

Цилиндрический конденсатор заполнен 2-слойным диэлектриком (рис. 1, табл. 1).

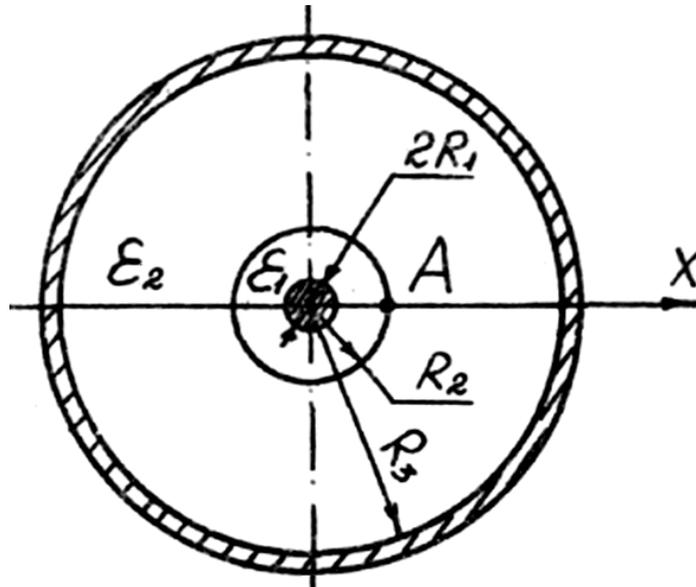


Рис. 1

Таблица 1

Номер группы	R_1	R_2	R_3	ϵ_1	ϵ_2	U_0 , кВ
	см					
ЭАГ 1	1,0	10	20	9	4,5	50

Задание

1. Определить пробивную напряженность поля $E_{пр}$ этого конденсатора, сравнить со случаем однородного диэлектрика, имеющего свойства слоя ϵ_1 .
2. Определить, при каком отношении ϵ_1 / ϵ_2 пробивная напряженность поля принимает наименьшее значение.
3. Построить график распределения напряженности поля E и потенциала φ в зависимости от расстояния от оси X .

Анализ

1. Очевидно, что в силу больших линейных размеров конденсатора его поле симметрично относительно любой плоскости, перпендикулярной к оси конденсатора. Решение целесообразно проводить в цилиндрической системе координат, совмещенной с осью конденсатора.

2. В этом случае вектор напряженности электрического поля \vec{E} и вектор электрического смещения (вектор электрической индукции) \vec{D} имеют в любой точке, лежащей на цилиндрической поверхности радиуса r , единственную радиальную составляющую.

3. В любой точке поверхности постоянного радиуса значение вектора \vec{E} и вектора \vec{D} постоянно.

Решение

Напряженность электрического поля в металлической центральной жиле равна нулю.

Выберем цилиндрическую поверхность радиуса R_i (рис. 2).

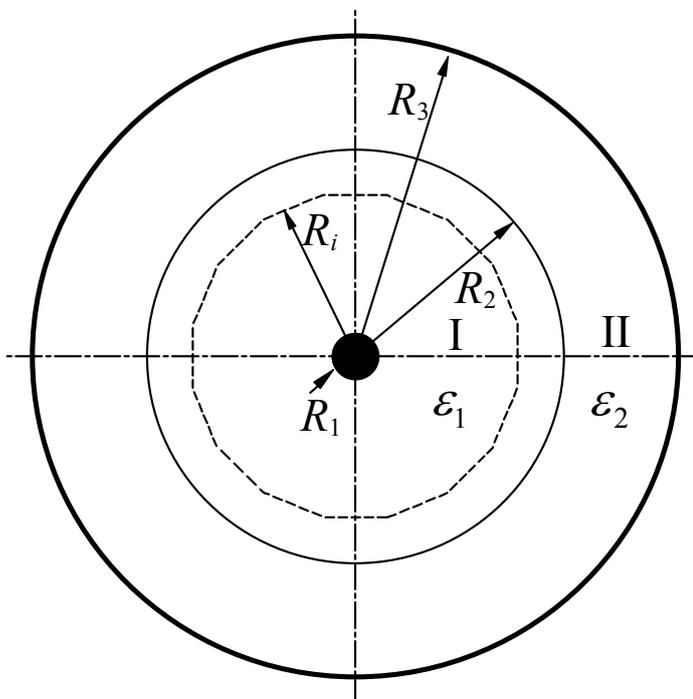


Рис. 2

По теореме Гаусса

$$\oint_S \vec{D}_i d\vec{S} = \oint_S D_i dS = D_i \oint_S dS = D_i \cdot 2\pi R_i \cdot l = q,$$

где

l – длина конденсатора;

q – заряд конденсатора.

