

М. Я. КАЛЛЕР, Ю. В. СОБОЛЕВ,
А. Г. БОГДАНОВ

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЙ АВТОМАТИКИ, ТЕЛЕМЕХАНИКИ И СВЯЗИ

Утверждено
Главным управлением
учебными заведениями МПС
в качестве учебника для вузов
железнодорожного транспорта

RGR-TOE.RU
ТОЭ ОТЦ ТЛЭЦ Электротехника



МОСКВА "ТРАНСПОРТ" 1987

Каллер М. Я., Соболев Ю. В., Богданов А. Г. Теория линейных электрических цепей железнодорожной автоматики, телемеханики и связи. Учебник для вузов ж.-д. трансп. — М.: Транспорт, 1987. — 335 с.

Изложены методы анализа и синтеза электрических цепей и применение их при эксплуатации, проектировании, совершенствовании и разработке устройств железнодорожной автоматики, телемеханики и связи. Рассмотрены основные положения теории двух- и четырехполюсников и приложение ее к расчету корректоров и фильтров, выполняемых в виде пассивных, активных RC или цифровых цепей.

Значительное внимание уделено теории цепей с распределенными параметрами (электрическим линиям) и применению ее для расчета условий передачи сигналов по однородным и неоднородным цепям проводных линий связи и рельсовым цепям, а также учета влияний со стороны других цепей.

Предназначена в качестве учебника для студентов вузов железнодорожного транспорта и может быть полезна инженерно-техническим работникам, связанным с проектированием и эксплуатацией систем автоматики, телемеханики и связи.

Ил. 243, табл. 7. библиогр. 8 назв.

Книгу написали: введение, главы 2, 3, 5, 6 — М. Я. Каллер; главы 4, 7 — Ю. В. Соболев; главы 1, 8 — А. Г. Богданов.

Рецензенты: доктора техн. наук И. Е. Дмитренко и Н. Д. Сухопрудский

Заведующий редакцией В. П. Репнева

Редактор Н. Л. Немцова

ВВЕДЕНИЕ

Системы автоматики, телемеханики и связи на железнодорожном транспорте представляют собой технические средства управления перевозочным процессом, способствующие повышению эффективности работы дорог и безопасности движения поездов. Их роль и значение непрерывно возрастают. К таким системам следует отнести автоблокировку, диспетчерскую и электрическую централизации, автоматическую локомотивную сигнализацию, системы поездной радиосвязи, специальных видов отделенческой технологической и связей, организуемых по цепям воздушных, кабельных и радиорелейных линий, и др.

Наряду с всевозрастающим использованием указанных систем вводят автоматизацию процесса учета и управления перевозочным процессом с применением электронно-вычислительных машин, для чего на транспорте создают комплексную автоматизированную систему управления железнодорожным транспортом. Ее комплекс технических средств состоит из системы вычислительных центров и сети передачи данных, использующей каналы проводной и радиосвязи.

Новые системы автоматики, телемеханики, связи и управления основываются на последних достижениях науки и техники, все в большей степени здесь находят применение микроэлектроника и элементы вычислительной техники. Новая техника для анализа работы и проектирования составляющих ее устройств требует точных методов расчета, которые в значительной мере основываются на теории линейных электрических цепей (ТЛЭЦ).

Методы ТЛЭЦ широко применяют в инженерных расчетах элементов самых разнообразных устройств автоматики, телемеханики и связи, и особенно при рассмотрении сложных систем, состоящих из электронных, механических и других приборов, так как только представление разнообразных приборов эквивалентными схемами ТЛЭЦ позволяет рассматривать взаимодействие частей сложных систем единым образом. Этим объясняется всевозрастающее использование методов ТЛЭЦ во всех отраслях автоматики, телемеханики и связи. Указанными методами пользуются в цифровой технике, при расчетах СВЧ приборов, микроэлектронных структур и во многих других случаях. Только методами ТЛЭЦ можно рассматривать условия передачи сигналов по сложным трактам, при которых оптимизируются условия передачи.

Основные разделы теории линейных электрических цепей — теория четырехполюсника, теория электрических линий, методы анализа и синтеза электрических цепей с заданными частотными или временными характеристиками, применяемые при построении электрических фильтров, корректоров, усилителей и других элементов аппаратуры, — находят самое широкое использование.

Сложность и специфика задач, с которыми сталкиваются специалисты, работающие в области железнодорожной автоматики, телемеханики и связи, заставляют их прибегать к специальным разделам ТЛЭЦ. Так, при расчете рельсовых цепей применяют теорию несимметричных и многопроводных линий. На основе ТЛЭЦ точно и тщательно рассчитывают взаимные влияния между цепями телемеханики и связи и влияния на них со стороны электрической тяги и линий электропередачи, возбуждаемых распределенными источниками. Методами, отличными от обычно применяемых, рассчитывают групповые цепи технологических отделенческих связей и др.

По учебному плану подготовки специалистов железнодорожной автоматики, телемеханики и связи методы расчета линейных электрических цепей, наиболее широко используемые при конструировании различных конкретных устройств в системах (рассматриваемых в специальных дисциплинах), изучают в курсе «Теория линейных электрических цепей железнодорожной автоматики, телемеханики и связи». Этот курс следует за курсом «Теоретические основы электротехники» и направлен на углубленное изучение теории линейных электрических цепей с сосредоточенными и распределенными параметрами с учетом подготовки студентов к решению разнообразных задач, связанных с передачей сигналов в устройствах железнодорожной автоматики, телемеханики и связи.

Основные положения, изучаемые в курсе «Теория линейных электрических цепей железнодорожной автоматики, телемеханики и связи», находят применение и дальнейшее развитие в теории рельсовых цепей, изучаемой в специальном курсе «Автоматика и телемеханика на перегонах», в теории электрических фильтров — «Многоканальная связь на железнодорожном транспорте», при расчетах групповых линий — «Технологическая телефонная связь на железнодорожном транспорте», взаимного влияния различных линий — «Линии автоматики, телемеханики и связи» и во многих других случаях.

Глава 1

УСЛОВИЯ РАБОТЫ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

1.1. ОСОБЕННОСТИ УСЛОВИЙ РАБОТЫ, КРИТЕРИЕВ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА И МЕТОДОВ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Широко известное понятие электрической цепи применяется давно, но с течением времени непрерывно наполняется новым содержанием.

В курсе «Теоретические основы электротехники» электрическая цепь определена как совокупность взаимосвязанных устройств для передачи, распределения, преобразования электрической и других видов энергии и информации при условии, что проходящие в устройствах процессы можно описать, оперируя понятиями э. д. с., тока и напряжения. Включение в это определение понятий энергии и информации подчеркивает ту чрезвычайную широту и разнообразие задач, которые можно решить методами ТЛЭЦ. Любую электрическую цепь характеризуют связями между ее напряжениями, токами и параметрами, определяемыми законами Ома и Кирхгофа. Эти законы являются основными и действуют во всех электрических цепях энергетических, телемеханических систем или систем связи.

Однако условия передачи энергии или информации имеют свою специфику, поэтому для анализа работы и синтеза электрических цепей телемеханики и связи в процессе инженерной деятельности применяют специальные приемы (отличающиеся от используемых в энергетике), которые зависят от их условий работы и назначения.

Напряжения и токи. Электрическая цепь, являющаяся элементом энергетических установок, включающих и блоки питания систем телемеханики и связи, как правило, в установленном режиме работает при определенном напряжении постоянного или переменного тока с заданной частотой (обычно 50 Гц). Форма и спектр последнего приведены соответственно на рис. 1.1, *а* и *б*.

Электрические цепи систем телемеханики и связи, образующие тракты передачи сигналов, находятся под непрерывно изменяющимся неизвестным напряжением сигналов. Примеры зависимости от времени напряжения в цепи телефонной связи и напряжения телемеханического сигнала приведены соответственно на рис. 1.2, *а* и *б*. Очевидно, что и токи в цепях также меняются неизвестным в каждый момент времени и непредвиденным образом. Эти изменяющиеся напряжения и токи являются случайными процессами, их можно представить состоящими из многих гармонических колебаний с разными частотами и изменяющимися амплитудами и фазами. При передаче сигналов контроля и настройки, например последовательности импульсов постоянной длительности (рис. 1.3, *а*), амплитуды и фазы гармонических (частотных)

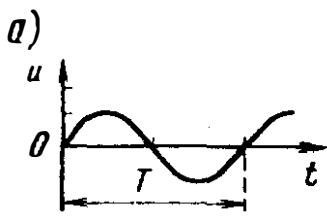


Рис. 1.1

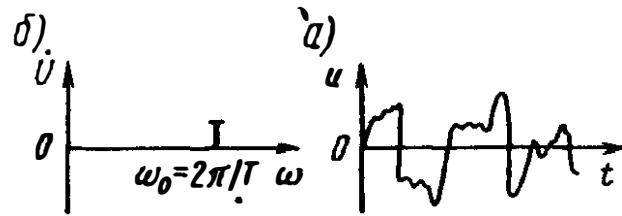
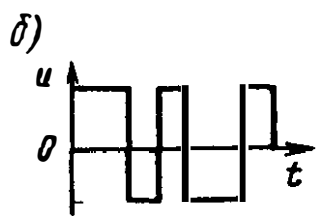


Рис. 1.2



составляющих сигналов постоянны во времени. Такие сигналы можно характеризовать спектром напряжения (рис. 1.3, б).

Сигналы, несущие информацию и являющиеся случайными процессами, в ряде случаев можно приближенно заменять детерминированными процессами, частотные составляющие которых имеют постоянные амплитуды и фазы и, следовательно, могут характеризоваться спектром напряжения (или тока).

Составляющие частотного спектра напряжения сигнала могут занимать полосу частот, в пределах которой существенно меняются характеристики цепи. Такие сигналы называют широкими. Так, например, основные составляющие сигнала (см. рис. 1.3) имеют частоты $0, \omega_0, 3\omega_0$, сопротивление катушки индуктивности для них соответственно будет $x_L(0) = 0, x_L(\omega_0) = \omega_0 L, x_L(3\omega_0) = 3\omega_0 L$.

