

Расчет переходного процесса в цепи с распределенными параметрами

Задана цепь, состоящая из двух воздушных линий с различными волновыми сопротивлениями (рис. 1).

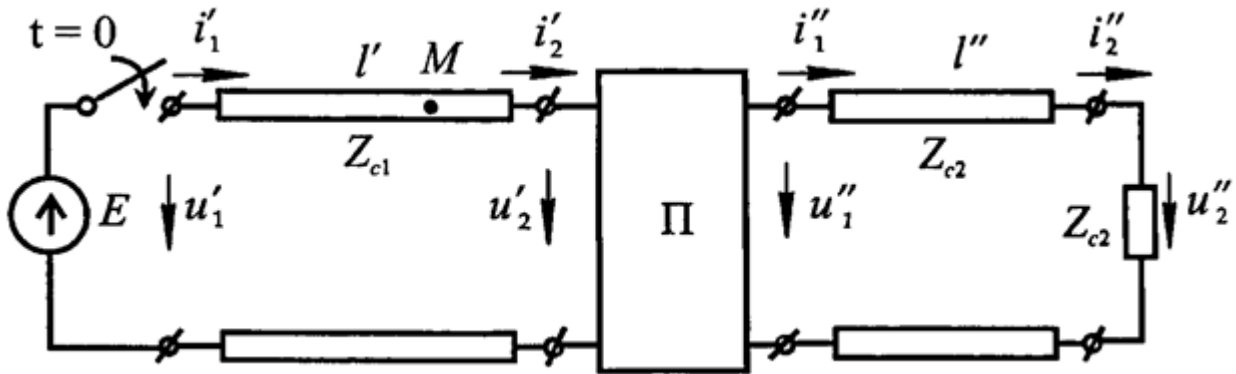


Рис. 1. Исходная схема

В точке соединения линий включен четырехполюсник из элементов с сосредоточенными параметрами. В момент времени $t = 0$ первая линия подключается к источнику $E = 10$ кВ. Длина первой линии $l' = 400$ км, второй $l'' = 300$ км. Вторая линия нагружена на сопротивление, равное Z_{c2} .

Схема четырехполюсника приведена на рис. 2.

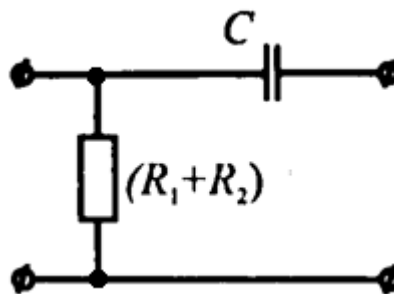


Рис. 2. Вариант схемы четырехполюсника

Числовые данные приведены в табл. 1.

Таблица 1

№	Z_{c1} , Ом	Z_{c2} , Ом	R_1 , Ом	R_2 , Ом	C , мкФ	L , мГн
	500	300	100	200	2	—

Примечание: скорость движения волн по обеим воздушным линиям принять равной $V = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Содержание работы

1. Рассчитать падающие волны напряжения и тока, возникающие на первой линии, после подключения ее к источнику.
2. Пользуясь классическим или операторным методом, найти отраженные и преломленные волны напряжения и тока, возникающие в точке соединения двух линий.
3. Построить кривые распределения напряжения и тока вдоль обеих линий в момент времени, когда преломленные волны достигнут конца второй линии. Расчетные точки выбрать с шагом 50 км.
4. Построить кривые изменения напряжения и тока в функции времени в точке M первой линии, отстоящей от начала на расстоянии 300 км, для интервала времени 0 – 3,5 мс.

1. Расчет падающих волн в первой линии

$$u'_{na\partial} = E = 10000 \text{ В}; \quad i'_{na\partial} = \frac{u'_{na\partial}}{Z_{c1}} = \frac{10000}{500} = 20 \text{ А.}$$