Заряд в области $r \leq R_i$

$$q = \tau \cdot l.$$

Тогда

$$D_i \cdot 2\pi R_i \cdot l = \tau \cdot l,$$

$$D(r) = \frac{\tau}{2\pi} \frac{1}{r},$$

где τ – линейная плотность заряда конденсатора.

Вектор электрического смещения \vec{D} (вектор электрической индукции) не имеет скачков при переходе между слоями изоляции (свойство непрерывности вектора \vec{D}).

Разобьем пространство с электростатическим полем на две цилиндрические области (рис. 2).

Рассмотрим электростатическое поле в этих двух областях.

Область I, $R_1 \leq r \leq R_2$.

Электрическое смещение

$$D(r) = \frac{\tau}{2\pi} \frac{1}{r}.$$

Напряженность электрического поля

$$E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_1 \varepsilon_0} = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_1 \varepsilon_0} \frac{1}{r}.$$

Область II, $R_2 \leq r \leq R_3$.

Электрическое смещение

$$D(r) = \frac{\tau}{2\pi} \frac{1}{r}.$$

Напряженность электрического поля

$$E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_2 \varepsilon_0} = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_2 \varepsilon_0} \frac{1}{r}.$$

Запишем выражения для напряженности электрического поля цилиндрического конденсатора с 2-слойным диэлектриком

$$E(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < R_1; \\ \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0} \frac{1}{r}, & R_1 \leq r < R_2; \\ \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2\varepsilon_0} \frac{1}{r}, & R_2 \leq r < R_3. \end{cases} \quad (1)$$

Потенциал первого слоя диэлектрика

$$\varphi_1(r) = -\int_{R_1}^r E(r) dr = -\int_{R_1}^r \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0} \frac{1}{r} dr = \frac{-\tau}{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0} \ln \frac{r}{R_1},$$

где выбрали условие нормировки потенциала $\varphi(r = R_1) = 0$.

Потенциал второго слоя диэлектрика

$$\varphi_{II}(r) = -\int_{R_2}^r E(r) dr = -\int_{R_2}^r \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2\varepsilon_0} \frac{1}{r} dr = \frac{-\tau}{2\pi\varepsilon_2\varepsilon_0} \ln \frac{r}{R_2} + \varphi_{II}(R_2),$$

где в силу непрерывности потенциала электрического поля

$$\varphi_{II}(R_2) = \varphi_1(R_2) = \frac{-\tau}{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Получим

$$\varphi_{II}(r) = \frac{-\tau}{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0} \ln \frac{r}{R_2} + \varphi_{II}(R_2) = \frac{-\tau}{2\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{r}{R_2} + \frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{R_2}{R_1} \right).$$

Запишем выражения для потенциала электрического поля цилиндрического конденсатора с 2-слойным диэлектриком

$$\varphi(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < R_1; \\ \frac{-\tau}{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0} \ln \frac{r}{R_1}, & R_1 \leq r < R_2; \\ \frac{-\tau}{2\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{r}{R_2} + \frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{R_2}{R_1} \right), & R_2 \leq r < R_3. \end{cases} \quad (2)$$

Из (2) находим напряжение на конденсаторе

$$U = \varphi(R_1) - \varphi(R_3) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{R_3}{R_2} + \frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{R_2}{R_1} \right). \quad (3)$$

Из (3) линейная плотность заряда конденсатора

$$\tau = C \cdot U = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{R_3}{R_2} + \frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot U, \quad (4)$$

где емкость цилиндрического конденсатора с 2-слойным диэлектриком на единицу длины

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{R_3}{R_2} + \frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (5)$$

Тогда формула (1) напряженности электрического поля цилиндрического конденсатора с 2-слойным диэлектриком с учетом (4) примет вид

$$E(r) = \begin{cases} \frac{U_0}{\varepsilon_2} \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{R_3}{R_2} + \ln \frac{R_2}{R_1}} \frac{1}{r}, & R_1 \leq r < R_2; \\ \frac{U_0}{\ln \frac{R_3}{R_2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \ln \frac{R_2}{R_1}} \frac{1}{r}, & R_2 \leq r < R_3. \end{cases} \quad (6)$$

