Задание 1

Предприятие выпускает два вида продукции A_1 и A_2, используя при этом три вида сырья B_1, B_2 и B_3. Известны запасы сырья равные b_1, b_2 и b_3 соответственно. Расход сырья вида B_i на производство единицы продукции A_j равен $a_{i,j}$. Доход от реализации единицы продукции A_j составляет c_j условных единиц. Нормы расхода сырья каждого вида на изготовление единицы продукции данного вида приведены в табл. 1.1.

Требуется составить такой план производства продукции, при котором доход будет максимальным.

Решить задачу графическим методом.

Таблица 1.1

Нормы расхода сырья каждого вида на изготовление единицы продукции

Решение

Обозначим через x_1 и x_2 количество изделий первого и второго вида в плане предприятия. Поскольку производство продукции ограничено только сырьем каждого типа B_i, то получим условия:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 1\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \le 27 \\ 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \le 30 \\ 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \le 30 \end{cases}$$

Переменные x_1 и x_2 не могут быть отрицательными по смыслу задачи

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,\ 2.$$

Прибыль от реализации продукции

$$f\left(X\right) = c_1x_1 + c_2x_2 = 2x_1 + 2x_2 \to \max,$$

где $X = \left(x_1, x_2\right)$.

Получили стандартную модель с двумя переменными.

Решим задачу линейного программирования геометрически, придерживаясь следующего плана.

1. Строим прямые l_1, l_2, l_3:

l_1: $1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 27$, по двум точкам $A_1(27; 0)$ и $B_1(0; 9)$;

l_2: $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 30$, по двум точкам $A_2(10; 0)$, $B_2(0; 15)$;

l_3: $2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 30$, по двум точкам $A_3(15, 0)$, $B_3(0; 10)$.

2. Обратимся к неравенствам системы ограничений. Так как неравенства системы выполняются для любой точки из соответствующей полуплоскости, то их достаточно проверить дня какой-либо одной точки. Возьмём точку $O(0, 0)$ и подставим её координаты в неравенства системы. Если неравенство выполняется для точки $O(0, 0)$, то это неравенство определяет полуплоскость, содержащую точку $O(0, 0)$. Если неравенство не выполняется для точки $O(0, 0)$, то это неравенство определяет полуплоскость, не содержащую точку $O(0, 0)$. Отметим те полуплоскости, которые удовлетворяют неравенства системы.

3. Учтем на чертеже неотрицательность переменных x_1 и x_2, и получим многоугольник решений данной системы неравенств $O\,A_2\,X_{\max}\,C\,B_1$ (рис. 1).

4. Строим нормальный вектор $\vec{n} = \{c_1, c_2\} = \{2, 2\}$.

5. Строим прямую (l):

$$c_1 \cdot x_1 - c_2 \cdot x_2 = 0;\ 2x_1 - 2x_2 = 0,$$

перпендикулярную нормальному вектору.

6. Передвигая прямую (l) параллельным образом в направлении вектора $\vec{n}$. Максимальное значение целевая функция принимает в последней общей точке передвигаемой прямой и многоугольника допустимых решений.

Координаты этой точки находим как координаты точки пересечения прямых (l_2) и (l_3), решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & = & 30 \\ 2x_1 & +3x_2 & = & 30 \end{cases}$$

$$x_1 = 6;\ x_2 = 6$$

$$f_{\max} = f(6,6) = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = 24.$$

7. Запишем окончательный ответ:

$$X_{\max} = (6, 6),\ f_{\max} = f(X_{\max}) = 24.$$

Наибольшая прибыль будет равна 24 (ден. ед).