2. Определение тока и напряжения на входе и выходе четырехполюсника

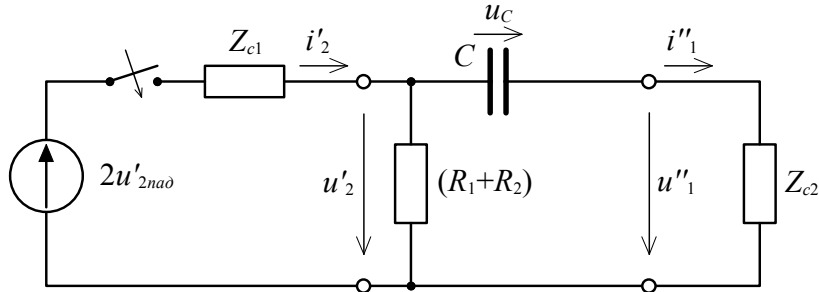


Рис. 3. Схема для расчета п/п на четырехполюснике

Рубильник замыкается в момент времени

$$t_0 = \frac{l'}{V} = \frac{400 \text{ км}}{300 \frac{\text{км}}{\text{мс}}} = 1.333 \text{ мс}; \quad \theta = t - t_0; \quad u'_{2na\partial} = u'_{na\partial} = E.$$

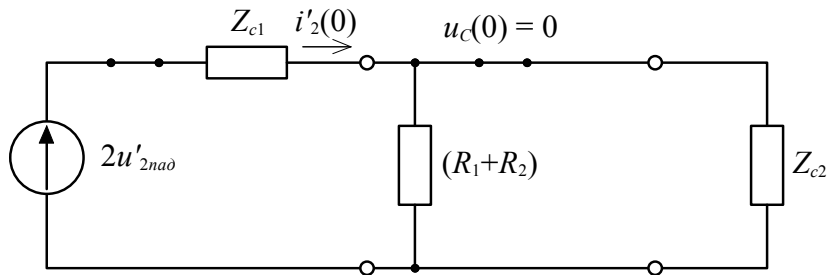


Рис. 4. Схема цепи для момента времени $t_0 = 0$

Так как $u_C(0) = 0$, то ток на входе четырехполюсника (рис. 4)

$$i'_2(0) = \frac{2E}{Z_{c1} + \frac{(R_1 + R_2) \cdot Z_{c2}}{(R_1 + R_2) + Z_{c2}}} = \frac{2 \cdot 10000}{500 + \frac{300 \cdot 300}{300 + 300}} = 30.7692 \text{ А.}$$

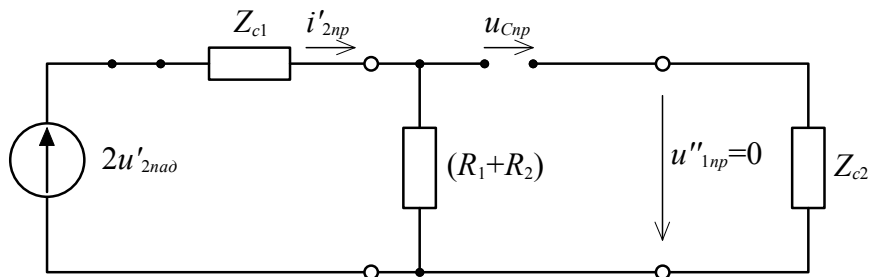


Рис. 5. Принужденный режим

В принужденном режиме (рис. 5)

$$i'_{2np} = \frac{2E}{Z_{c1} + (R_1 + R_2)} = \frac{2 \cdot 10000}{500 + (100 + 200)} = 25 \text{ A};$$

$$u_{Cnp} = i'_{2np} \cdot (R_1 + R_2) = 25 \cdot (100 + 200) = 7500 \text{ В.}$$

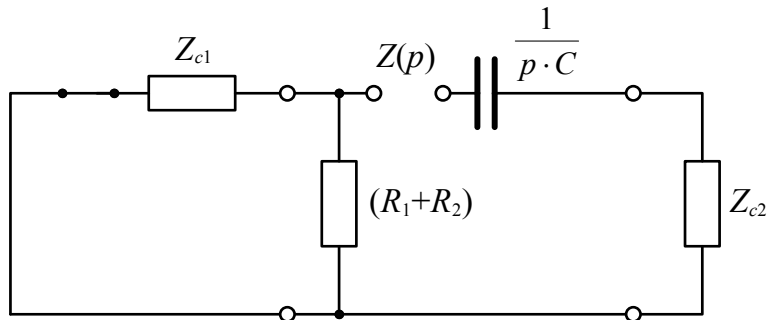


Рис. 6. Характеристическое сопротивление

Характеристическое уравнение

$$Z(p) = \frac{1}{p \cdot C} + Z_{\text{э}} = 0,$$

где эквивалентное сопротивление (рис. 6)

$$Z_{\text{э}} = Z_{c2} + \frac{Z_{c1} \cdot (R_1 + R_2)}{Z_{c1} + (R_1 + R_2)} = 300 + \frac{500 \cdot 300}{500 + 300} = 487.5 \text{ Ом.}$$