Формула (2) для потенциала электрического поля цилиндрического конденсатора с 2-слойным диэлектриком с учетом (4) примет вид

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{-U}{\varepsilon_2} \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{R_3}{R_2} + \ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \ln \frac{r}{R_1}, & R_1 \leq r < R_2; \\ \frac{-U}{\frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{R_3}{R_2} + \frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{r}{R_2} + \frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{R_2}{R_1} \right), & R_2 \leq r < R_3. \end{cases} \quad (7)$$

Для однородного диэлектрика ε_1 по формуле (4) линейная плотность заряда конденсатора

$$\tau = \frac{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0}{\ln \frac{R_3}{R_1}} \cdot U \quad \text{и} \quad \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0} = \frac{U}{\ln \frac{R_3}{R_1}}.$$

По формуле (1) или (6) напряженность электрического поля цилиндрического конденсатора с однородным диэлектриком

$$E(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < R_1; \\ \frac{U}{\ln \frac{R_3}{R_1}} \frac{1}{r}, & R_1 \leq r < R_3. \end{cases} \quad (8)$$

По формуле (2) или (7) потенциал электрического поля цилиндрического конденсатора с однородным диэлектриком

$$\varphi(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < R_1; \\ -\frac{U}{\ln \frac{R_3}{R_1}} \ln \frac{r}{R_1}, & R_1 \leq r < R_3. \end{cases} \quad (9)$$

Из (8) и (9) следует, что для цилиндрического конденсатора с однородным диэлектриком распределение напряженности и потенциала электрического поля не зависит от диэлектрической проницаемости материала.

Пробивная напряженность поля E_{np} цилиндрического конденсатора:

для цилиндрического конденсатора с 2-слойным диэлектриком из (6)

$$E_{np} = \max \{ E(R_1); E(R_2) \} = \max \left\{ \frac{U_0}{\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ln \frac{R_3}{R_2} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right) \cdot R_1}; \frac{U_0}{\left(\ln \frac{R_3}{R_2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \ln \frac{R_2}{R_1} \right) \cdot R_2} \right\}; \quad (10)$$

для цилиндрического конденсатора с однородным диэлектриком (не зависит от диэлектрической проницаемости материала)

$$E_{np} = \frac{U_0}{R_1 \cdot \ln \frac{R_3}{R_1}}. \quad (11)$$

Пробивная напряженность электрического поля для цилиндрического конденсатора с 2-слойным диэлектриком при условии

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad (12)$$

из (10) принимает наименьшее значение

$$E_{np \min} = \frac{U_0}{\left(\frac{R_2}{R_1} \ln \frac{R_3}{R_2} + \ln \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot R_1} = \frac{U_0}{\left(\ln \frac{R_3}{R_2} + \frac{R_1}{R_2} \ln \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot R_2} = \frac{U_0}{R_2 \ln \frac{R_3}{R_2} + R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (13)$$

Соотношение (12) применяют цилиндрического конденсатора (коаксиального кабеля) с многослойным диэлектриком, чтобы уменьшить пробивную напряженность электрического поля и, соответственно, увеличить рабочее напряжение конденсатора (коаксиального кабеля).

Расчет

1. Пробивная напряженность поля конденсатора с двухслойным диэлектриком (10)

$$\begin{aligned} E_{np} &= \max \left\{ \frac{U_0}{\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ln \frac{R_3}{R_2} + \ln \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot R_1}; \frac{U_0}{\left(\ln \frac{R_3}{R_2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \ln \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot R_2} \right\} = \\ &= \max \left\{ \frac{50 \text{ кВ}}{\left(\frac{9}{4,5} \ln \frac{20}{10} + \ln \frac{10}{1}\right) \cdot 0,01 \text{ м}}; \frac{50 \text{ кВ}}{\left(\ln \frac{20}{10} + \frac{4,5}{9} \ln \frac{10}{1}\right) \cdot 0,1 \text{ м}} \right\} = \\ &= \max \left\{ 1355 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}; 271 \frac{\text{кВ}}{\text{м}} \right\} = 1355 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}. \end{aligned}$$

Пробивная напряженность поля конденсатора с однородным диэлектриком (11)

$$E_{np} = \frac{U_0}{R_1 \cdot \ln \frac{R_3}{R_1}} = \frac{50 \text{ кВ}}{0,01 \text{ м} \cdot \ln \frac{20}{1}} = 1669 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

Пробивная напряженность поля конденсатора с двухслойным диэлектриком $E_{np} = 1355 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}$ меньше пробивной напряженности поля

конденсатора с однородным диэлектриком $E_{np} = 1669 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}$.