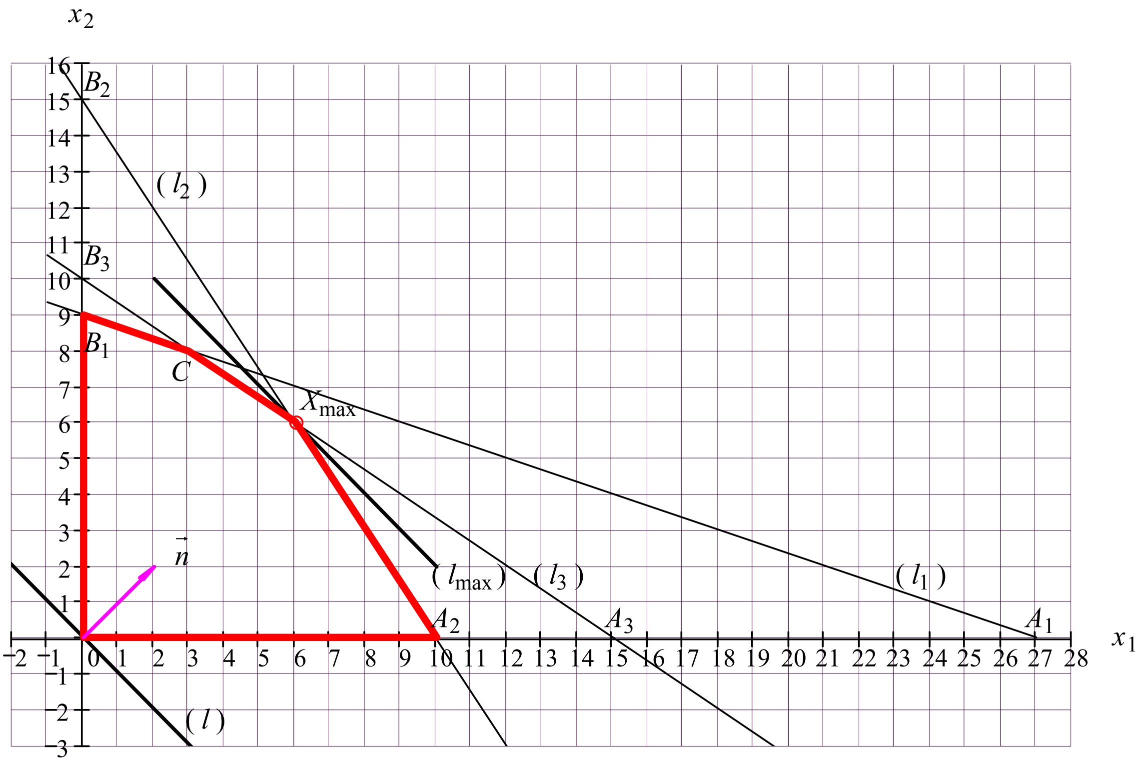

Рис. 1

Задание 2

На станциях A_i (i = 1, 2, 3) сосредоточен однородный груз в количестве a_i единиц груза, который требуется перевезти на станции назначения B_j (j = 1, .., 5) в соответствии с потребностями каждой станции в b_j единиц груза. Известны затраты c_{ij} на перевозку единицы груза с любой станции A_i на любую станцию B_j.

Требуется составить такой план перевозок, чтобы весь груз был вывезен, все потребности были бы удовлетворены, а суммарные затраты были бы минимальны.

Исходные данные приведены в табл. 2.1 и 2.2.

Таблица 2.1

Запасы и потребности на станциях – участниках процесса перевозок

Вар.	Запасы			Потребности				
	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	85	15	50	45	45	10	25	25

Таблица 2.2

Стоимости перевозки единицы груза

Вар.	c_{12}	c_{12}	c_{12}	c_{12}	c_{12}	c_{12}	c_{12}	c_{12}	c_{12}	c_{12}	c_{12}	c_{12}	c_{12}	c_{12}
	14	15	2	7	9	8	6	9	13	4	5	11	10	6

Решение

Запишем условие задачи в таблице 2.3.

Таблица 2.3

Поставщики	Потребители					Запас груза ai
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	14	15	2	7	9	85
A2	8	6	9	13	4	15
A3	5	11	10	6	23	50
Потребность в грузе bj	45	45	10	25	25	

Исходная задача является задачей закрытого типа, где суммарные запасы грузов поставщиков равны суммарным потребностям

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 150 = \sum_{j=1}^{5} b_j = 150 .$$

Составим для табл. 2.3 исходный опорный план по методу наименьшей стоимости.

Загрузка начинается с клетки, которой соответствует наименьший тариф c_{ij} из всей матрицы тарифов.

Выбираем в таблице клетку (1, 3) с наименьшей стоимостью и ставим в нее перевозку $\min\{85, 10\}=10$, закрыли третий столбец. В пункте A_1 осталось 85–10=75 ед.груза.

В оставшихся клетках выбираем клетку (2, 5) с наименьшей стоимостью. Ставим сюда перевозку, равную $\min\{15, 25\}=15$. Заполнена вторая строка. Пункту B_5 необходимо еще 25–15=10 ед. груза.

Далее ставим перевозку в клетку (3, 1). Она равна $\min\{50, 45\}=45$. Закрыли первый столбец, а в пункте A_3 осталось 50–45=5 ед.груза.

Минимальная стоимость в оставшихся клетках равна 6 для клетки (3, 4). Ставим туда перевозку $\min\{5, 20\}=5$. Заполнена третья строка. Пункту B_4 необходимо еще 25–5=20 ед. груза.

Минимальная стоимость в оставшихся клетках равна 7 для клетки (1, 4). Ставим туда перевозку $\min\{20, 75\}=20$, закрыли четвертый столбец. В пункте A_1 осталось 75–20=55 ед.груза.

Распределяем оставшийся запас поставщика A_1, составляющий 55 ед. груза, по потребителям B_2 (потребность 45 ед. груза) и B_5 (потребность 10 ед.груза). Заполнена вся таблица.

В таблице 2.4 получен невырожденный план. Условие $m + n - 1 = 7$ равно числу базисных клеток – выполняется.

Таблица 2.4

Поставщики	Потребители					Запас груза ai
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	14	15 45	2 10	7 20	9 10	85
A2	8	6	9	13	4 15	15
A3	5 45	11	10	6 5	23	50
Потребность в грузе bj	45	45	10	25	25	

Для определения потенциалов поставщиков и потребителей запишем систему уравнений для занятых клеток

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

Получим

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 15 \\ u_1 + v_3 = 2 \\ u_1 + v_4 = 7 \\ u_1 + v_5 = 9 \\ u_2 + v_5 = 4 \\ u_3 + v_1 = 5 \\ u_3 + v_4 = 6 \end{cases}$$

Поскольку число уравнений системы на единицу меньше числа потенциалов (система неопределенная), для её решения придадим потенциалу u_1 значение $u_1 = 0$. Все остальные потенциалы определяются однозначно: $u_2 = -5$, $u_3 = -1$, $v_1 = 6$, $v_2 = 15$, $v_3 = 2$, $v_4 = 7$, $v_5 = 9$.

Получим следующую таблицу.