Корень характеристического уравнения

$$p_1 = -\frac{1}{Z_{\text{э}} \cdot C} = -\frac{1}{487.5 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = -1025.6 \text{ с}^{-1}.$$

Ток в конце первой линии

$$i'_2(\theta) = i'_{2np} + A \cdot e^{p_1 \cdot \theta},$$

где постоянная интегрирования

$$A = i'_2(0) - i'_{2np} = 30.769 - 25 = 5.769 \text{ А.}$$

Получим

$$i'_2(\theta) = i'_{2np} + A \cdot e^{p_1 \cdot \theta} = 25 + 5.769 \cdot e^{p_1 \cdot \theta} \text{ А.}$$

Напряжение в конце первой линии

$$u'_2(\theta) = 2E - i'_2 \cdot Z_{c1} = 7500 - 2885 \cdot e^{p_1 \cdot \theta} \text{ В.}$$

Напряжение на конденсаторе

$$u_C(\theta) = u_{Cnp} + B \cdot e^{p_1 \cdot \theta},$$

где постоянная интегрирования

$$B = u_C(0) - u_{Cnp} = 0 - 7500 = -7500 \text{ В.}$$

Получим

$$u_C(\theta) = u_{Cnp} + B \cdot e^{p_1 \cdot \theta} = 7500 - 7500 \cdot e^{p_1 \cdot \theta} \text{ В.}$$

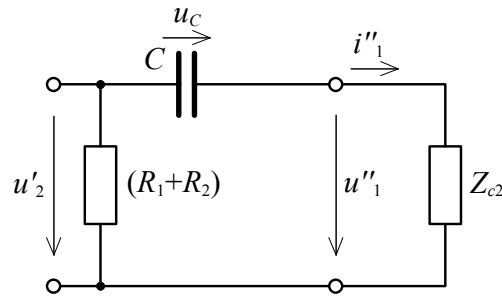


Рис. 7. Напряжение и ток в начале второй линии

Для четырехполюсника (рис. 7)

$$u_1'' = u_2' - u_C; \quad i_1'' = \frac{u_1''}{Z_{c2}}.$$

Напряжение и ток в начале второй линии

$$u_1''(\theta) = 4615 \cdot e^{p_1 \cdot \theta} \text{ В;}$$

$$i_1''(\theta) = \frac{u_1''(\theta)}{Z_{c2}} = 15.385 \cdot e^{p_1 \cdot \theta} \text{ А.}$$

3. Расчет отраженных волн в первой линии

Для первой линии отраженные волны напряжения и тока, распространяются от конца линии к началу [$u'_{omp}(\theta, Y')$ и $i'_{omp}(\theta, Y')$], где Y' – расстояние от конца первой линии.

При источнике постоянного напряжения

$$u'_{nad} = E; \quad i'_{nad} = \frac{E}{Z_{c1}} = I_0.$$

Напряжение отраженной волны в точке подключения четырехполюсника

$$u'_{2omp}(\theta) = u'_2(\theta) - u'_{nad} = u'_2(\theta) - E.$$

Напряжение отраженной волны для координаты Y'

$$u'_{omp}(\theta, Y') = u'_2(\theta, Y') - E.$$

Тогда напряжение в первой линии находится как сумма падающих и отраженных волн

$$u'(\theta, Y') = u'_{nad} + u'_{omp}(\theta, Y') = E + (u'_2(\theta, Y') - E) = u'_2(\theta, Y').$$

Для тока отраженная волна

$$i'_{2omp}(\theta) = i'_{nad} - i'_2(\theta) = I_0 - i'_2(\theta).$$

Ток отраженной волны для координаты Y'

$$i'_{omp}(\theta, Y') = I_0 - i'_2(\theta, Y').$$

Тогда ток в первой линии находится как разность падающих и отраженных волн

$$i'(\theta, Y') = i'_{nad} - i'_{omp}(\theta, Y') = I_0 - (I_0 - i'_2(\theta, Y')) = i'_2(\theta, Y').$$