2. Пробивная напряженность электрического поля для цилиндрического конденсатора с 2-слойным диэлектриком при условии (12)

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{10}{1} = 10$$

принимает наименьшее значение (13)

$$E_{np \min} = \frac{U_0}{R_2 \ln \frac{R_3}{R_2} + R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{50 \text{ кВ}}{0,1 \text{ м} \cdot \ln \frac{20}{10} + 0,01 \text{ м} \cdot \ln \frac{10}{1}} = 541 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

3. Строим по формуле (6) график (рис. 3, а) распределения напряженности поля (кВ/м)

$$E(r) = \begin{cases} 13,554 \frac{1}{r}, & R_1 \leq r < R_2; \\ 27,109 \frac{1}{r}, & R_2 \leq r < R_3 \end{cases}$$

и по формуле (7) график (рис. 3, б) распределения потенциала (кВ)

$$\varphi(r) = \begin{cases} -13,554 \cdot \ln \frac{r}{R_1}, & R_1 \leq r < R_2; \\ -27,109 \ln \frac{r}{R_2} - 31,210, & R_2 \leq r < R_3. \end{cases}$$

На рисунке 4 приведен график распределения напряженности поля

$$E(r) = \begin{cases} 5,415 \frac{1}{r}, & R_1 \leq r < R_2; \\ 54,147 \frac{1}{r}, & R_2 \leq r < R_3 \end{cases}$$

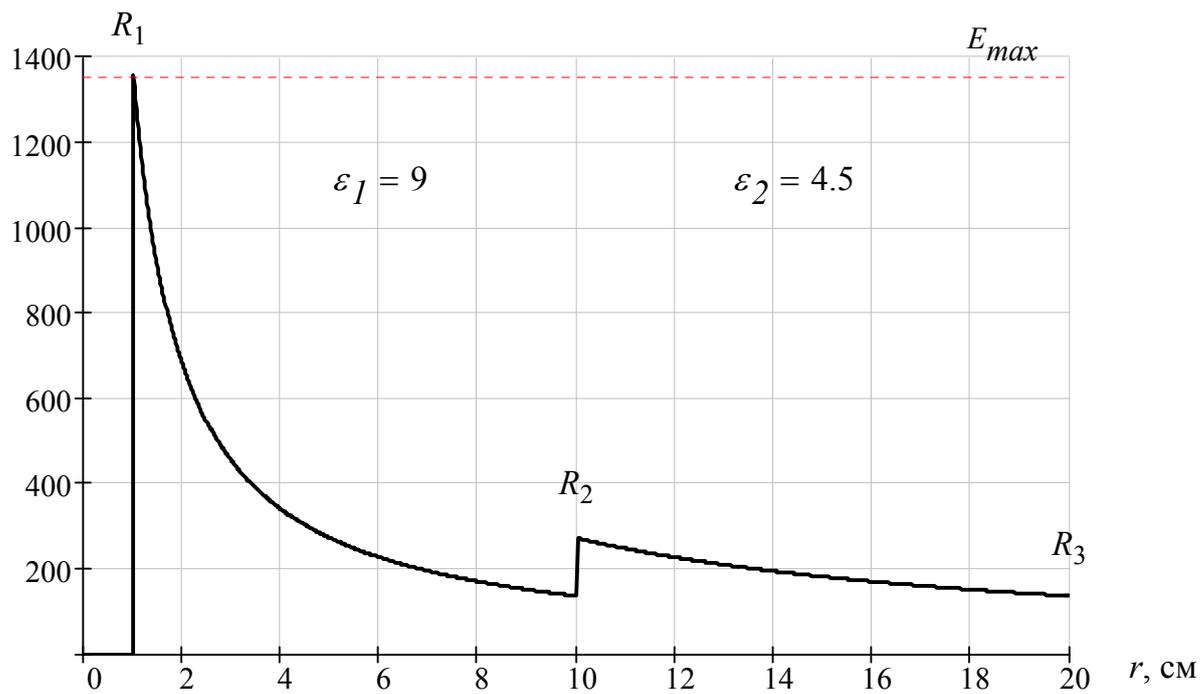
и потенциала

$$\varphi(r) = \begin{cases} -5,415 \cdot \ln \frac{r}{R_1}, & R_1 \leq r < R_2; \\ -54,147 \ln \frac{r}{R_2} - 12,468, & R_2 \leq r < R_3 \end{cases}$$