Таблица 2.5

Потенциалы	6	15	2	7	9	Запасы
0	14	– 15 45	2 10	7 20	+ 9 10	85
-5	8	+ 6	9	13	– 4 15	15
-1	5 45	11	10	6 5	23	50
Потребности	45	45	10	25	25	

Определяем оценки свободных клеток

$$S_{ij} = c_{ij} - \left(u_i + v_j\right)$$

$S_{11} = 14 – (0 + 6) = 8$

$S_{21} = 8 – (-5 + 6) = 7$

$S_{22} = 6 – (-5 + 15) = -4$

$S_{23} = 9 – (-5 + 2) = 12$

$S_{24} = 13 – (-5 + 7) = 11$

$S_{32} = 11 – (-1 + 15) = -3$

$S_{33} = 10 – (-1 + 2) = 9$

$S_{35} = 23 – (-1 + 9) = 15$

Полученный план неоптимален. Среди оценок имеются отрицательные. Наибольшая невязка (нарушение) $\Delta = 4$ в клетке (2; 2). Строим замкнутый цикл для этой клетки. В таблице 2.5 он выделен штриховой линией. В отрицательных вершинах цикла наименьшее количество груза равно min(45, 15) = 15. Это количество вычитается из перевозок в вершинах помеченных "–" и прибавляется в вершинах помеченных "+".

Получаем новый план перевозок (табл. 2.6). Потенциалы поставщиков и потребителей определены непосредственно в табл. 2.6: $u_1 = 0$,$u_2 = -9$, $u_3 = -1$, $v_1 = 6$, $v_2 = 15$, $v_3 = 2$, $v_4 = 7$, $v_5 = 9$.

Таблица 2.6

Потенциалы	6	15	2	7	9	Запасы
0	14	– 15 30	2 10	+ 7 20	9 25	85
-9	8	6 15	9	13	4	15
-1	5 45	+ 11	10	– 6 5	23	50
Потребности	45	45	10	25	25	

Оценки свободных клеток следующие

$$S_{11} = 14 - (0 + 6) = 8$$
$$S_{21} = 8 - (-9 + 6) = 11$$
$$S_{23} = 9 - (-9 + 2) = 16$$
$$S_{24} = 13 - (-9 + 7) = 15$$
$$S_{25} = 4 - (-9 + 9) = 4$$
$$S_{32} = 11 - (-1 + 15) = -3$$
$$S_{33} = 10 - (-1 + 2) = 9$$
$$S_{35} = 23 - (-1 + 9) = 15$$

Поскольку имеется отрицательная оценка, то план перевозок ещё неоптимален. Наибольшая невязка (нарушение) $\Delta = 3$ в клетке (3; 2). Строим замкнутый цикл для этой клетки. В таблице 2.6 он выделен штриховой линией. В отрицательных вершинах цикла наименьшее количество груза равно min(30, 5) = 5. Это количество вычитается из перевозок в вершинах помеченных "–" и прибавляется в вершинах помеченных "+".

Получаем новый план перевозок (табл. 2.7). Потенциалы поставщиков и потребителей определены непосредственно в табл. 2.6: $u_1 = 0$,$u_2 = -9$, $u_3 = -4$, $v_1 = 9$, $v_2 = 15$, $v_3 = 2$, $v_4 = 7$, $v_5 = 9$.

Таблица 2.7

Потенциалы	9	15	2	7	9	Запасы
0	14	15 25	2 10	7 25	9 25	85
-9	8	6 15	9	13	4	15
-4	5 45	11 5	10	6	23	50
Потребности	45	45	10	25	25	

Оценки свободных клеток следующие

$$S_{11} = 14 - (0 + 9) = 5$$
$$S_{21} = 8 - (-9 + 9) = 8$$
$$S_{23} = 9 - (-9 + 2) = 16$$
$$S_{24} = 13 - (-9 + 7) = 15$$
$$S_{25} = 4 - (-9 + 9) = 4$$
$$S_{33} = 10 - (-4 + 2) = 12$$
$$S_{34} = 6 - (-4 + 7) = 3$$
$$S_{35} = 23 - (-4 + 9) = 18$$

Все оценки свободных клеток неотрицательны. Представленный в таблице 2.7 план перевозок оптимален. Так как среди оценок нет нулевых, то оптимальный план и единственный.

Вычисляем функцию цели

$$F(X_{опт}) = 25\cdot 15 + 10\cdot 2 + 25\cdot 7 + 25\cdot 9 + 15\cdot 6 + 45\cdot 5 + 5\cdot 11 = 1165 \text{ ден. ед.}$$

Ответ представим в виде

$$X_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 25 & 10 & 25 & 25 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 45 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ед. груза; } \quad F(X_{опт}) = 1165 \text{ ден. ед.}$$

Задание 3

Дана матрица переходных вероятностей марковской цепи с дискретным временем, требуется

а) составить граф марковской цепи;

б) найти вероятности переходов из одного состояния в другое за два шага;

в) определить стационарные и финальные вероятности состояний системы.

Решение

1 Однородную марковскую цепь принято изображать в виде размеченного графа состояний (рис. 1).