Таким образом, чтобы найти полные значения тока и напряжения в первой линии достаточно в выражениях $u'_2(\theta)$ и $i'_2(\theta)$ заменить

$$\theta \rightarrow \theta - \frac{Y'}{V}.$$

Поэтому полные значения тока и напряжения в первой линии

$$i'(\theta, Y') = 25 + 5.769 \cdot e^{p_I \cdot \left(\theta - \frac{Y'}{V} \right)} \text{ А};$$

$$u'(\theta, Y') = 7500 - 2885 \cdot e^{p_I \cdot \left(\theta - \frac{Y'}{V} \right)} \text{ В}.$$

Напряжение и ток в начале второй линии $u''_1(\theta)$ и $i''_1(\theta)$ являются падающими волнами в ней, поэтому, если ввести дополнительную координату X'' – расстояние текущей точки от начала второй линии, то можно записать для этой текущей координаты X''

$$i'' \left(\theta - \frac{X''}{V} \right) = 15.385 \cdot e^{pI \cdot \left(\theta - \frac{X''}{V} \right)} \text{ А};$$

$$u'' \left(\theta - \frac{X''}{V} \right) = 4615 \cdot e^{pI \cdot \left(\theta - \frac{X''}{V} \right)} \text{ В}.$$

Введем единые переменные t и X (расстояние от начала первой линии)

$$\theta = t - t_0; Y' = l' - X; X'' = X - l'; t_0 = \frac{l'}{V}.$$

Тогда

$$\theta - \frac{Y'}{V} = (t - t_0) - \frac{l' - X}{V} = t - 2t_0 + \frac{X}{V};$$

$$\theta - \frac{X''}{V} = (t - t_0) - \frac{X - l'}{V} = t - \frac{X}{V}.$$

Отсюда

$$\left\{ \begin{array}{l} i' = 25 + 5.769 \cdot e^{-1.026 \cdot \left(t - 2.667 + \frac{X}{300} \right)} \text{ А}; \\ u' = 7500 - 2885 \cdot e^{-1.026 \cdot \left(t - 2.667 + \frac{X}{300} \right)} \text{ В}; \\ i'' = 15.385 \cdot e^{-1.026 \cdot \left(t - \frac{X}{300} \right)} \text{ А}; \\ u'' = 4615 \cdot e^{-1.026 \cdot \left(t - \frac{X}{300} \right)} \text{ В}, \end{array} \right. \quad (1)$$

где t в мс, а X в км.

4. Распределение тока и напряжения в момент времени, когда преломленные волны достигнут конца второй линии

В этот момент

$$\theta_1 = \frac{l''}{V} = \frac{300 \text{ км}}{300 \frac{\text{км}}{\text{мс}}} = 1 \text{ мс}; \text{ или } t_1 = t_0 + \theta_1 = 2,333 \text{ мс.}$$

Подставим значение $t_1 = 2,333 \text{ мс}$ в (1)

$$\left\{ \begin{array}{l} i' = 25 + 5.769 \cdot e^{0.3419} \cdot e^{-1.026 \cdot \frac{X}{300}} \text{ А}; \\ u' = 7500 - 2885 \cdot e^{0.3419} \cdot e^{-1.026 \cdot \frac{X}{300}} \text{ В}; \\ i'' = 15.385 \cdot e^{-2.393} \cdot e^{1.026 \cdot \frac{X}{300}} \text{ А}; \\ u'' = 4615 \cdot e^{-2.393} \cdot e^{1.026 \cdot \frac{X}{300}} \text{ В}, \end{array} \right. \quad (2)$$

где X в км.

Поскольку к моменту времени t_1 отраженные волны на первой линии прошли расстояние 300 км, то первые две формулы (2) справедливы на участке

$$100 \leq X \leq 400 \text{ км},$$

а вторыми двумя можно пользоваться на участке

$$400 \leq X \leq 700 \text{ км}.$$

На участке

$$X = 0 \div 100 \text{ км}$$

имеются только падающие волны напряжения и тока

$$u'_{пад} = 10000 \text{ В}; i'_{пад} = 20 \text{ А}.$$

Таблица 2

Расчет напряжения и тока

X , км	100	150	200	250	300	350	400
i' , А	30,77	29,86	29,10	28,45	27,91	27,45	27,07
u' , В	4,62	5,07	5,45	5,77	6,04	6,27	6,47
X , км	400	450	500	550	600	650	700
i'' , А	5,52	6,54	7,76	9,21	10,93	12,97	15,38