при условии

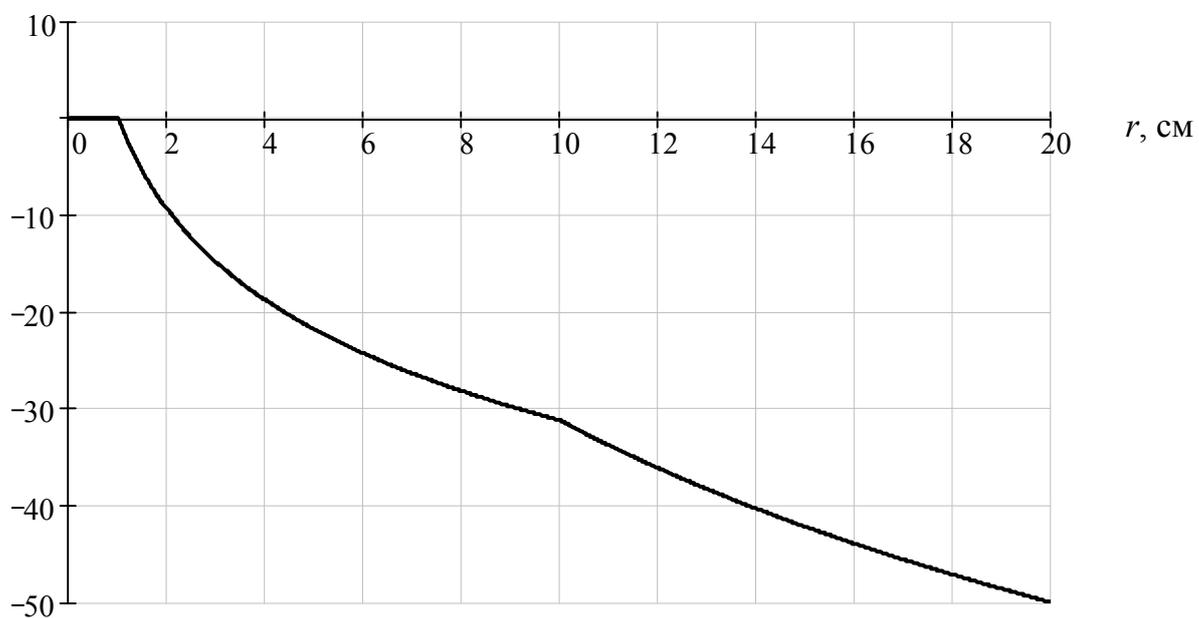
$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{10}{1} = 10; \quad \varepsilon_1 = 45; \quad \varepsilon_2 = 4,5.$$

$E, \text{кВ/м}$



a)