Таким образом, не зная напряжения и тока в цепи, можно говорить только об их отношении для каждой частотной составляющей сигнала $\dot{U}(\omega)/\dot{I}(\omega) = Z(\omega)$ или $\dot{I}(\omega)/\dot{U}(\omega) = Y(\omega)$, т. е. о характеристиках цепи $Z(\omega), Y(\omega)$ и др., которые будут рассматриваться далее.

Каждая цепь в зависимости от ее конкретного назначения (функции) должна характеризоваться зависимостями своих параметров от частоты. Изучение и получение таких характеристик являются одной из основных задач теории линейных электрических цепей.

Элементная база и структуры. Относительно небольшие значения напряжения и токов в электрических цепях систем телемеханики и связи позволяют расширять элементную базу, используя наряду с традиционными для цепей элементами r, L и C микроминиатюрные усилители, интеграторы, линии задержки и др., а в качестве колебательных элементов — кристаллы кварца или металлические стержни.

Основным направлением создания цепей с заданными связями между напряжением и током в устройствах формирования и обработки сигналов является использование микроминиатюрных элементов.

Рассмотрим, например, простую цепь (рис. 1.4, а). Представим себе, что она является элементом устройства преобразования сигналов. В цепи проходит ток i и уравнение равновесия напряжений имеет вид:

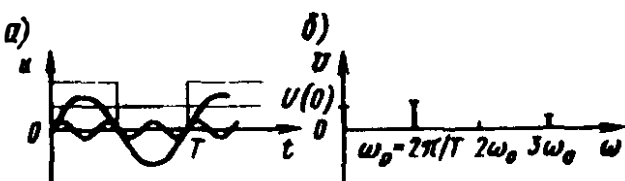


Рис. 1.3

$$ri + L \frac{di}{dt} = u_1$$

$$\text{или } \frac{di}{dt} = -\frac{ri}{L} + \frac{u_1}{L} \quad (1.1)$$

Напряжение на выходе цепи $u_2 = r i$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{ru_2}{L} + \frac{ru_1}{L}, \quad (1.2)$$

которое получается умножением выражения (1.1) на r . Соотношение (1.2) есть частный случай уравнения

$$\frac{dz}{dt} = Az + Bx, \quad (1.3)$$

решение которого известно:

$$z(t) = z(0) e^{At} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bx(\tau) d(\tau). \quad (1.4)$$

Первое слагаемое в этой формуле есть свободное движение из нулевого начального состояния, второе — вынужденное движение в результате внешнего воздействия $x(t)$. Решим уравнение (1.2) операторным методом при нулевом начальном состоянии, для чего заменим d/dt оператором p , а переменные — их изображениями. Тогда уравнение (1.2) запишется так:

$$p \dot{U}_2(p) = -\frac{r}{L} \dot{U}_2(p) + \frac{r}{L} \dot{U}_1(p) \quad (1.5)$$

или

$$\dot{U}_2(p) / \dot{U}_1(p) = \alpha / (p - \alpha); \quad \alpha = r/L.$$

Соответствующую соотношениям (1.5) связь между $\dot{U}_2(p)$, и $\dot{U}_1(p)$ обеспечивает схема (рис. 1.4, б), содержащая интегратор, обозначенный символом $1/p$, два усилителя с коэффициентами усиления — α и α и сумматор. Существенно, что эту схему можно составить непосредственно по дифференциальному уравнению, не решая его. Схема (рис. 1.4, в) эквивалентна схеме (см. рис. 1.4, б) и соответствует решению дифференциального уравнения относительно $pU_2(p) = -\alpha U_2(p) + \alpha U_1(p)$.

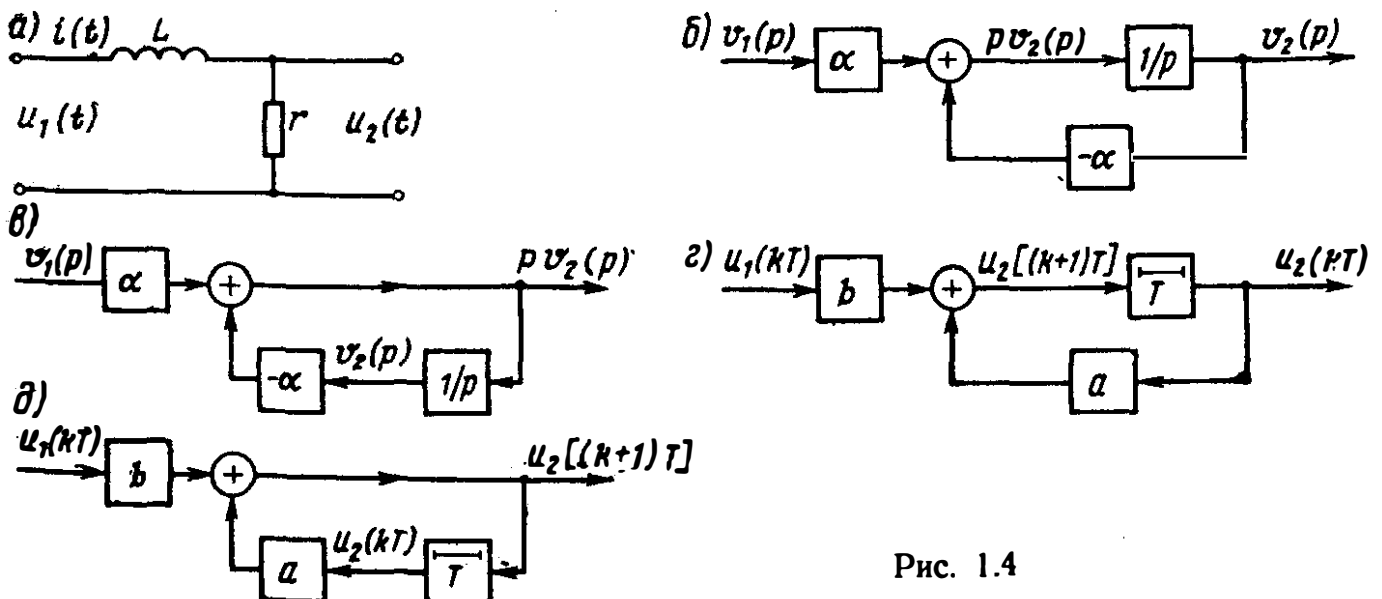


Рис. 1.4

Как видно, характеризующиеся соотношениями (1.2) и (1.5) преобразования сигналов могут выполнять цепи с различными структурами и элементной базой.

Использование интеграторов и усилителей позволяет легко строить цепи с изменяющимися (управляемыми) сопротивлениями, индуктивностями, емкостями (поскольку их значения задают коэффициентами усиления, зависящими от r , $1/L$, $1/C$) и в микроминиатюрном исполнении.

Рассмотрим теперь часто встречающийся в практике случай изменения сигналов не непрерывно, а только в отдельные равностоящие моменты времени kT , где $T \ll L/r$. Такие значения напряжения $u(t)$ для моментов времени kT , называемые отсчетами, представляют собой импульсы напряжения, появляющиеся на входе и выходе цепи при замыкании контактов, через которые подводятся и снимаются в таких случаях напряжения $u(t)$.

Найдем связи между входными и выходными импульсами напряжения (см. рис. 1.4, а). Это можно сделать, отказавшись в дифференциальном уравнении (1.2) от предельного перехода к $\Delta t \rightarrow 0$ при определении d/dt . В этом случае вместо уравнения (1.2) можно написать

$$\frac{u_2[(k+1)T] - u_2[kT]}{T} = -\frac{r}{L} u_2[kT] + \frac{r}{L} u_1[kT].$$

Решая последние соотношения относительно $u_2[(k+1)T]$, получим

$$u_2[(k+1)T] = \left(1 - \frac{r}{L} T\right) u_2[kT] + \frac{r}{L} T u_1[kT].$$

или

$$u_2[(k+1)T] = au_2[kT] + bu_1[kT]. \quad (1.6)$$

Соотношению (1.6) соответствуют схемы (рис. 1.4, г и д), представляющие собой эквивалентные способы изображения одних и тех же связей. Каждая из них содержит элемент задержки на время T , два усилителя и сумматор.

Заметим, что в дифференциальных уравнениях (1.2) и (1.3) коэффициенты A и B имели размерность $1/c$. В конечно-разностных уравнениях (1.6) и (1.7) коэффициенты a и b безразмерны.

Как показывает рассмотренный простой пример, определенное преобразование сигнала (см., например, рис. 1.4, а) может быть аналитически задано разными эквивалентными способами посредством выражений (1.2), (1.5), (1.6) и выполнено по схемам с различной элементной базой.

Характерным для синтеза цепей телемеханики и связи является использование определенных структур (канонических схем) независимо от элементной базы. Так, например, в схемах, приведенных на рис. 1.4, б и г, применены наборы элементов разного базиса, но общей структуры.

Аналитические способы представления определенного преобразования однозначно определяются друг через друга, и при описании цепей

может быть использован любой из них. Однако наиболее удобным и простым является определение и применение операторных или частотных характеристик, которые в основном и будут использованы в дальнейшем.

Критерии оценки качества. При эксплуатации существующих и создании новых устройств одной из важнейших задач является оценка качества их функционирования. Такая оценка чаще всего бывает комплексной, включающей в себя ряд требований. Среди множества таких требований, предъявляемых к цепям энергетических установок, прежде всего следует назвать требование к повышению их к.п.д. Как следствие этого, источники электрической энергии должны иметь возможно малое внутреннее сопротивление.