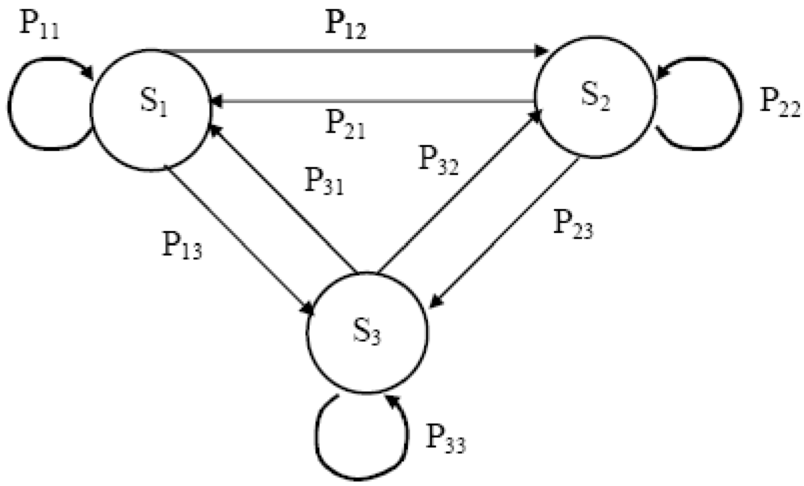

Рис. 1

Составим граф состояний (рис. 2) для матрицы вероятностей переходов

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

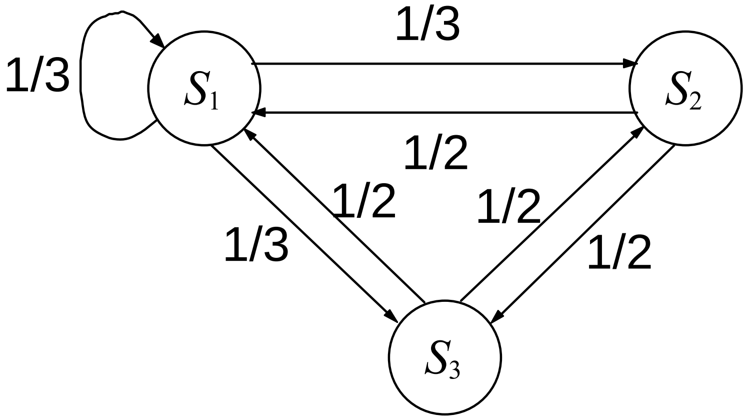

Рис. 2

Состояние S_i называется *существенным*, если нет другого состояния S_j такого, что, перейдя однажды каким-то способом из S_i в S_j, система уже не может вернуться в S_i.

По графу (рис. 2) видно, что все состояния существенны (между состояниями S_1 – S_2, S_1 – S_3 и S_2 – S_3 существуют прямые переходы), поэтому цепь *регулярна*.

2 Найдем вероятности переходов из одного состояния в другое за два шага

$$P(2) = P(1)\cdot P(1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot 0 \\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} & 0\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 0 \\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 0 & \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 0 & 0\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{18} & \frac{5}{18} \\ \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{6} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}.$$

3 Найдем стационарное распределение вероятностей.

Стационарное распределение вероятностей удовлетворяет следующему матричному уравнению

$$(p_1,\ p_2,\ p_3)\cdot\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}=(p_1,\ p_2,\ p_3)$$

или системе уравнений

$$\begin{cases} p_1\cdot p_{11}+p_2\cdot p_{21}+p_3\cdot p_{31}=p_1 \\ p_1\cdot p_{12}+p_2\cdot p_{22}+p_3\cdot p_{32}=p_2 \\ p_1\cdot p_{13}+p_2\cdot p_{23}+p_3\cdot p_{33}=p_3 \end{cases} \qquad (1)$$

Данная система линейно зависима, так как выполняется условие для стационарных вероятностей

$$p_1+p_2+p_3=1. \qquad (2)$$

Следовательно, при решении системы уравнений (1) отбросим одно из уравнений системы и добавим условие (2)

$$\begin{cases} p_1\cdot p_{11}+p_2\cdot p_{21}+p_3\cdot p_{31}=p_1 \\ p_1\cdot p_{12}+p_2\cdot p_{22}+p_3\cdot p_{32}=p_2 \\ p_1+p_2+p_3=1 \end{cases}$$

Приведя все уравнения к стандартному виду, получим

$$\begin{cases} \frac{-2}{3}\cdot p1+\frac{1}{2}\cdot p2+\frac{1}{2}\cdot p3=0 \\ \frac{1}{3}\cdot p1-p2+\frac{1}{2}\cdot p3=0 \\ p1+p2+p3=1 \end{cases} \qquad (3)$$

Решаем полученную систему (3) методом определителей

$$\Delta=\left|\begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right|=\frac{7}{4}$$

$$\Delta_1=\left|\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right|=\frac{3}{4}$$

$$\Delta_2 = \left|\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\Delta_3 = \left|\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}$$

$$p_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{4}} = \frac{3}{7}$$

$$p_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{4}} = \frac{2}{7}$$

$$p_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{4}} = \frac{2}{7}$$

Тогда стационарные вероятности состояний системы

$$Q_{стац} = \left(\frac{3}{7};\ \frac{2}{7};\ \frac{2}{7}\right).$$

Так как исследуемая марковская цепь регулярна, то предельные вероятности совпадают со стационарными

$$\tilde{p}_1 = \frac{3}{7};\ \tilde{p}_2 = \frac{2}{7};\ \tilde{p}_3 = \frac{2}{7}.$$

Вероятности всех трех состояний меняются на каждом шаге процесса, но сумма

$$p_1 + p_2 + p_3 = \frac{3}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = 1$$

остается неизменной.

***Задание* 4**

Задана матрица интенсивностей переходов непрерывной цепи Маркова Λ, требуется:

а) составить размеченный граф состояний системы, соответствующий этой матрице;

б) записать систему дифференциальных уравнений Колмогорова;

в) найти стационарное и финальное распределение вероятностей состояний.

Решение

1 Марковскую цепь с непрерывным временем можно изображать *размеченным графом состояний* (рис. 1).

