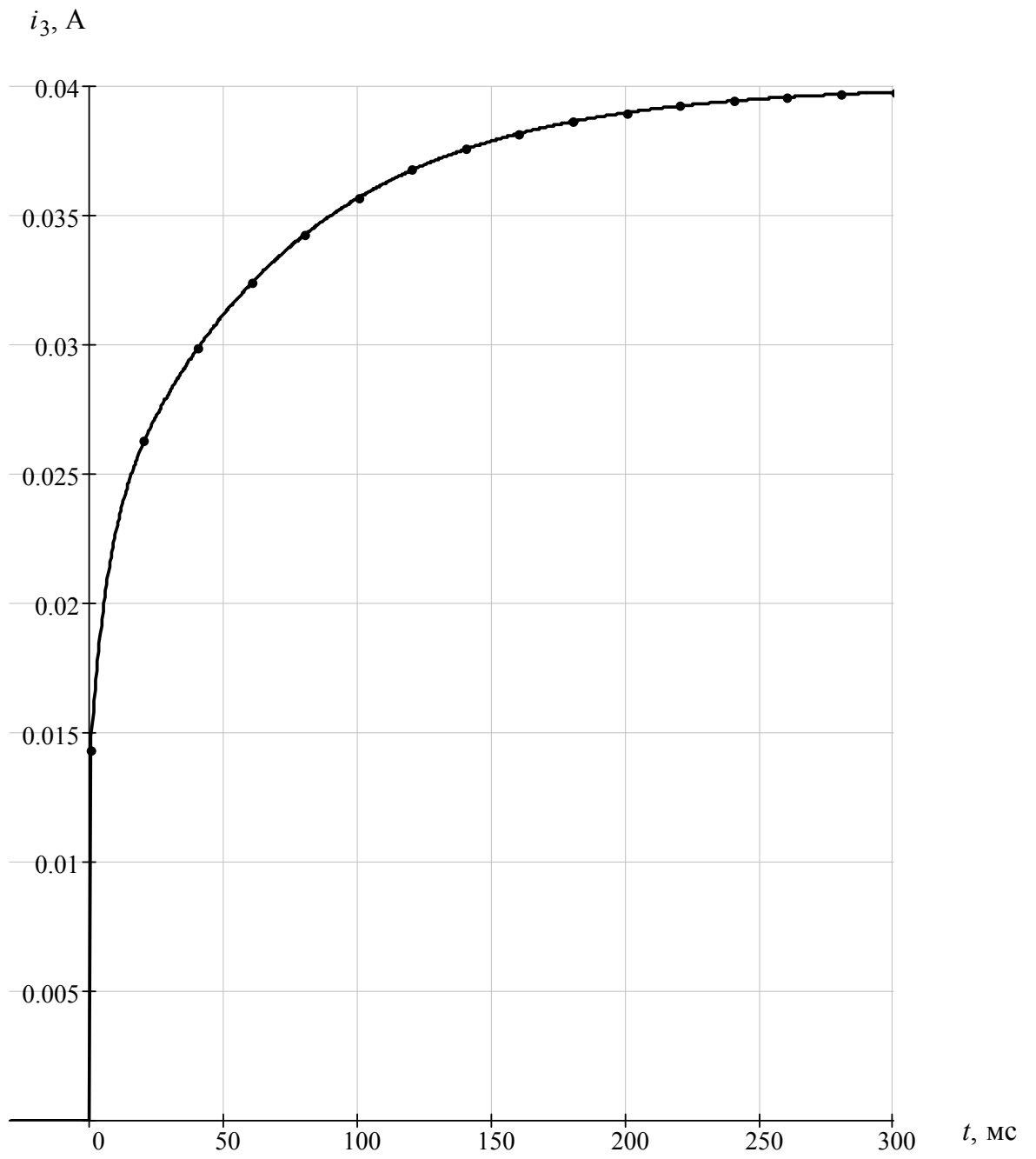


Рис. 11

## Список литературы

1. Т.А. Кузнецова, Е.А. Кулютникова, А.А. Рябуха. Методы исследования переходных процессов в линейных электрических цепях с сосредоточенными параметрами: Задания и методические указания к самостоятельной работе по курсам "Основы теории цепей", "Теоретические основы электротехники". Ч.II / Перм. гос. техн. ун-т. – Пермь: Пермский ЦНТИ, 2006. – 56 с.
2. Основы теории цепей: учебное пособие. Ч. II / Т. А. Кузнецова, Е.А. Кулютникова, А.А. Рябуха. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2008. – 308 с.
3. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. М., “Энергия”,1996 – 425 с.
4. Зевеке Г.В. и др., Основы теории цепей. М., “Энергия”,1975. – 750 с.