В цепях автоматики, телемеханики и связи мощности передаваемых сигналов относительно малы, поэтому снижение к.п.д. особого значения не имеет. В то же время высокая стоимость генераторов и необходимость их эффективного использования требуют создания условий передачи приемнику максимально возможной мощности. Кроме того, повышение мощности полезного сигнала, поступающего в приемник, в информационных системах телемеханики и связи облегчает борьбу с помехами.

Для выяснения условий передачи от источника энергии к приемнику максимальной мощности рассмотрим схему, содержащую источник э. д.с. E с внутренним сопротивлением $Z_r = r_r + jx_r$, к зажимам которого подключен приемник с сопротивлением $Z = r + jx$ (рис. 1.5).

Активная мощность приемника

$$P = I^2 r = \frac{E^2 r}{|Z_r + Z|^2} = \frac{E^2 r}{(r_r + r)^2 + (X_r + X)^2}. \quad (1.7)$$

Очевидно, что при любом r мощность достигает наибольшего значения при $X = -X_r$. В этом случае

$$P = E^2 r / (r_r + r)^2.$$

Исследовав полученное выражение на экстремум, найдем, что мощность максимальна при $r = r_r$. Таким образом, приемник получает от источника максимальную активную мощность, когда его комплексное сопротивление сопряжено с комплексным сопротивлением источника $Z = \dot{Z}_r$.

При этом условии

$$P_{\max} = E^2 / 4r_r. \quad (1.8)$$

При $X = -X_r$ мощность источника энергии

$$P_r = EI = E^2 / (r_r + r).$$

Коэффициент полезного действия

$$\eta = P / P_r = r / (r_r + r).$$

Из зависимостей $P_r = P$ и η (рис. 1.6) от сопротивления приемника r видно, что соотношениями сопротивлений приемника и генератора определяются три режима работы цепи: $r < r_r$ — режим приближает-

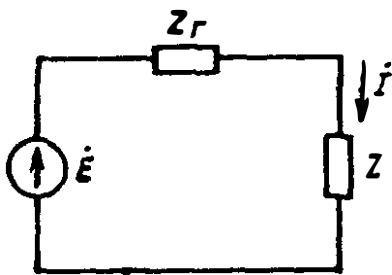


Рис. 1.5

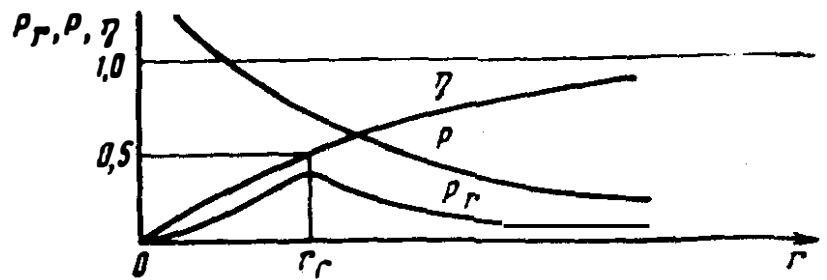


Рис. 1.6

ся к короткому замыканию, условия крайне неблагоприятные, с малыми значениями η и P ; $r \approx r_r$ — согласованный режим, оптимальный для цепей автоматики, телемеханики и связи, при $r = r_r$ в приемнике выделяется максимальная активная мощность, $\eta = 0,5$; $r > r_r$ — режим, приближающийся к холостому ходу, выделяемая в приемнике мощность невелика, однако к.п.д. $\eta \rightarrow 1$ (оптимальный режим для электроэнергетических систем).

В некоторых случаях реактивные сопротивления приемника и источника энергии скомпенсировать не удастся. Выделяемая при этом в приемнике активная мощность будет максимальна при равенстве модулей полных сопротивлений приемника и источника ($|Z| = |Z_r|$) и зависит от соотношения аргументов этих сопротивлений φ и φ_r :

$$P_{\max} = \frac{E^2 \cos \varphi}{2 |Z_r| [1 + \cos(\varphi_r - \varphi)]} \quad (1.9)$$

Непосредственное согласование приемника с источником энергии не всегда удастся. В таких случаях для согласования применяют переходные трансформаторы или специальные четырехполюсники с реактивными элементами.

Потребление энергии цепью формирования или преобразования сигналов, построенной на миниатюрных элементах (см. рис. 1.4), настолько мало, что энергетические соображения при их эксплуатации и проектировании во внимание не принимают. Критериями качества здесь являются чувствительность (устойчивость) к изменению значений параметров элементов, габаритные размеры, надежность, отсутствие опасных отказов.

Специальные цепи. Особое место в современных системах автоматики и телемеханики занимают рельсовые цепи (РЦ). Они включают в себя в качестве элементов (проводников) рельсы и являются источниками информации о местоположении подвижной единицы, состоянии рельсового пути, а также трактами связи между различными элемен-

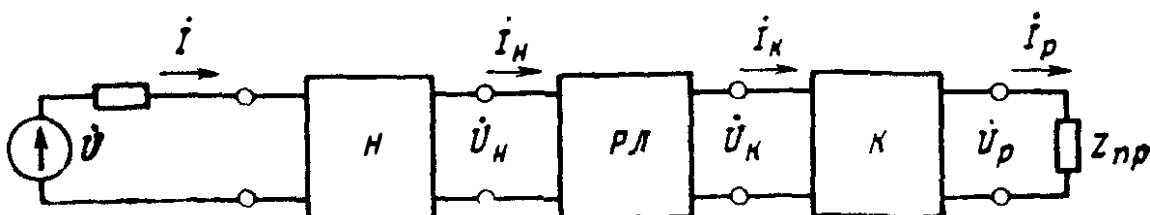


Рис. 1.7

тами систем телемеханики, рассредоточенными вдоль железнодорожного пути, и выполняют другие функции. Рельсовые цепи должны обеспечивать работоспособность устройств в пяти различных режимах, поэтому критерием качества здесь является набор подлежащих оптимизации коэффициентов.

Типичной схемой замещения РЦ является пятиэлементная схема (рис. 1.7).

На этом рисунке H означает начало РЦ и включает в себя аппаратуру питающего конца, K — конец РЦ и включает в себя аппаратуру приемного конца.

1.2. ЛИНЕЙНАЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ КАК МОДЕЛЬ

Электрические цепи составляют основу устройств телемеханики и связи. Любая электрическая цепь состоит из отдельных элементов. Ими могут быть источники электрической энергии, резисторы, трансформаторы, катушки индуктивности, конденсаторы и разнообразные электронные, ионные, полупроводниковые, электромеханические и другие приборы, в том числе усилители, микроэлектронные устройства, имеющие свойства традиционных элементов: трансформаторов (оптопреобразователи), катушек индуктивности, конденсаторов и резисторов, частотно-зависимые отрицательные сопротивления, устройства, преобразующие сигнал определенным образом, например интеграторы, линии задержки и др.

В задачу теории линейных электрических цепей входит изучение совместного действия всех образующих цепь элементов общими методами независимо от особенностей физических процессов, определяющих их работу. Поэтому в ТЛЭЦ рассматриваются только те свойства каждого элемента, которые определяют его способность поставлять, накапливать, передавать электрическую энергию или преобразовывать электрические сигналы определенным способом.

Элементы, способные поставлять энергию в цепь, называют **активными**, элементы, накапливающие и расходующие энергию, — **пассивными**, а элементы с каким-либо одним из этих свойств — **идеальными**. Идеальный элемент есть абстракция, широко используемая в науке. Идеальными активными элементами электрических цепей являются: независимый источник напряжения, характеризуемый значением э. д. с. E или $u(t)$ и нулевым внутренним сопротивлением; независимый источник тока, характеризуемый значением тока I или $i(t)$ и бесконечно большим внутренним сопротивлением, а также зависимые источники напряжения или тока, управляемые напряжением или током.

Свойства пассивных элементов цепи расходовать или накапливать электромагнитную энергию характеризуют их параметрами: сопротивлением, индуктивностью и емкостью. Как известно, электрическое сопротивление r характеризует способность цепи преобразовывать электрическую энергию в тепло, механическое движение; индуктивность L — способность цепи накапливать энергию в магнитном поле; элек-

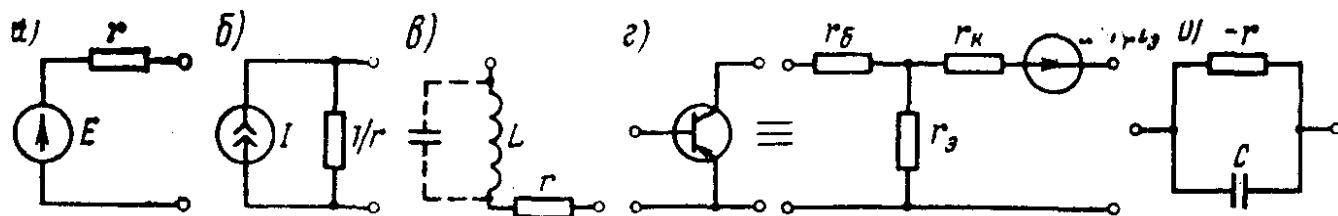


Рис. 1.8

трическая емкость C — способность цепи накапливать энергию в электрическом поле. Идеальные пассивные элементы имеют только один параметр — r , L или C . Если указанные параметры цепи не зависят от значений напряжения и тока, то такую цепь называют линейной.

Практически любые элементы реальной цепи имеют одновременно несколько основных параметров: сопротивление, индуктивность и емкость. Нежелательные параметры, которые не удалось исключить при конструировании этих элементов, называют паразитными.

Любой реальный источник электрической энергии, например батарея для питания транзисторного приемника, имеет конечное внутреннее сопротивление, его эквивалентная схема (рис. 1.8, а или б) содержит по два идеальных элемента.

У катушки индуктивности наряду с индуктивностью L всегда есть некоторое сопротивление и межвитковая емкость, и ее эквивалентная схема при необходимости учета этих свойств должна соответствовать схеме, приведенной на рис. 1.8, в. Если катушку используют в устройствах, работающих на относительно низких частотах (когда током через емкость C можно пренебречь), то емкость в ее эквивалентной схеме опускают.