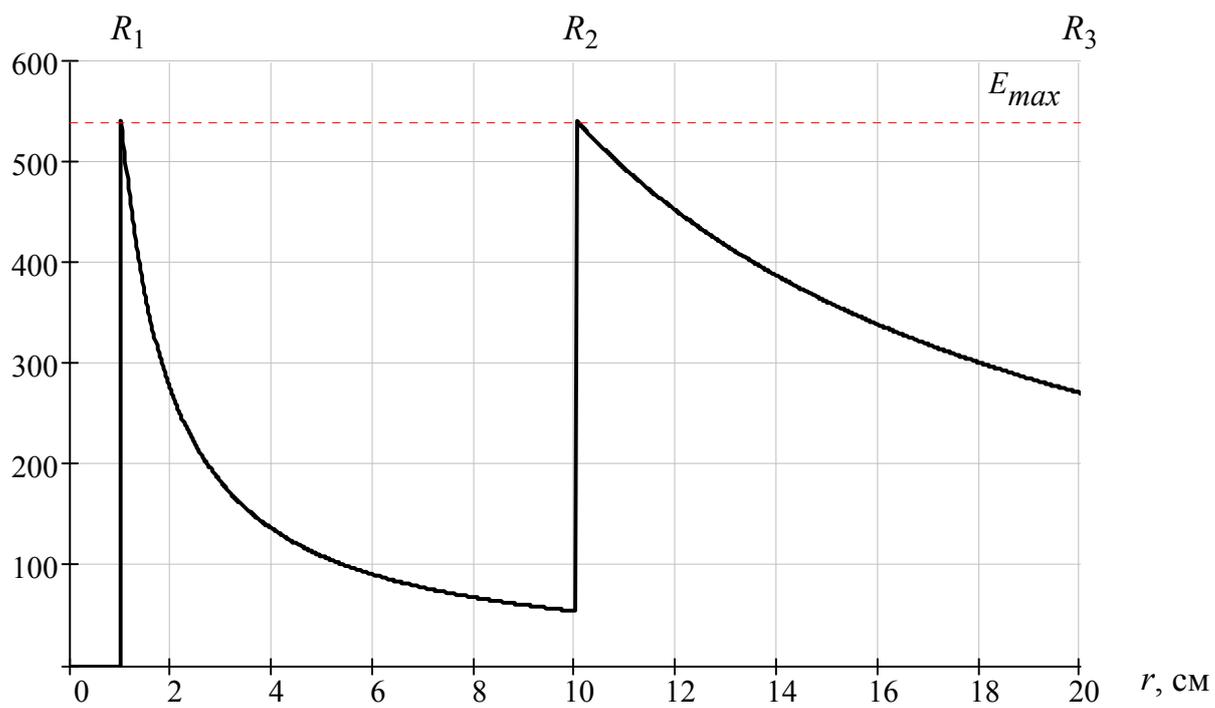
$\varphi, \text{кВ}$



б)

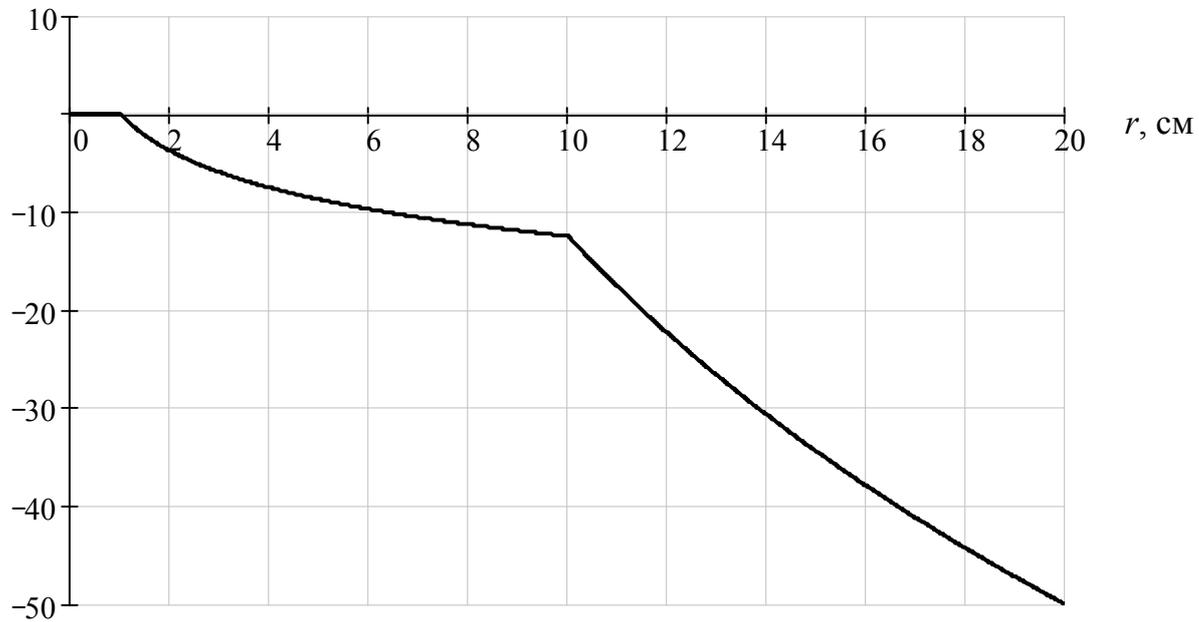
Рис. 3

$E, \text{кВ/м}$



a)

$\varphi, \text{кВ}$



б)

Рис. 4