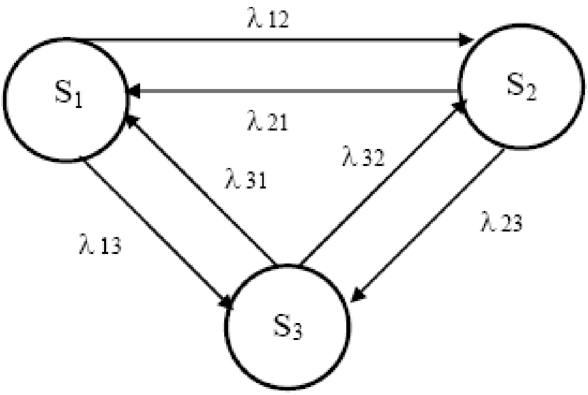

Рис. 1

Составим граф состояний (рис. 2) для матрицы интенсивностей переходов

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

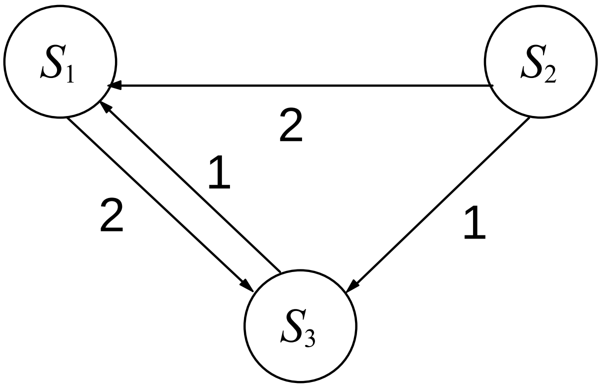

Рис. 2

Состояние S_i называется *существенным*, если нет другого состояния S_j такого, что, перейдя однажды каким-то способом из S_i в S_j, система уже не может вернуться в S_i.

По графу (рис. 2) видно, что состояния S_1 и S_3 существенны (между состояниями S_1 и S_3 существуют прямые переходы). Состояние S_2 несущественное, так как выйдя из этого состояния в состояние S_1 или S_3 система не может уже вернуться обратно в состояние S_2. Поэтому цепь *нерегулярна*.

2 Составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\left(p_1'(t),\, p_2'(t),\, p_3'(t)\right)=\left(p_1(t),\, p_2(t),\, p_3(t)\right)\cdot\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23}\\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33}\end{pmatrix}$$

Тогда получим

$$\begin{cases}p_1' = \lambda_{11}p_1 + \lambda_{21}p_2 + \lambda_{31}p_3\\ p_2' = \lambda_{12}p_1 + \lambda_{22}p_2 + \lambda_{32}p_3\\ p_3' = \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2 + \lambda_{33}p_3\end{cases}$$

Или для заданной матрицы интенсивностей переходов

$$\begin{cases}p_1' = -2p_1 + 2p_2 + p_3\\ p_2' = \qquad -3p_2\\ p_3' = 2p_1 + p_2 - p_3\end{cases}$$

3 Найдем стационарное вероятности, полагая что

$$p_1' = 0,\ p_2' = 0,\ p_3' = 0.$$

Получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}-2p_1 + 2p_2 + p_3 = 0\\ p_2 = 0\\ 2p_1 + p_2 - p_3 = 0\end{cases}$$

или

$$p_2 = 0$$

$$\begin{cases}-2p_1 + p_3 = 0\\ 2p_1 - p_3 = 0\end{cases}$$

Отбросим последнее уравнение системы (вытекает из первого уравнения) и присоединим к системе уравнений условие нормировки

$$p_2 = 0$$

$$\begin{cases}-2p_1 + p_3 = 0\\ p_1 + p_2 = 1\end{cases}$$

Решение полученной системы дает стационарные вероятности системы

$$Q = \left(\frac{1}{3};\ 0;\ \frac{2}{3} \right).$$

При *конечном* числе состояний ($n = 3$) для существования финальных вероятностей необходимо и достаточно , чтобы из каждого существенного состояния можно было перейти в каждое другое существенное состояние.

Этом условию удовлетворяет граф состояний (рис. 2). Тогда финальные (предельные) вероятности

$$\tilde{p}_1 = \frac{1}{3};\ \tilde{p}_2 = 0;\ \tilde{p}_3 = \frac{2}{3}.$$

По условию нормировки сумма вероятностей всех трех состояний системы

$$p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{3} + 0 + \frac{2}{3} = 1.$$

Задание **5**

Системы массового обслуживания с отказами

АТС имеет 4 линии связи. Поток вызовов простейший с интенсивностью λ вызовов в минуту. Время переговоров распределено по показательному закону, среднее время составляет t мин ($\bar{t}_{обсл}$). Информация об исходных данных приведена в таблице 5.1.

Таблица 5.1

Вар.	
λ, 1/мин	0.9
t, мин	2.9

1. Описать состояния СМО, построить граф состояний.

2. Найти предельные вероятности состояний системы. Найти показатели эффективности работы АТС, проанализировать эти показатели.

3. Изучить зависимость среднего числа занятых каналов и абсолютной пропускной способности АТС от интенсивности входного потока, зависимости представить в виде таблиц и графиков.

4. Определить, сколько линий должна иметь АТС, чтобы вероятность отказа не превышала 0,01.

5. Содержание каждого канала в месяц обходится в 10 тыс. усл. ед. Каждая обслуженная заявка приносит доход в 1,5 усл. ед. Определить, приносит ли АТС доход от обслуживания всех заявок? Каким должно быть число каналов, чтобы доход был максимальным?

Решение

1 Обозначим S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 – состояния СМО:

S_0 – в системе все каналы свободны;
S_1 – один канал занят, 3 − свободны;
S_2 – два канала заняты, 2 − свободны;
S_3 – три канала заняты, 1 − свободен;
S_4 - все четыре канала заняты.
Следующая заявка, поступившая в СМО, получает отказ.