Эквивалентными схемами, составленными из идеальных элементов, отображают также свойства электронных устройств. На рис. 1.8., г и д приведены схемы замещения полупроводникового транзистора и туннельного диода.

Составление эквивалентной схемы цепи является первым шагом ее анализа. Эквивалентная схема цепи есть модель реального объекта. Ее можно составлять с использованием разных наборов базовых элементов.

При более высоком уровне анализа в качестве элементарных частей рассматривают соединения перечисленных элементов, образующих двух-, четырех- и многополюсные цепи. Эквивалентная схема — модель цепи — является заменителем реальных объектов, который опирается на определенную теорию, выражающую компромисс между теорией и практикой, и ориентирована на достижение определенной цели. При решении разных задач (например, для различных частотных диапазонов) один и тот же объект отображают разными моделями — схемами. В последующем под электрической цепью будем понимать схему, отображающую определенный класс объектов со сходными свойствами.

1.3. ЧАСТОТНОЕ И ВРЕМЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ И РЕАКЦИЙ

Основными задачами ТЛЭЦ является установление или обеспечение связей между напряжениями и токами в разных частях цепи. При этом некоторые напряжения или токи подводятся к цепи извне и являются причиной возникновения электромагнитных процессов в ней. Такие напряжения или токи называют **входными** или **воздействиями**. Другие напряжения и токи являются следствием первых, их называют **выходными**, или **реакциями**.

В системах телемеханики и связи воздействия и реакции представляют собой напряжения и токи, разнообразно и достаточно сложно изменяющиеся во времени. Их используют для передачи сообщений и называют **сигналами**.

Поэтому первой задачей, которую приходится решать при анализе и синтезе электрических цепей для преобразования и передачи сигналов, является выбор математических средств для отображения свойств последних.

Отображение свойств сигналов, как и свойств реальных устройств, схемами ТЛЭЦ с целью упрощения математического аппарата часто осуществляют заменой (моделированием) реальных сигналов сходными по свойствам более простыми. Математическое описание входных и выходных сигналов (воздействий и реакций) во всех случаях сводится к представлению сложного сигнала суммой более простых. Простыми сигналами могут быть разные наборы элементарных сигналов. В ТЛЭЦ в качестве таких элементарных сигналов преимущественно используют гармонические колебания, узкие импульсы и сигналы вида e^{pt} .

Частотное представление. Если в качестве элементарных составляющих сложного сигнала выбирают гармонические колебания, то говорят о частотном представлении. В ряде случаев реальные сигналы с известной степенью приближения можно считать периодическими. Периодический сигнал с помощью ряда Фурье может быть разложен на сумму гармонических (синусоидальных или косинусоидальных) составляющих с кратными частотами:

$$u(t) = u(t + T_0) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) = \\ = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n),$$

где $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$; $U_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} u(t) dt$;

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} u(t) \cos n\omega_0 t dt;$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} u(t) \sin n\omega_0 t dt;$$

$$\dot{U}_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \varphi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}.$$

Спектр периодических сигналов всегда дискретный, состоит из отдельных гармоник, частоты которых кратны основной частоте ω_0 .

Часто для сокращения записи ряд Фурье представляют в комплексной форме:

$$u(t) = U_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \dot{U}_n e^{jn\omega_0 t}, \quad (1.10)$$

где

$$\dot{U}_n = a_n - jb_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} u(t) e^{jn\omega_0 t} dt.$$

Под знаком суммы не содержится слагаемое, соответствующее $n = 0$.

Непериодические во времени напряжения и токи представляют в виде суммы бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых интегралом Фурье. Спектр непериодического напряжения или тока является непрерывным. Представление напряжения $u(t)$ интегралом Фурье через его спектр $\dot{U}(\omega)$ и определение спектра $\dot{U}(\omega)$ по напряжению $u(t)$ осуществляют по формулам:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(\omega) e^{j\omega t} d\omega; \quad \dot{U}(\omega) = \int_0^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1.11)$$

Формулы (1.11) называют преобразованиями Фурье. Преобразование, переводящее $u(t)$ в $\dot{U}(\omega)$, называют прямым, а преобразование $\dot{U}(\omega)$ в $u(t)$ — обратным. Прямое и обратное преобразования Фурье кратко записывают в виде:

$$\dot{U}(\omega) = F[u(t)]; \quad u(t) = F^{-1}[\dot{U}(\omega)]. \quad (1.12)$$

В такой краткой записи связь между единичной функцией и ее спектром, например, имеет вид:

$$F[1(t)] = 1/(j\omega). \quad (1.13)$$

Спектр единичного импульса напряжения

$$F[\delta(t)] = 1(\omega).$$

Величина $U(\omega)d\omega$ в выражении (1.11) представляет собой комплексную амплитуду гармонического колебания с частотой ω и имеет размерность напряжения. Спектр напряжения $\dot{U}(\omega)$ измеряют в вольтах в секунду. Таким образом, прямое преобразование Фурье $F[u(t)] = \dot{U}(\omega)$ меняет размерность вольт на вольт в секунду, обратное преобразование $F^{-1}[\dot{U}(\omega)] = u(t)$ — вольт в секунду на вольт.

Операторное представление. Если в качестве элементарных сигнала-

<i>L</i> -изображение $F(p)$	Оригинал $f(t)$
1	$\delta(t)$
$1/p$	$1(t)$
$1/(p+a)$	e^{-at}
$\omega/(p^2+\omega^2)$	$\sin \omega t$
$\frac{1}{(p+a)(p^2+\omega^2)}$	$\frac{e^{-at}}{a^2+\omega^2} + \frac{1}{\omega \sqrt{a^2+\omega^2}} \sin(\omega t - \varphi)$,
$1/\sqrt{p^2+a^2}$	где $\varphi = \arctg \omega/a$
$1/\sqrt{p^2+2ap}$	$J_0(at)$ — функция Бесселя
$\frac{1}{\sqrt{p^2+2ap}} e^{-\tau_0 \sqrt{p^2+2ap}}$	$e^{-at} J_0(jat)$
$\frac{1}{\sqrt{p^2+a^2}} \left(\frac{\sqrt{p^2+a^2}-p}{a} \right)^n$	$e^{-at} J_0(ja \sqrt{t^2-\tau_0^2})$
$\frac{1}{p} e^{-\lambda \sqrt{p}}$	при $t > \tau_0$
	$J_n(at), n > 1$
	$\operatorname{erfc} \left(\frac{\lambda}{2 \sqrt{t}} \right) = 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\lambda}{2 \sqrt{t}} \right)$

лов вместо гармонических колебаний, изображаемых функциями $e^{j\omega t}$, воспользоваться сигналами вида e^{pt} , где p — комплексное число, то преобразования Фурье переходят в преобразования Лапласа:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = F(p) = L\{f(t)\};$$

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} dp = f(t) = L^{-1}\{F(p)\}.$$

Преобразования Фурье и Лапласа широко применяют в ТЛЭЦ для перехода от функций времени $u(t)$, $i(t)$ к их F - или L -изображениям $\dot{U}(\omega)$, $\dot{I}(\omega)$ или $\dot{U}(p)$, $\dot{I}(p)$. При этом, как известно, используют таблицы преобразований. Некоторые L -преобразования, которые потребуются в дальнейшем, приведены в табл. 1.1.

Временное представление. При использовании в качестве элементарных составляющих сложных сигналов импульсов напряжения или тока говорят о временном представлении сигналов.

Импульсное напряжение действует в течение настолько малого промежутка времени τ , что в цепи, предоставленной самой себе, ток за это время практически не изменяется. Единичным импульсом напряжения $\delta(t)$, как известно, называют такой импульс, для которого $\int_{-\infty}^{\infty} u(t) dt = 1$. Соответствующую функцию времени обозначают $\delta(t)$.

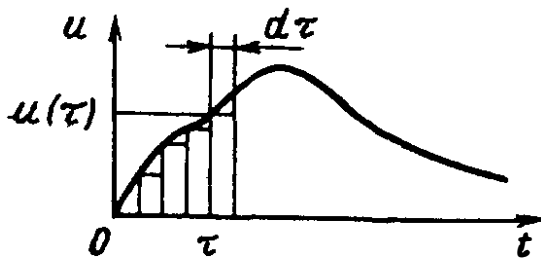


Рис. 1.9

Напряжение конечного во времени произвольно изменяющегося непрерывного сигнала можно представить последовательностью действующих один за другим импульсов (рис. 1.9) и выразить формулой.

$$u(t) = \int_0^t u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (1.14)$$

Здесь $\delta(t - \tau)$ — единичный импульс, действующий в момент τ ; $u(\tau)d\tau$ — как бы значение импульса напряжения, действующего в момент τ , а $u(t)$ представляет собой сумму импульсов, поступающих в последовательные моменты времени. Выражение (1.14) называют **интегралом наложения**, или **сверткой**.

1.4. ВРЕМЕННОЕ И ЧАСТОТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ

Временное представление. Непериодический непрерывный сигнал при сравнительно медленном изменении его напряжения можно представить последовательностью равноотстоящих узких импульсов. Последние получают на входе цепи при подключении непрерывного сигнала через периодически замыкающийся контакт, время замыкания которого по сравнению с периодом замыкания мало (рис. 1.10).