5. Изменение во времени напряжения и тока в точке M с координатой $X_M=300$ км

a) после подключения источника падающие волны достигнут точки M в момент времени

$$t' = \frac{300}{V} = 1 \text{ мс};$$

б) начиная с этого момента, напряжение и ток определяются падающими волнами вплоть до момента, когда появятся отраженные волны

$$t'' = \frac{500}{V} = 1,666 \text{ мс};$$

в) дальнейшее изменение тока и напряжения в точке M получим из первого и второго выражений (1) подстановкой $X_M = 300$ км

$$i'_M = 25 + 5.769 \cdot e^{1.709} \cdot e^{-1.026 \cdot t} \text{ А};$$

$$u'_M = 7500 - 2885 \cdot e^{1.709} \cdot e^{-1.026 \cdot t} \text{ В},$$

где t в мс.

Эти выражения справедливы для $t \geq 1.667$ мс.

Таблица 3

Расчет напряжения и тока в точке M

t , мс	1,667	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3	3,25	3,5
i' , А	30,77	30,3	29,1	28,17	27,45	26,9	26,47	26,14	25,88
u' , кВ	4,616	4,852	5,451	5,914	6,273	6,55	6,765	6,931	7,06

По данным таблиц 1, 2 строим кривые (рис. 8 – 11).