Граф системы массового обслуживания имеет вид

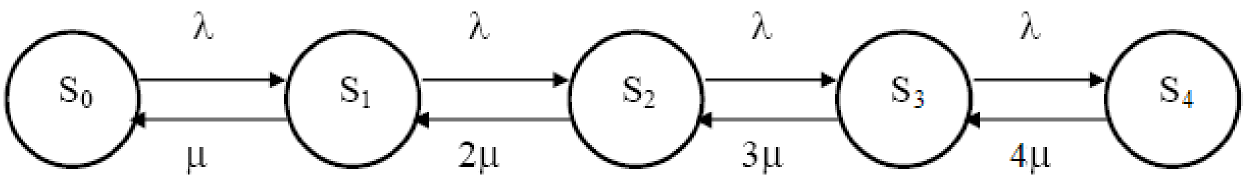

Рис. 1

2 Из условия задачи известно

интенсивность потока вызовов (поток заявок)

$$\lambda = 0.9 \text{ 1/мин};$$

среднее время обслуживания

$$\bar{t}_{обсл} = 2.9 \text{ мин}.$$

Тогда параметры системы

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{обсл}} = \frac{1}{2.6} \approx 0.34483 \text{ 1/мин}; \;\; \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot \bar{t}_{обсл} = 0.9 \cdot 2.9 = 2.61.$$

Находим предельные вероятности.

Вероятность, что все линии свободны (система в состоянии S_0)

$$p_0 = \left(\sum_{i=0}^{4} \frac{\rho^i}{i!} \right)^{-1} = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{4!} \right)^{-1} =$$

$$= \left(1 + 2.61 + \frac{2.61^2}{2} + \frac{2.61^3}{6} + \frac{2.61^4}{24} \right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{11.9128} = 0.083943.$$

Вероятности состояний системы S_i находим по формуле

$$p_i = p_0 \frac{\rho^i}{i!},$$

где $i = 1, 2, 3, 4$.

Тогда

$$p_1 = p_0 \frac{\rho^1}{1!} = 0.083943 \frac{2.61^1}{1!} = 0.2191;$$

$$p_2 = p_0 \frac{\rho^2}{2!} = 0.083943 \frac{2.61^2}{2} = 0.2859;$$

$$p_3 = p_0 \frac{\rho^3}{3!} = 0.083943 \frac{2.61^3}{6} = 0.2487;$$

$$p_4 = p_0 \frac{\rho^4}{4!} = 0.083943 \frac{2.61^4}{24} = 0.1623.$$

Показатели эффективности работы АТС.

Вероятность отказа

$$P_{отк} = p_4 = 0.1623.$$

Вероятность обслуживания поступившей заявки

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - 0.1623 = 0.8377.$$

Среднее число заявок, обслуживаемое в единицу времени

$$A = \lambda \cdot Q = 0.9 \cdot 0.8377 = 0.754 \text{ 1/мин}.$$

Среднее число занятых каналов

$$\bar{z}_{сист} = \bar{k} = \rho \cdot Q = 2.61 \cdot 0.8377 = 2.19.$$

Время нахождения заявки в системе

$$\bar{t}_{сист} = \frac{\bar{z}_{сист}}{\lambda} = \frac{2.19}{0.9} = 2.43 \text{ мин}.$$

Результаты расчетов позволяют сделать вывод, что при достаточно высокой вероятности отказа 16% (примерно каждая пятая заявка), загруженность АТС составляет около 55% каналов.

3 Зависимость среднего числа занятых каналов и абсолютной пропускной способности АТС от интенсивности входного потока.

Таблица 5.2

Зависимость среднего числа занятых каналов и абсолютной пропускной способности АТС от интенсивности входного потока

λ 1/мин	0,5	1	2	4	7	15	50	200
Q	0,9561	0,8051	0,5435	0,3107	0,1864	0,0897	0,0274	0,0069
$\bar{k} = (\lambda / \mu) \cdot Q$	1,39	2,33	3,15	3,60	3,78	3,90	3,97	3,99
$A = \lambda \cdot Q$ 1/мин	0,48	0,81	1,09	1,24	1,31	1,35	1,37	1,38

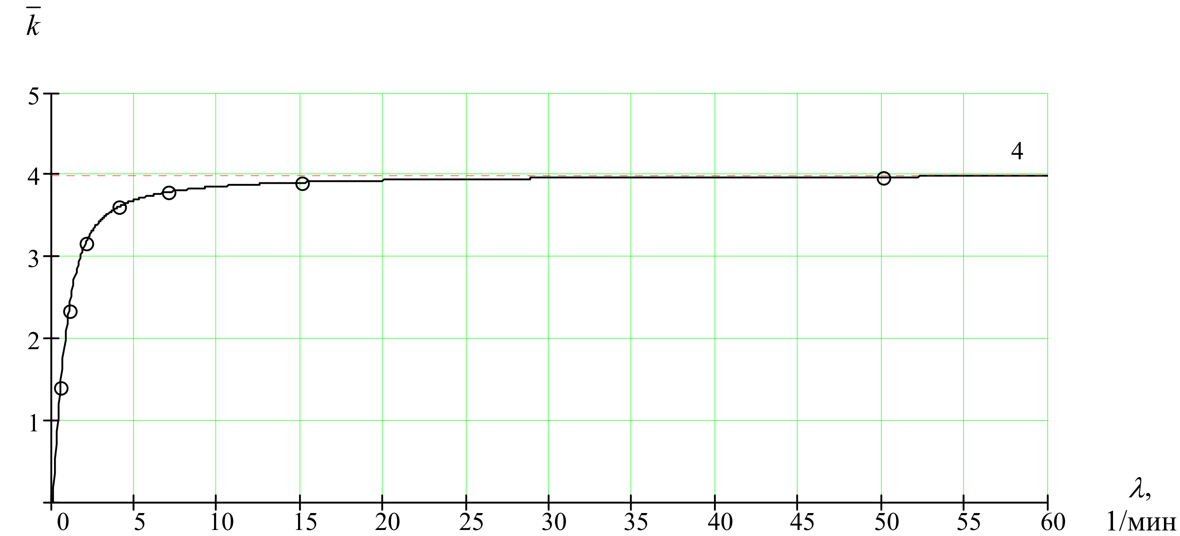

Рис. 2 Зависимость среднего числа занятых каналов АТС от интенсивности входного потока