Последовательность импульсов, получающихся на выходе контакта при приложении к входу непрерывного напряжения $u(t)$,

$$u^*(t) = u(t) \sum_k \delta(t - kT) = \sum_k u(kT) \delta(t - kT). \quad (1.15)$$

Выражение (1.15) является дискретным аналогом интеграла наложения (1.14). Спектр напряжения такой последовательности импульсов

$$F[u^*(t)] = \int_0^{\infty} \sum_k u(kT) \delta(t - kT) e^{-j\omega t} dt = \sum_k u(kT) e^{j\omega kT}. \quad (1.16)$$

Частотное представление. Периодическая непрерывная функция времени имеет дискретный линейчатый непериодический спектр. На основании симметрии прямого и обратного преобразований Фурье можно утверждать, что импульсная непериодическая последовательность (дискретный сигнал) имеет периодический непрерывный спектр. Спектр непериодической импульсной последовательности связан со спектром исходного непрерывного сигнала $\dot{U}(\omega)$ выражением

$$F[u^*(t)] = \sum_n u(nT) e^{-j\omega nT} = \dot{U}^*(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \dot{U}(\omega - 2m\omega_1), \quad (1.17)$$

где

$$\omega_1 = \pi/T; \quad \dot{U}(\omega) = F[u(t)].$$

По аналогии с периодически непрерывными сигналами рассмотрим также периодические импульсные (дискретные) сигналы. Периодическую последовательность импульсов можно представить рядом Фурье в виде

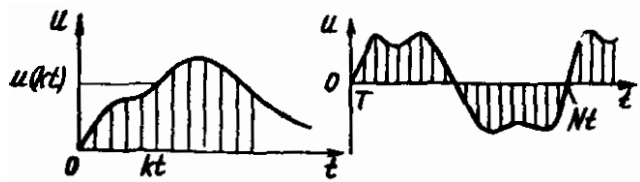


Рис. 1.10

Рис. 1.11

суммы гармонических составляющих с частотами, кратными основной частоте периодической последовательности $\omega_0 = 2\pi/(NT)$, где N — число импульсов в одном периоде последовательности, T — интервал между импульсами (рис. 1.11). Из выражения (1.16) видно, что разложение периодической импульсной последовательности в ряд Фурье содержит всего N различных частотных составляющих с периодом, равным целой части периода колебаний основной частотой ω_0 , поскольку функция $u(t)$ не равна нулю только в дискретные моменты времени kT и, следовательно, $e^{jk\omega_0 T} = e^{jk(2\pi/N)}$ периодически повторяется, если $k > N$. Таким образом, множество N частот определяет все различные частоты, кратные основной частоте ω_0 .

Коэффициенты разложения периодической импульсной последовательности в ряд Фурье, представляющие собой дискретные составляющие спектра,

$$\dot{U}(n\omega_0) = \sum_{k=0}^{N-1} u(kT) e^{-j \frac{2\pi kn}{N}} \quad (1.18)$$

Коэффициенты разложения в последовательность импульсов $u(kT)$ через $\dot{U}(n\omega_0)$

$$u(kT) = \frac{1}{N} \sum_n^{N-1} \dot{U}(n\omega_0) e^{j \frac{2\pi kn}{N}} \quad (1.19)$$

Выражения (1.18) и (1.19) являются парой преобразований, представляющих периодическую последовательность дискретным рядом Фурье (ДРФ). Если рассматривать только один период периодической импульсной последовательности, считая его просто импульсной последовательностью конечной длины, и соответственно один период последовательности коэффициентов в частотной области, то переходим к паре преобразований:

$$\dot{U}(n\omega_0) = \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} u(kT) \exp \left[-j \frac{2\pi kn}{N} \right], \quad 0 \leq k \leq N-1; \right\} \quad (1.20)$$

$$u(kT) = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \dot{U}(n\omega_0) \exp \left[j \frac{2\pi kn}{N} \right], \quad 0 \leq n \leq N-1. \right\} \quad (1.21)$$

$u(t)$	$L[u(t)]$	$z[u^*(t)]$
$1(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$
$1-e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$	$\frac{(1-e^{-\alpha T})z}{(z-1)(z-e^{-\alpha T})}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2-2z \cos \omega T+1}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\frac{z(z-\cos \omega T)}{z^2-2z \cos \omega T+1}$

Выражения (1.20) и (1.21) называют соответственно прямым и обратным дискретными преобразованиями Фурье (ДФФ). Эти выражения весьма удобны для вычисления на ЭВМ, чем и обусловлено их широкое применение при решении различных задач цифровыми методами.

Операторное представление импульсных сигналов. z -преобразование. Если на электрическую цепь действуют импульсные сигналы вида (1.15), то при определении ее реакции на них в момент kT операторным методом вместо преобразования Лапласа $\dot{U}^*(p) = L[u^*]$ удобнее применять специальные преобразования функций $u^*(t)$ в $U(z)$, называемые z -преобразованиями.

Суть z -преобразования заключается в замене $e^{-p k T}$ в выражении $\dot{U}(p) = L[u^*(t)] = \sum_{(k)} u(kT)e^{-p k T}$ на z и введении

$$U(z) = \sum_k u(kT) z^{-k}. \quad (1.22)$$

Переход от e^{pT} к z устраняет многозначность функции $U(p)$, обусловленную периодичностью спектра последовательности, и облегчает вычисление интегралов, с помощью которых осуществляется переход от изображений к оригиналам.

z -преобразования используют подобно преобразованиям Лапласа, они могут быть выполнены по таблицам, которые составляют аналогично таблицам L - и F -преобразований.

Пусть, например, $u(t) = 1(t)$, $L[u(t)] = 1/p$,

$$u^*(t) = \sum_k \delta(t - kT); \quad L[u^*(t)] = \sum e^{-p k T};$$

$$U(z) = \sum_k z^{-k} = z/(z-1);$$

L -преобразованию $1/p$ соответствует z -преобразование $z/(z - 1)$ и

$$u(t) = e^{-\alpha t}; \quad (t > 0); \quad L[u(t)] = \frac{1}{p + \alpha}; \quad u^*(t) = \sum_k e^{-\alpha k T} \delta(t - kT);$$

$$L[u^*(t)] = \sum_k e^{-\alpha k T} e^{-p k T}; \quad U(z) = \sum_k e^{-\alpha k T} z^{-k} = z/(z - e^{-\alpha T});$$

L -преобразованию $1/(p + \alpha)$ соответствует z -преобразование $z/(z - e^{-\alpha T})$. Аналогично можно получить и другие соответствия. Некоторые из них сведены в табл. 1.2.

В табл. 1.2 приведены наиболее часто встречающиеся и используемые далее преобразования.

1.5. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Свойства цепи определяются ее реакцией на те или иные воздействия, поэтому последнюю рассматривают как характеристику цепи. Поскольку каждому воздействию соответствует своя реакция, для цепи можно установить ряд характеристик.

Практически используют несколько характеристик цепи, являющихся ее реакциями на элементарные сигналы, входящие в состав сложных. К таким элементарным сигналам, как мы знаем, относят гармонические колебания, сигналы вида e^{pT} , единичные импульсы, единичные скачки напряжения и др.

Рассмотрим характеристики цепей на примере простой цепи (рис. 1.12). Эта схема-модель может отражать свойства цепей, построенных с использованием самых разнообразных элементов.

Частотные характеристики. Наиболее простым (после постоянного тока) и очень важным практически является установившийся режим гармонических напряжений и токов. В линейной цепи параметры r , L , C не зависят от напряжения и тока и действует принцип наложения.

При расчете цепей переменного тока в условиях установившегося режима символическим методом функцию $\cos \omega t$ или $\sin \omega t$, как известно, условно заменяют функцией $e^{j\omega t}$, обозначаемой также $\exp(j\omega t)$. При этом

$$u(t) \doteq U_M e^{j\omega t}; \quad i(t) \doteq I_M e^{j\varphi} e^{j\omega t}.$$

Левая и правая части этих выражений связаны между собой знаком соответствия. При синусоидальных напряжениях и токах их можно представить равенствами:

$$u(t) = I_m (U_M e^{j\omega t}); \quad i(t) = I_m (I_M e^{j\varphi} e^{j\omega t}).$$

Эта запись означает равенство левой части выражений мнимой составляющей комплексных функций, стоящих в правой части.

При косинусоидальных напряжениях и токах запись тех же соотношений выглядела бы иначе:

$$u(t) = \operatorname{Re}(U_M e^{j\omega t}); \quad i(t) = \operatorname{Re}(I_M e^{j\varphi} e^{j\omega t}).$$

Здесь для получения левой части равенства нужно взять вещественную составляющую правой части. Напомним, что уравнение равновесия напряжений для цепи (см. рис 1.12) имеет вид:

$$ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = u(t). \quad (1.23)$$

Подставляя комплексные выражения напряжения и тока в это уравнение, после несложных преобразований находим

$$I_M e^{j\varphi} = \frac{U_M}{r + j\omega L + 1/j\omega C}.$$

Если обозначить $U_M = \dot{U}_M$; $I_M e^{j\varphi} = \dot{I}_M$; то

$$\dot{I}_M = \frac{\dot{U}_M}{r + j\omega L + 1/(j\omega C)} = \frac{\dot{U}_M}{Z(j\omega)}.$$

Как видно, интегродифференциальное уравнение превратилось в алгебраическое.

Амплитудные значения напряжения и тока обычно заменяют пропорциональными им действующими значениями и в аргументе Z опускают j :

$$I = \dot{U} / Z(\omega). \quad (1.24)$$

Выражение (1.24) есть известный закон Ома для цепи переменного тока, представленный в символической форме, где

$$Z(\omega) = r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = r + jx - \quad (1.25)$$

комплекс полного сопротивления цепи. Его модуль определяет собой отношение амплитудных или действующих значений напряжения и тока, аргумент — угол сдвига фаз между напряжением и током.

В электрических цепях устройств телемеханики и связи обычно приходится иметь дело со значением полного сопротивления не для одной частоты, а для полосы частот $Z(j\omega)$, или $Z(\omega)$. В расчетах часто используют обратную ему величину — комплекс полной проводимости цепи —

$$Y(\omega) = 1/Z(\omega),$$

$Z(\omega)$ и $Y(\omega)$ называют частотными характеристиками цепи.

Комплекс полной проводимости можно представить в виде

$$Y(\omega) = g(\omega) + jb(\omega), \quad (1.26)$$

где $g(\omega) = r / |Z(\omega)|^2$ — активная проводимость цепи;

$b(\omega) = -x / |Z(\omega)|^2$ — реактивная проводимость цепи.