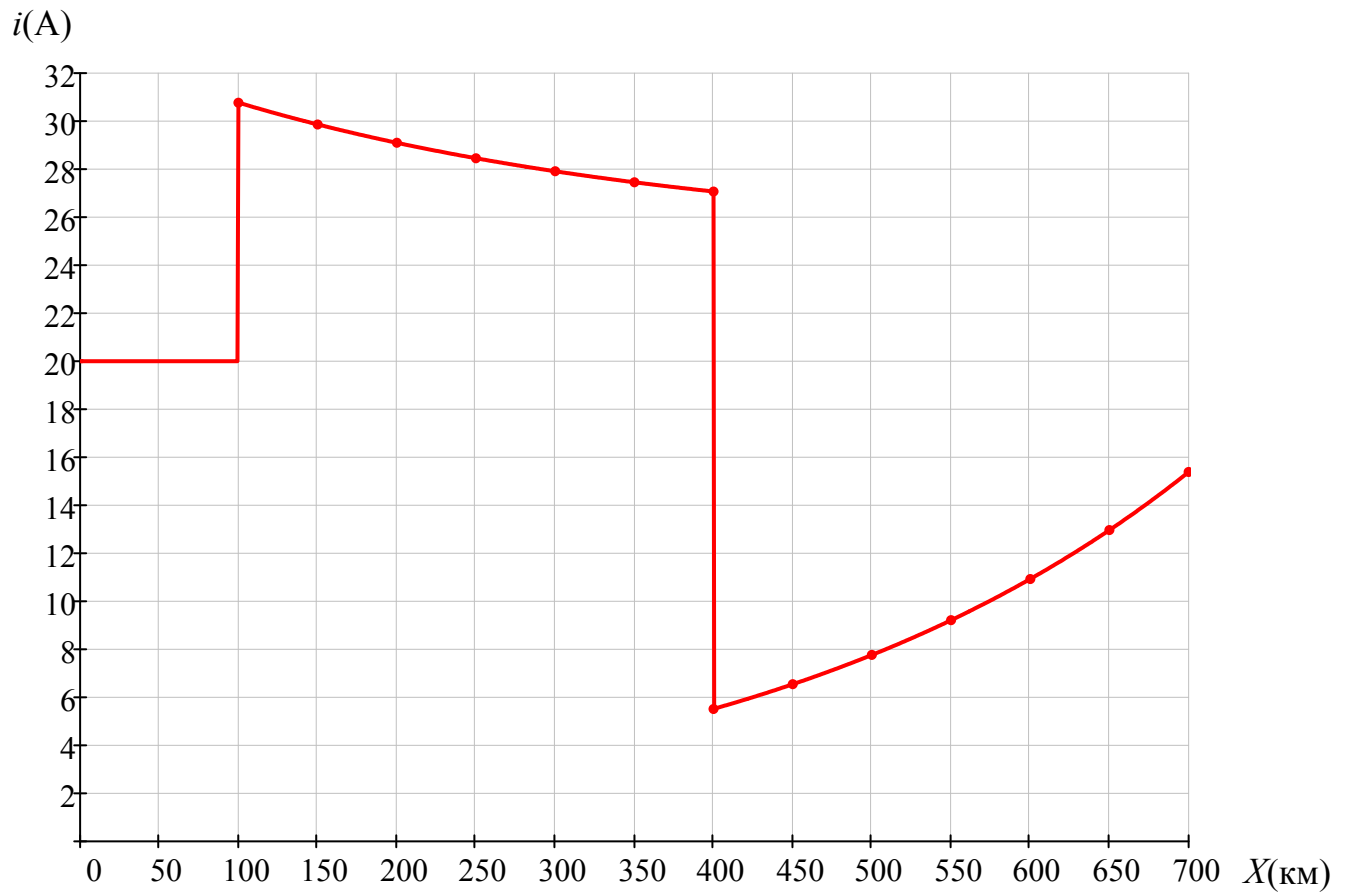


Рис. 8. Распределение тока вдоль линий в момент времени $t_1 = 2.667$ мс

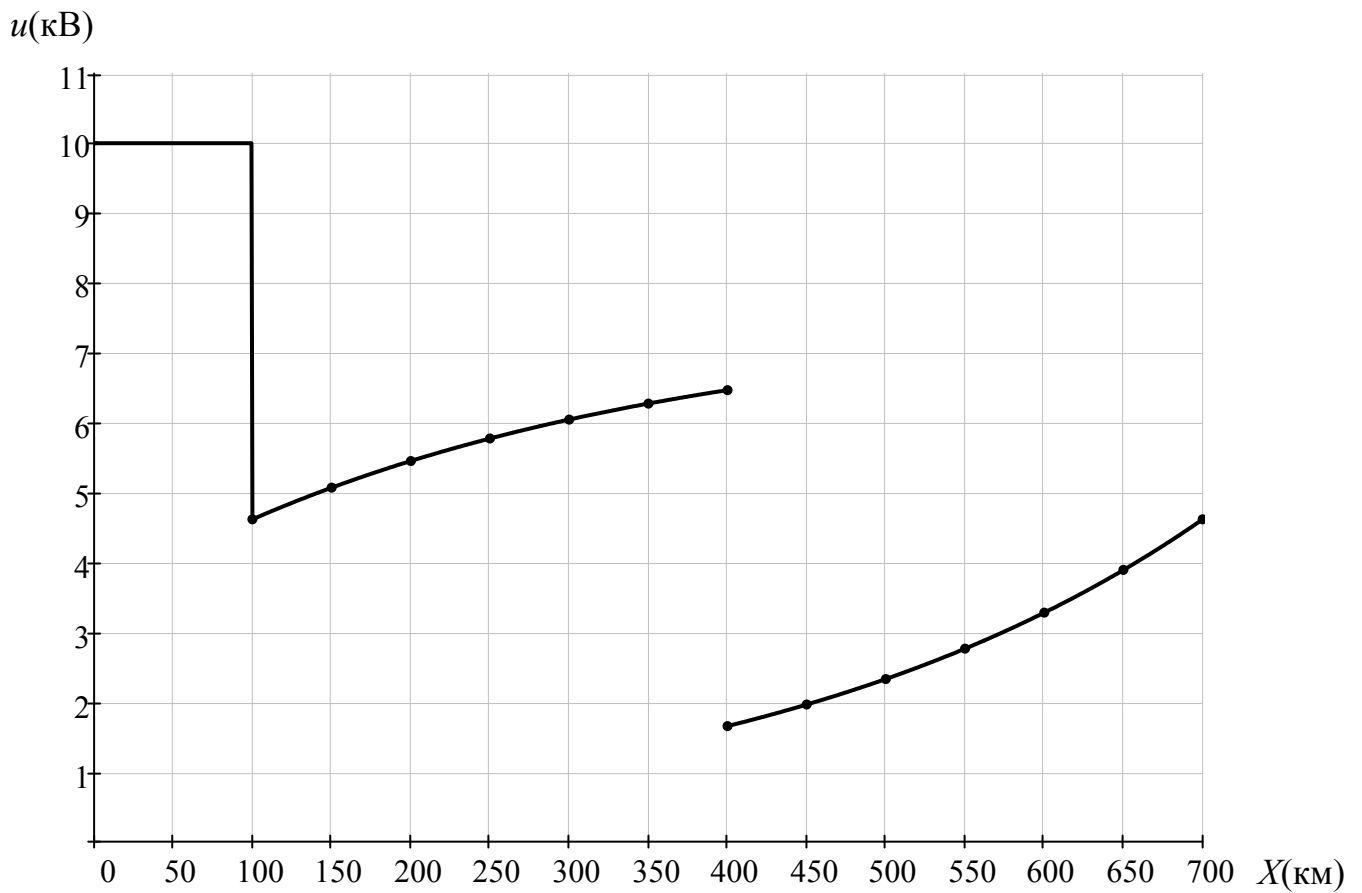