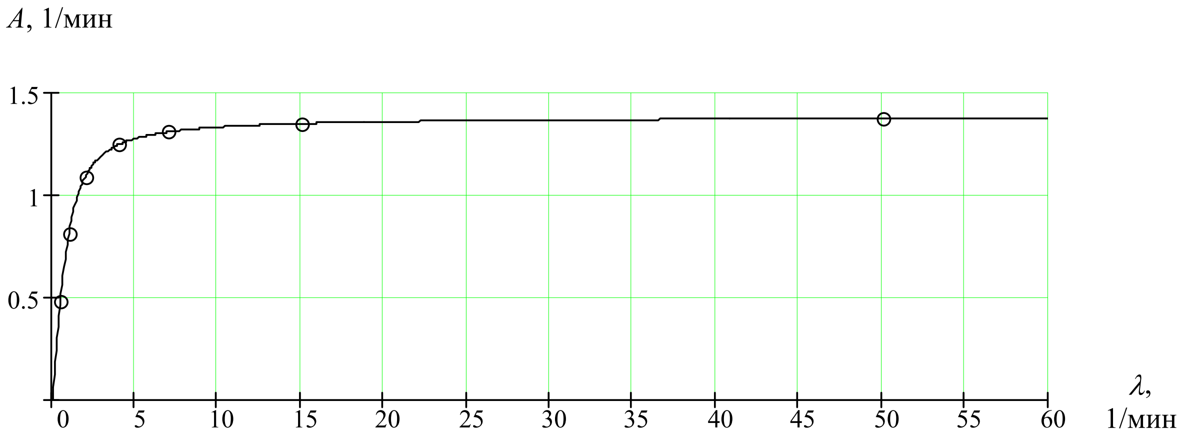

Рис. 3 Зависимость абсолютной пропускной способности АТС от интенсивности входного потока

Из таблиц и графиков следует, что обе рассматриваемые величины с ростом интенсивности входного потока возрастают, стремясь к некоторым предельным значениям. При этом среднее число занятых каналов стремится к полному числу каналов в

СМО (n = 4), а пропускная способность − к некоторой величине, больше которой при данном числе каналов и среднем времени обслуживания АТС пропускать не может. Отметим, что фактически при больших λ СМО не работает из-за неприемлемых значений $P_{отк}$ (так при $\lambda = 200$, $P_{отк} = 0.99$).

4 Так как по условию мы можем менять лишь один параметр (число каналов), то, задавая значения n = 5, 6, 7, 8…, получим значения для $P_{отк}$ в табл. 5.3.

Таблица 5.3

Зависимость вероятности отказа от числа линий связи

n	5	6	7	8
Ротк	0,0781	0,0329	0,0121	0,0039

Следовательно, для того чтобы $P_{отк} < 0{,}01$, достаточно использовать 8 каналов.

5 На АТС обслуживается в среднем $A = 0.754$ (заяв./мин) с доходом $d = 1.5$ усл. ед., тогда прибыль за одну минуту

$$D = d \cdot A = 1.5 \cdot 0.754 = 1.131 \text{ усл.ед./мин},$$

а суммарный доход за месяц

$$D_m = D \cdot 60 \cdot 24 \cdot 30 = 1.131 \cdot 43200 = 48900 \text{ усл.ед.}$$

На содержание 4 каналов требуется 40000 усл. ед., а доход от четырех каналов 48900 усл. ед., значит предприятие *рентабельно*.

Рентабельность АТС

$$P = \frac{\textit{Чистая прибыль}}{\textit{Себестоимость}} 100\% = \frac{48900 - 40000}{40000} 100\% = 18\%.$$

Задание 6

Системы массового обслуживания с очередями

В приемно-отправочный парк станции поступает простейший поток поездов со средней интенсивностью λ составов в час.

Одна бригада осмотрщиков обрабатывает состав со средней продолжительностью t мин ($\bar{t}_{обсл}$). Время обработки распределено по показательному закону. Очередь не ограничена.

Исходные данные приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Вар.	
λ, 1/час	**3.0**
t, мин	**15**

1. Описать состояния системы, построить граф состояний.

2. Найти вероятности состояний для стационарного случая и показатели эффективности работы бригады осмотрщиков. Оценить эффективность работы бригады.

3. Известно, что в летние месяцы интенсивность потока составов возрастает вдвое, время осмотра также возрастает в 1,5 раза за счет увеличения длины состава. Определить необходимое число бригад для нормальной работы станции.

Решение

1 Запишем состояния СМО (состояния пронумерованы по числу составов в приемно-отправочном парке):

S_0 – составов в приемно-отправочном парке нет;
S_1 – бригада занята обслуживанием состава, очереди нет;
S_2 – бригада занята обслуживанием состава, один состав в очереди;
. . . .
S_n – бригада занята обслуживанием состава, n–1 состав в очереди и так далее.

Теоретически число состояний не ограничено (бесконечно). Граф состояний показан на рисунке 1.