В выражении (1.26) знак реактивной проводимости определяется знаком реактивного сопротивления цепи. Следует отметить, что $g(\omega)$ и $b(\omega)$ как функции частоты взаимно связаны. Если известна одна из этих функций, то в простых случаях по ней всегда можно найти другую. Это означает, что полная проводимость $Y(\omega)$ определяется одной из функций: $g(\omega)$ или $b(\omega)$.

При расчете цепи переменного тока в установившемся режиме можно пользоваться всеми методами расчета, разработанными для цепей постоянного тока. Исключение составляет расчет мощности переменного тока в цепи. Произведение комплексных величин $\dot{U}\dot{I}$ не отражает баланса мощностей в цепи. Модуль комплексного числа $\dot{U}\dot{I}$ правильно определяет значение кажущейся мощности, но его действительная и мнимая части не соответствуют активной и реактивной мощностям. Поэтому при расчете мощности символическим методом пользуются величиной $\dot{S} = \dot{U}\dot{I}^*$, где \dot{I}^* — комплексное число, сопряженное с \dot{I} . Модуль S определяет кажущуюся мощность цепи, а действительная и мнимая части — соответственно активную и реактивную мощности.

Однако в ТЛЭЦ, например, применительно к теории электрической связи часто приходится определять аргумент комплексного числа $\dot{U}\dot{I}$. Что же касается кажущейся мощности, то во многих случаях достаточно знать модуль ее комплекса, т. е. модуль комплекса $\dot{U}\dot{I}$. Для простоты комплекс $\dot{U}\dot{I}$ обозначим S , при этом $S = \dot{U}\dot{I} = \dot{U}^2/Z = Z\dot{I}^2$.

Операторные характеристики. При изображении установившихся гармонических напряжений и токов функцией $e^{i\omega t}$ интегро-дифференциальное уравнение равновесия напряжений (или токов) преобразуется в алгебраическое. То же самое упрощение получается при отображении зависимости напряжений и токов от времени функцией e^{pt} , где p — любое комплексное число.

Для цепи, состоящей из последовательно соединенных активного сопротивления, индуктивности и емкости, уравнение равновесия напряжений принимает вид:

$$ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = Ue^{pt}. \quad (1.27)$$

В правой части этой формулы общее выражение $u(t)$ заменено на Ue^{pt} .

Частное решение, необходимое для составления общего решения уравнения (1.27), следует искать в виде

$$i(t) = Ie^{pt};$$

подставляя это выражение тока в уравнение (1.27) и решая относительно I , получим

$$I = \frac{U}{r + pL + 1/(pC)} = \frac{U}{Z(p)} = Y(p) U. \quad (1.28)$$

Величина

$$Z(p) = r + pL + 1/(pC),$$

как и функция $Z(\omega)$, является важной характеристикой цепи, играющей большую роль в ТЛЭЦ. Величины $Z(p)$ и $Y(p)$ называют операторными характеристиками цепи. В уравнении (1.28) они представляют собой операторное сопротивление и проводимость двухполюсной цепи. В частном случае, когда комплексное число $p =$

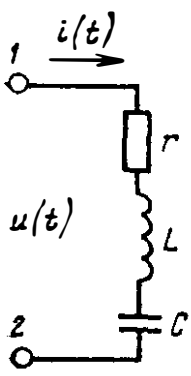


Рис. 1.12

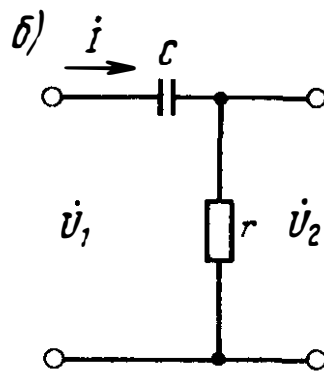
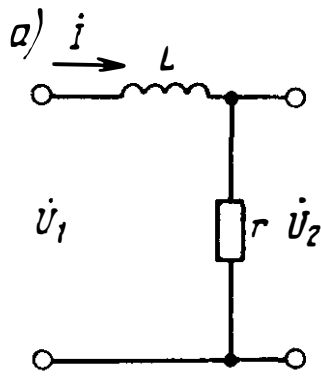
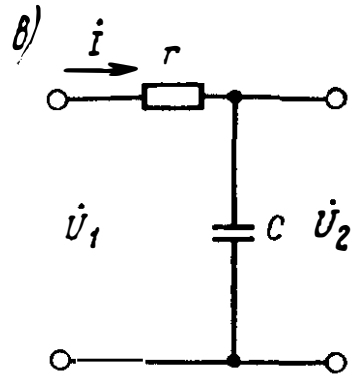


Рис. 1.13



$= j\omega$, операторные характеристики совпадают с частотными, так что достаточно знать любую из них.

Операторные и частотные характеристики определяют не только связи между напряжениями и токами цепей при их двухполюсном включении, но и связи между напряжениями или токами в разных частях цепи и, в частности, между входными и выходными величинами при четырехполюсном использовании цепей (рис. 1.13). В этом случае операторные характеристики безразмерны, их называют функциями передачи. Например, для цепей, схемы которых приведены на рис. 1.13, а и б и им подобным, в качестве характеристики принято рассматривать отношение $\dot{U}_2/\dot{U}_1 = F(p)$. В данном случае функция передачи цепи (рис. 1.13, а)

$$F(p) = \frac{r}{r + pL}, \quad \text{при } r \rightarrow 0 \quad F(p) = \frac{r}{L} \frac{1}{p} -$$

данная цепь является интегрирующей;
для цепи (рис. 1.13, б)

$$F(p) = rCp/(1 + rCp), \quad \text{при } r \rightarrow 0 \quad F(p) = rCp -$$

это дифференцирующая цепь;
для цепи (рис. 1.13, в)

$$F(p) = 1/(1 + rCp), \quad \text{при } r \rightarrow 0 \quad F(p) = 1/(rCp).$$

Временные характеристики. Переходная проводимость цепи при единичном напряжении. Электрические цепи часто подключают к источникам постоянного напряжения. Возникающий при этом ток $i(t)$ зависит от свойств цепи и является, таким образом, ее характеристикой.

Рассмотрим простой случай подключения постоянного напряжения к цепи с r и L . Уравнение цепи имеет вид:

$$ri + L \frac{di}{dt} = u(t)$$

или

$$\frac{di}{dt} = -\frac{r}{L} i + \frac{1}{L} u(t), -$$

это уравнение вида (1.3).

Если начать отсчет времени от момента включения напряжения, т.е. считать, что его включают в момент $t = 0$, а также положить $u(t) = 1$ при $t > 0$, то, как известно, $u(t)$ будет представлять собой так называемую единичную функцию:

$$u(t) = 1(t) = \frac{t + |t|}{2t} = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

График единичной функции $1(t)$ приведен на рис. 1.14. В этом случае

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{r}{L} i(t) + \frac{1}{L} 1(t).$$

Для определения тока, возникающего при воздействии таким напряжением на цепь (см. рис. 1.13, а), находящуюся в нулевом состоянии, воспользуемся решением (1.4):

$$i(t) = \int_0^t e^{-\frac{r}{L}(t-\tau)} \frac{1}{L} u(\tau) d\tau = \int_0^t e^{-\frac{r}{L}(t-\tau)} 1(\tau) d\tau = \frac{1}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right).$$

При включении единичного напряжения численно равную току величину

$$A(t) = \frac{1}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right) \quad (1.29)$$

называют переходной проводимостью цепи. Ток в цепи с постоянным напряжением U определяется перемножением приложенного напряжения и переходной проводимости: $i(t) = UA(t)$. При неограниченном возрастании t в рассмотренном случае $A(t) \rightarrow 1/r$.

Переходная проводимость $A(t)$ представляет собой характеристику цепи, которой удобно пользоваться на практике в ряде важных случаев. Она может быть определена для любой цепи. Для цепи, состоящей из резистора сопротивлением r и конденсатора емкостью C , переходная проводимость

$$A(t) = \frac{1}{r} e^{-\frac{1}{rC}t} \quad (1.30)$$

Вид функции $A(t)$ для любой цепи определяется процессами накопления энергии в электрическом и магнитном полях, связанных с цепью, и преобразованием электрической энергии в тепло, а также предпосылками, принятыми при решении уравнения.

Переходная проводимость связывает напряжение с током и является удобной характеристикой цепи при двухполюсном ее включении.

Аналогичную характеристику можно применять и для четырехполюсных цепей. Так, например, для интегрирующих и дифференцирующих цепей (см. рис. 1.13) можно получить безразмерную переходную функцию при единичном воздействии $H(t) = u_2(t)/1(t)$. Последнее

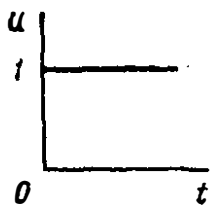


Рис. 1.14

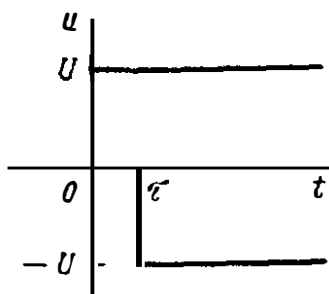


Рис. 1.15

соотношение является символической записью того, что $H(t)$ есть характеристика цепи, полученная по $u_2(t)$ при единичном на нее воздействии.

Для схемы (см. рис. 1.13, а) выходная реакция

$$u_2(t) = ri(t). \quad (1.31)$$

При $u_1(t) = 1(t)$, $i_1 = A(t)$ и $u_2(t) = rA(t) = (1 - e^{-\frac{r}{L}t})$

$$H(t) = \frac{u_2(t)}{1(t)} = \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right). \quad (1.32)$$

При малом r и $u_1(t) = 1(t)$

$$H(t) = \frac{u_2(t)}{1(t)} = \frac{r}{L}t. \quad (1.33)$$

Выражение (1.33) определяет функцию, линейно растущую со временем, т. е. пропорциональную интегралу от $1(t)$ по t .