Рис. 9. Распределение напряжения вдоль линий в момент времени $t_1 = 2.667$ мс

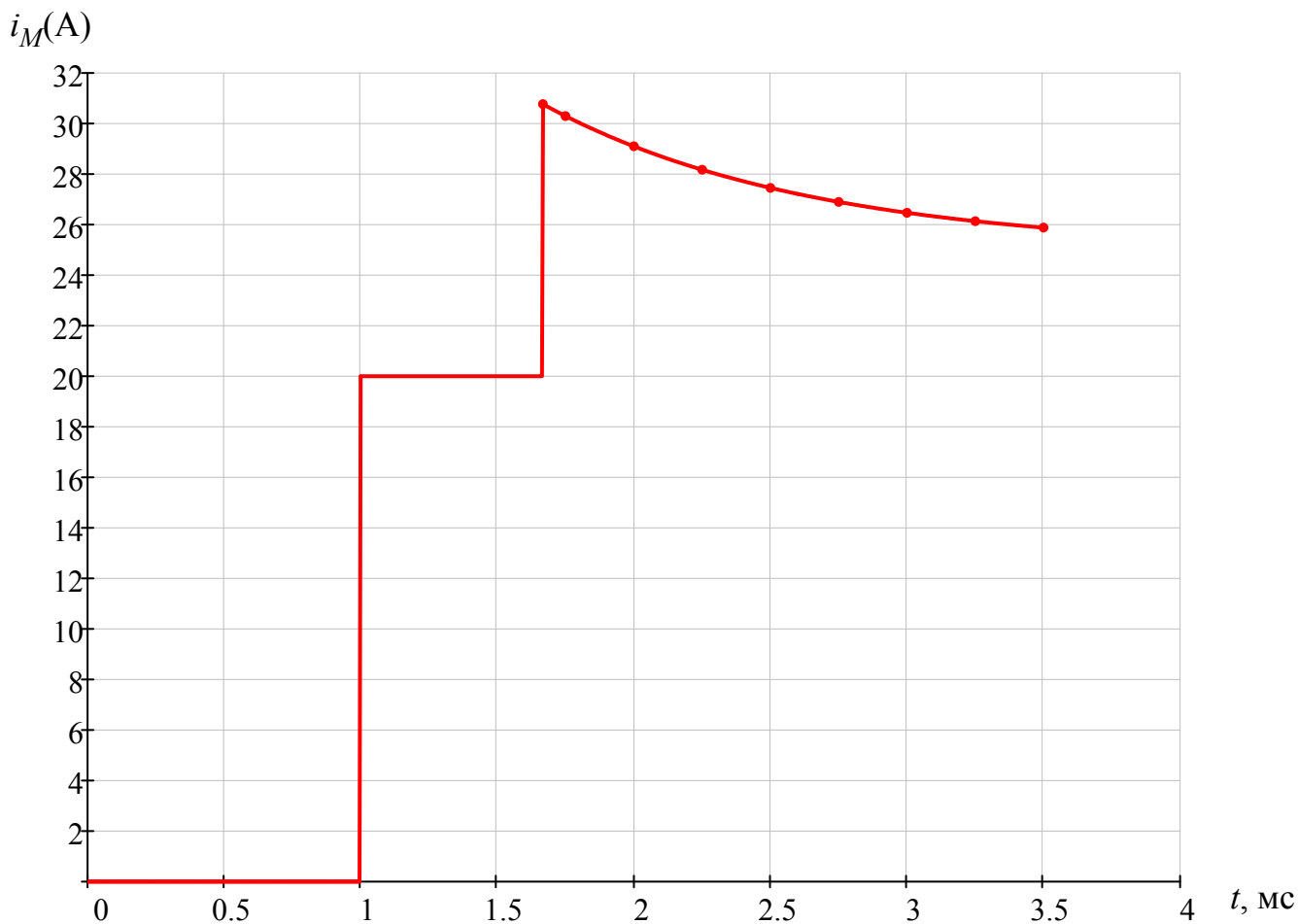


Рис. 10. Изменение тока во времени