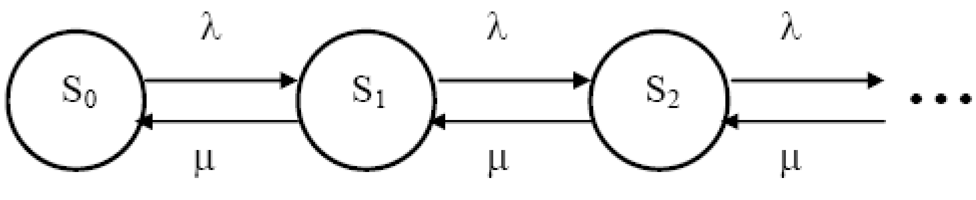

Рис. 1

2 Из условия задачи известно

интенсивность потока поездов

$$\lambda = 3.0 \text{ сост./час};$$

среднее время обслуживания

$$\bar{t}_{обсл} = 15 \text{ мин} = 1/4 \text{ час}.$$

Тогда параметры системы

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{обсл}} = \frac{1}{1/4} = 4 \ \text{1/час}; \ \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot \bar{t}_{обсл} = 3.0 \cdot \frac{1}{4} = 0.75 < 1 .$$

Находим предельные вероятности.

Вероятность, что составов в приемно-отправочном парке нет и бригада свободна (система в состоянии S_0)

$$p_0 = 1 - \rho = 1 - 0.75 = 0.25 .$$

Вероятности состояний системы S_i (бригада занята обслуживанием состава) находим по формуле

$$p_i = \rho^i \cdot p_0 ,$$

где $i = 1, 2, \dots$.

Показатели эффективности работы.

Вероятность отказа в обслуживании состава

$$P_{отк} = 0 .$$

Вероятность обслуживания поступившего состава

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 .$$

Среднее число составов в приемно-отправочном парке, обслуживаемое в единицу времени (абсолютная пропускная способность приемно-отправочного парка)

$$A = \lambda = 3.0 \ \text{сост./час}.$$

Средняя загрузка бригады

$$\bar{k} = \rho = 0.75 \ \text{или } 75\%.$$

Среднее число составов обслуживаемых или ожидающих очереди

$$\bar{z}_{сист} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.75}{0.25} = 3 .$$

Среднее число составов в очереди

$$\bar{r}_O = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0.75^2}{0.25} = 2.25 .$$

Среднее время пребывания состава в очереди на обслуживание

$$\bar{t}_O = \frac{\bar{r}_O}{\lambda} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)} = \frac{0.75^2}{3.0 \cdot 0.25} = 0.75 \ \text{час} = 45 \ \text{мин}.$$

Время нахождения состава в приемно-отправочном парке

$$\bar{t}_{сист} = \bar{t}_{обсл} + \bar{t}_O = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{0.75}{3.0 \cdot 0.25} = 1 \ \text{час} = 60 \ \text{мин}.$$

Результаты расчетов позволяют сделать вывод, что при загрузке бригады 75%, время нахождения состава в приемно-отправочном парке составляет 60 мин, из которых 45 мин – ожидание в очереди на обслуживание состава.

3 В летние месяцы

интенсивность потока поездов

$$\lambda = 2 \cdot 3.0 = 6.0 \text{ сост./час;}$$

среднее время обслуживания

$$\bar{t}_{обсл} = 1.5 \cdot 15 \text{ мин} = 0.375 \text{ час.}$$

Для нормальной работы станции необходимо выполнение условия

$$\rho = \lambda \cdot \bar{t}_{обсл} < 1.$$

Находим

$$\rho = \lambda \cdot \bar{t}_{обсл} = 6.0 \cdot 0.375 = 2.25 > 1.$$

Необходимы дополнительные бригады, так как очередь из составов на обслуживание с одной бригадой будет неограниченно расти.

Рассмотрим n-канальную систему с неограниченной очередью. Для существования финальных вероятностей необходимо выполнение условия

$$\frac{\rho}{n} < 1.$$

Откуда минимальное число бригад $n = 3$.

Предельные вероятности. Вероятность, что составов в приемно-отправочном парке нет

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n! \cdot (1 - \rho/n)} \right]^{-1} = 0.074766.$$

Показатели эффективности работы. Среднее число составов в очереди

$$\bar{r}_O = \frac{\rho^{n+1}}{n! \cdot n \cdot \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} \cdot p_0 = 1.703.$$

Среднее время пребывания состава в очереди на обслуживание

$$\bar{t}_O = \frac{\bar{r}_O}{\lambda} = 0.284 \text{ час} = 17 \text{ мин.}$$

Результаты расчетов для трех обслуживающих бригад позволяют сделать вывод, что время нахождения состава в приемно-отправочном парке составляет 40 мин, из которых 17 мин – ожидание в очереди на обслуживание состава.

Список литературы

1. Введение в исследование операций / Х. Таха. Т.1. – М.: Мир, 1985.

2. Линейное программирование: методическое руководство / А.И. Недвецкая, М.А. Толмачева. – Свердловск, 1985.

3. Экономико-математические модели управления: метод. руководство / Г.А.Тимофеева. − Екатеринбург, 2000.

4. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: учеб. для вузов / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – М.: Дело, 2001.

5. Транспортная задача линейного программирования: метод. руководство / П.П. Скачков, И.Н. Пирогова. − Екатеринбург, 2004.

6. Линейное программирование: метод. указания / П.И. Гниломедов, И.Н. Пирогова, П.П.Скачков. − Екатеринбург, 2007.

7. Математические модели массового обслуживания: метод. руководство / Т.В. Величко, П.П. Скачков, Г.А. Тимофеева. – Екатеринбург, 2004.