Для схемы (см. рис. 1.13, б)

$$u_2(t) = ri(t) = rA(t) = e^{-\frac{1}{rC}t};$$

$$H(t) = \frac{u_2(t)}{1(t)} = e^{-\frac{1}{rC}t}; \quad t > 0. \quad (1.34)$$

При малом r и $u_1(t) = 1(t)$ выражение (1.34) определяет функцию, отличную от нуля, только при весьма небольших, близких к нулю значениях t , при которых она приближается к единице, т. е. как раз $\frac{d}{dt} 1(t)$. Если значение постоянного напряжения, включаемого при $t = 0$, равно не 1, а U_B , его называют с к а ч к о м напряжения.

Переходная проводимость цепи при импульсном воздействии. Как уже указывалось, приходится часто определять реакцию электрической цепи на импульсное напряжение. Рассмотрим в качестве примера реакцию неразветвленной цепи с активным сопротивлением r и индуктивностью L на один импульс напряжения. Последний можно получить включением в цепи напряжения U в момент $t = 0$ и напряжения $-U$ в момент τ , где численно $\tau = 1/U$ (рис. 1.15). Применяя принцип наложения и полагая, что полная реакция цепи в этом случае определяется суммой реакций на включение напряжения U и $-U$, найдем ток:

$$i(t) = \frac{U}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right) - \frac{U}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{L}(t-\tau)}\right) = \frac{U}{r} e^{-\frac{r}{L}t} \left(e^{\frac{r}{L}\tau} - 1\right).$$

Так как по условию задачи $\tau = 1/U$ по сравнению с L/r — весьма малая величина и $\frac{r}{L} \tau$ также значительно меньше единицы, то

$$\left(e^{\frac{r}{L} \tau} - 1 \right) \approx \frac{r}{L} \tau = \frac{r}{L} \frac{1}{U}.$$

Подставляя это приближенное значение $e^{-\frac{r}{L} t}$ в ранее полученное выражение для тока, найдем

$$i(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{r}{L} t}.$$

Такой ток возникает в цепи при воздействии на нее единичным импульсом напряжения. Он вполне определяет свойства цепи.

Численно равную току величину

$$K(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{r}{L} t} \quad (1.35)$$

называют переходной проводимостью цепи при возбуждении единичным импульсом напряжения, реакцией цепи на единичный импульс, иногда весовой функцией цепи. Функция $K(t)$, как и $A(t)$, является характеристикой цепи. Ее используют в тех случаях, когда теоретически или экспериментально легче других определяется именно эта величина. Как видно из выражения (1.35), ток в цепи при импульсном воздействии не зависит от формы импульса, его высоты и ширины.

Между переходными проводимостями при единичном напряжении и единичном импульсе, называемыми временными характеристиками, существует зависимость

$$K(t) = \frac{d}{dt} A(t). \quad (1.36)$$

Действительно, согласно уравнению (1.29) для рассмотренного примера цепи, содержащей r и L ,

$$\frac{d}{dt} A(t) = \frac{1}{r} \frac{r}{L} e^{-\frac{r}{L} t} = \frac{1}{L} e^{-\frac{r}{L} t} = K(t).$$

Выражение (1.35) для тока цепи, содержащей индуктивность и активное сопротивление, при действии импульсного напряжения справедливо только при соблюдении условий, принятых в решении. Если в этом выражении $t = 0$, то $i = 1/L$, тогда как известно, что в индуктивной цепи ток может нарастать только плавно. Однако поскольку нарастание тока происходит лишь в течение времени действия импульса весьма малой длительности по сравнению с временем заметного изменения тока в цепи, можно считать, что ток нарастает мгновенно.

Для четырехполюсных цепей выходная реакция на единичный импульс получается аналогично. Так, для схемы (см. рис. 1.13, а)

$$u_2(t) = ri(t) = rK(t) = \frac{r}{L} e^{-\frac{r}{L}t}$$

Принято обозначать

$$\frac{u_2(t)}{\delta(t)} = G(t) = \frac{r}{L} e^{-\frac{r}{L}t}$$

Очевидно, что и

$$G(t) = \frac{d}{dt} H(t). \quad (1.37)$$

Если на цепь действует импульс напряжения $I = \int u(t) dt \neq 1$, то ток в ней $i(t) = IK(t)$.

Передаточная функция дискретной цепи. Эту функцию можно определить по методу, аналогичному операторному, который используется при анализе непрерывных сигналов. При этом, как и при представлении воздействий, вместо преобразования Лапласа применяют z -преобразование. Характеристику дискретной цепи, аналогичную передаточной функции $F(p)$, называют **системной функцией дискретной цепи**. Если реакция цепи на единичный импульс представлена в виде дискретной последовательности $G(kT)$, то системная функция $G(z)$ определяется как z -преобразование импульсной характеристики дискретной цепи:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} G(kT) z^{-k}. \quad (1.38)$$

Так, для цепи, состоящей из резистора сопротивлением r и конденсатора емкостью C , дискретная импульсная характеристика

$$G(kT) = e^{-k \frac{T}{\tau}}; \quad \tau = rC = \frac{1}{\alpha}. \quad (1.39)$$

Применяя к выражению (1.39) z -преобразование, получим следующее выражение для системной функции такой цепи:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k \frac{T}{\tau}} z^{-k} = \frac{1}{1 - e^{-T/\tau} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-T/\tau}}. \quad (1.40)$$

Выражение (1.40) можно найти и по табл. 1.2.

1.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИИ ЦЕПИ НА ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ. СВЯЗИ МЕЖДУ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Если воздействие, приложенное к электрической цепи, является гармоническим, имеет вид e^{pt} или представляет собой скачок (импульс) напряжения или тока, то реакция линейной цепи на такое возбуждение вполне определяется соответствующей ее характеристикой. Однако во многих случаях приложенные к цепям воздействия оказываются более сложными функциями времени. Тогда воздействие, например $u(t)$, представляют в виде суммы напряжений такой формы, реакция цепи на которую известна или может быть легко определена. Реакцию цепи, например ток в цепи, на которую действует такое напряжение, определяют по принципу наложения как сумму токов, вызванных отдельными скачками напряжения, отдельными импульсами или синусоидами.

При частотном представлении воздействия спектром напряжения $\dot{U}(\omega)$, $\dot{U}(\omega)d\omega$ являются комплексной амплитудой гармонического колебания с частотой ω . Амплитуда вызываемого таким напряжением тока

$$\frac{1}{Z(\omega)} \dot{U}(\omega) d\omega.$$

Весь ток как сумма его частотных составляющих определяется интегралом Фурье:

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{Z(\omega)} \dot{U}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.41)$$

При операторном представлении $u(t)$ L -изображением $\dot{U}(p)$

$$i(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} \frac{1}{Z(p)} \dot{U}(p) e^{pt} dp. \quad (1.42)$$

Интеграл наложения может также быть использован для нахождения тока в цепи. Допустим, что нам надо определить ток в цепи при действии на нее напряжения $u(t)$ и мы решили представить $i(t)$ в виде выражения (1.14).

Пусть реакция цепи на единичный импульс, начинающий действовать в момент $t = 0$, $K(t)$, тогда реакция цепи на единичный импульс, начинающий действовать в момент τ , будет $K(t - \tau)$. Если импульс, определяемый выражением $\int u(t) dt$, не равен единице, то реакция цепи на этот импульс длительностью $d\tau$

$$u(\tau) d\tau K(t - \tau),$$

где $u(\tau)$ — значение напряжения в момент τ , определяющее высоту импульса;
 $d\tau$ — ширина импульса;
 $u(\tau) d\tau$ — значение импульса напряжения.

Полная реакция системы на воздействие $u(t)$

$$i(t) = \int_0^t u(\tau) K(t-\tau) d\tau. \quad (1.43)$$

Связь между временными и частотными характеристиками. Все характеристики электрических цепей равноценны. Двухполюсную электрическую цепь можно характеризовать не только сопротивлением $Z(\omega)$ или проводимостью $Y(\omega)$ в установившемся режиме переменного тока, но и переходными проводимостями при единичном напряжении $A(t)$ или единичном импульсе $K(t)$. Переходная проводимость $K(t)$, как и всякая другая характеристика цепи, позволяет определять ток в ней при любой форме кривой приложенного напряжения. Для этой цели можно использовать и функцию $A(t)$. Все это справедливо не только для входных характеристик, но и характеристик, определяющих условия передачи энергии из контура в контур в сложных цепях. Переходные проводимости связаны между собой соотношением (1.36). Существует также связь между временными $K(t)$ и $A(t)$ и частотными $Z(\omega)$ или $Y(\omega)$ характеристиками цепи. Эти зависимости легко устанавливаются при помощи интеграла Фурье.

Действительно, предположим, что к цепи с сопротивлением $Z(\omega)$ приложено напряжение $u(t) = 1(t)$. Тогда возникающий в ней ток $i(t) = 1(t)$. Как отмечалось, величина $A(t)$ численно равна переходной проводимости цепи при единичном напряжении. Имея в виду, что спектр единичного напряжения есть $1/(j\omega)$, в соответствии с выражением (1.41) получим:

$$i(t) = 1(t) A(t) = A(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{Z(\omega)} \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega;$$

$$A(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} d\omega. \quad (1.44)$$

Обратное преобразование дает

$$Y(\omega) = j\omega \int_{-\infty}^{\infty} A(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1.45)$$

Если на цепь с тем же сопротивлением действует единичный импульс напряжения, то возникающий в ней ток $i(t)$ численно равен переходной проводимости $K(t)$:

$$K(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega = F^{-1}[Y(\omega)]. \quad (1.46)$$

Как видно из последнего выражения, функция переходной проводимости $K(t)$ цепи при единичном импульсе и проводимости $Y(\omega)$ цепи в установившемся режиме переменного тока получается одна из другой преобразованием Фурье.