в точке M с координатой $Y' = 100$ км

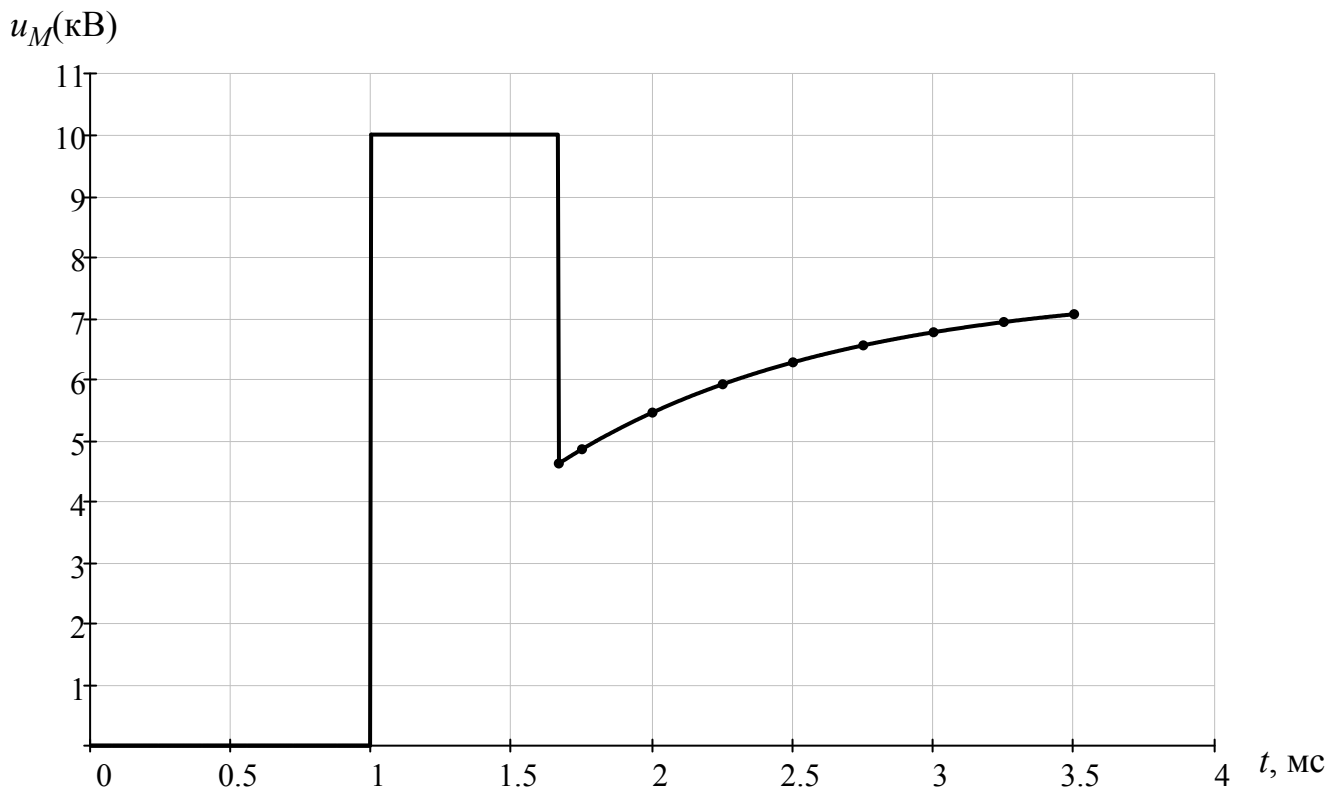


Рис. 11. Изменение напряжения во времени в точке M с координатой $Y' = 100$ км