Связь между $K(t)$ и $A(t)$ легко устанавливается и при сопоставлении формул (1.44) и (1.46). Из них следует, что

$$K(t) = \frac{d}{dt} A(t).$$

Аналогичные соотношения имеются и между характеристиками четырехполюсных цепей, и в частности между функциями $H(t)$, $G(t)$, $F(\omega)$:

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega; \quad (1.47)$$

$$G(t) = \frac{d}{dt} H(t). \quad (1.48)$$

Реакция четырехполюсной цепи $u_2(t)$ на произвольное воздействие $u_1(t)$ может быть определена использованием любой из ее характеристик по следующим выражениям:

$$u_2(t) = \int_0^t u_1(\tau) G(t-\tau) d\tau; \quad (1.49)$$

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_1(\omega) F(\omega) e^{j\omega t} d\omega;$$

$$\dot{U}_1(\omega) = \int_0^{\infty} u_1(t) e^{-j\omega t} dt; \quad (1.50)$$

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} \dot{U}_1(p) F(p) e^{pt} dp;$$

$$\dot{U}_1(p) = \int_0^{\infty} u(t) e^{-pt} dt. \quad (1.51)$$

Поскольку все характеристики цепей в равной степени определяют их свойства, а для разветвленных цепей проще всего находятся частотные $F(\omega)$ или операторные $F(p)$ характеристики (переход от одной к другой осуществляется заменой $j\omega$ на p), то далее в основном рассматриваются методы определения последних.

1.7. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Параметрические элементы и способы их получения. Параметрическими называют электрические цепи, содержащие элементы с переменными во времени управляемыми параметрами. Такие цепи находят все большее применение в разнообразных устройствах телемеханики и связи.

Примером параметрического элемента может служить периодически замыкающийся контакт, превращающий непрерывный сигнал $u(t)$

в дискретный $u(k\Delta t)$. Такой контакт может быть механическим или электронным, однако в любом случае его замыкание и размыкание вызываются внешним управляющим воздействием. Связи между напряжениями и токами в элементах с переменными параметрами существенно отличаются от таковых в цепях с постоянными во времени параметрами. Если при прохождении в цепи постоянного тока i на резисторе с постоянным сопротивлением r падает постоянное напряжение $u = ri$, то на переменном сопротивлении $r(t)$ постоянный ток вызывает падение напряжения $u(t) = r(t)i$.

В цепи с постоянной индуктивностью

$$u_L(t) = \frac{d}{dt} \Phi(t) = \frac{d}{dt} Li(t) = L \frac{di(t)}{dt}.$$

Если же индуктивность цепи L зависит от времени, то

$$u_L(t) = \frac{d}{dt} \Phi(t) = \frac{d}{dt} [L(t)i(t)] = L(t) \frac{di(t)}{dt} + i(t) \frac{dL(t)}{dt}. \quad (1.52)$$

Для конденсатора с переменной емкостью $C(t)$ связь между током и напряжением имеет вид:

$$i_c(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [C(t)u(t)] = C(t) \frac{du(t)}{dt} + u(t) \frac{dC(t)}{dt}. \quad (1.53)$$

Получение элементов цепей с переменными параметрами основано на использовании нелинейности характеристик электронных и полупроводниковых устройств, катушек с ферромагнитными сердечниками и т. п. Для этого к нелинейному элементу одновременно с напряжением сигнала подводят постоянное напряжение, устанавливающее рабочую точку на характеристике нелинейного элемента, а также переменное управляющее напряжение, значительно превышающее напряжение сигнала. Управляющее напряжение предназначено для смещения рабочей точки на характеристике нелинейного элемента для изменения соответствующего параметра последнего. Управляющее напряжение называют также *напряжением качки*. Закон изменения во времени параметра нелинейного элемента определяется законом изменения управляющего напряжения. Напряжение сигнала и управляющее напряжение при подаче их на нелинейный элемент разделяются друг от друга. В этих условиях по отношению к напряжению сигнала и реакции на него цепь ведет себя как линейная и свойства ее не зависят от характера нелинейности управляемого элемента.

На рис. 1.16, а и б приведены схемы соответственно двух и четырехполюсных параметрических цепей.

Резистивные параметрические цепи. Примером резистивного параметрического элемента может служить упоминавшийся в § 1.4 периодически замыкающийся контакт. Его проводимость

$$g(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \delta(t - n\Delta t). \quad (1.54)$$

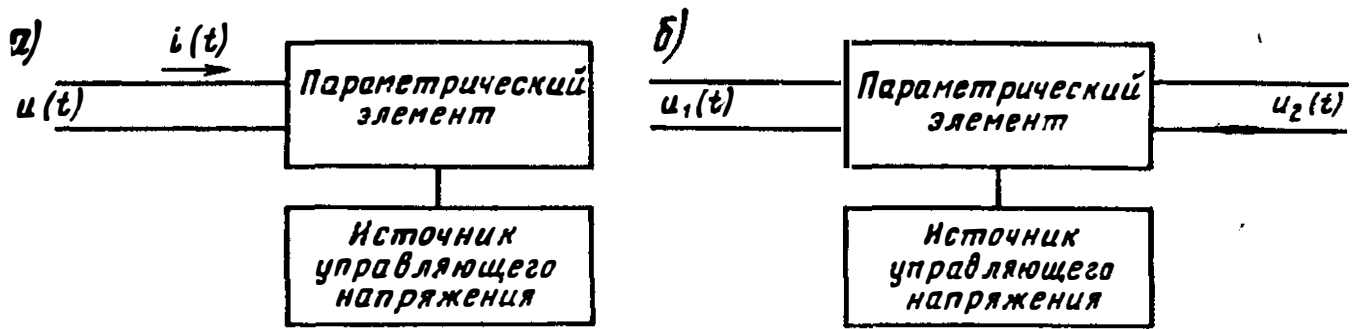


Рис. 1.16

Если к двухполюснику с проводимостью (1.54) подвести напряжение $u(t)$, то ток в нем будет представлять собой последовательность импульсов:

$$i(t) = g(t) u(t) = u(t) \sum_{n=0}^{n=\infty} \delta(t - n\Delta t) = i(n\Delta t).$$

Другим практически важным примером является цепь, передаточная функция которой $g_{12} = u_2(t)/u_1(t)$ изменяется по закону

$$g_{12}(t) = \cos \omega_H t. \quad (1.55)$$

Схема, реализующая такую функцию передачи, приведена на рис. 1.17. Ток, вызываемый напряжением накачки $u_H(t) = U_H \cos \omega_H t$, разветвляется на две равные части, проходящие по полуобмоткам трансформаторов в противоположных направлениях. Поэтому напряжение накачки не влияет на источник сигналов (подключенный к зажимам 1—2) и приемник (подключенный к зажимам 3—4). Этим достигается развязка цепей накачки и сигналов. В то же время проводимость диодов $VD1$ и $VD2$ изменяется по гармоническому закону с частотой ω_H . Напряжение сигнала $u_1(t)$ вызывает в цепи с диодами ток, проходящий по полуобмоткам трансформаторов в одном направлении. Этот ток обуславливает появление на зажимах 3—4 переменного напряжения $u_2(t)$, амплитуда которого изменяется в соответствии с законом изменения $u_1(t)$. В то же время оно является переменным напряжением частотой ω_H , так как с этой частотой под воздействием напряжения накачки изменяется проводимость диодов. Таким образом, с точностью до постоянного множителя

$$u_2(t) = u_1(t) \cos \omega_H t.$$

Если $u_1(t) = \cos \Omega t$, то

$$u_2(t) = \cos \Omega t \cos \omega_H t. \quad (1.56)$$

В соответствии с известным тригонометрическим соотношением

$$\cos x \cos y = 0,5 [\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$

напряжение $u_2(t)$, определяемое выражением (1.56), можно представить в виде

$$u_2(t) = \cos \Omega t \cos \omega_H t = 0,5 \cos(\omega_H - \Omega) + 0,5 (\omega_H + \Omega). \quad (1.57)$$

Включив на выходе цепи резонансный контур, пропускающий только одно из колебаний напряжения $u_2(t)$, например колебание частотой $\omega_H + \Omega$, получим устройство, преобразующее колебание $u_1(t) = \cos \Omega t$ с частотой Ω в колебание $u_2(t) = \frac{1}{2} \cos(\omega_H + \Omega)$ с частотой $(\omega_H + \Omega)$. Такое преобразование называют преобразованием частоты, или модуляцией, а частоту ω_H в таких случаях — несущей.

Конденсатор с переменной емкостью. В качестве переменной управляемой емкости используют емкость перехода любого полупроводникового прибора. На практике применяют электронные управляемые емкости, называемые в а р и к а п а м и.

Связь между напряжением и током в конденсаторе с переменной емкостью определяют соотношением (1.53). Для углубления понимания рассмотрим процессы и энергетические соотношения в указанном конденсаторе с физической точки зрения.

Предположим для простоты, что емкость конденсатора изменяется перемещением одной из образующих его пластин. Пусть конденсатор заряжен и на его пластинах находятся заряды $\pm q$. Разность потенциалов на обкладках $U_c = q/C_0$, где C_0 — емкость, соответствующая исходному положению пластин. В электрическом поле имеется запас энергии $q^2/2C_0$. Если предоставить подвижной пластине возможность двигаться под действием сил притяжения разноименных зарядов, то пластины сблизятся, емкость возрастет, запас энергии $q^2/[2(C_0 + \Delta C)]$ снизится, так как часть ее израсходовалась на перемещение пластины. Величина U_c также уменьшится. Если, наоборот, используя внешнюю силу и преодолевая силы притяжения зарядов, раздвинуть пластины, то емкость уменьшится, энергия $q^2/[2(C_0 - \Delta C)]$ станет больше. Приращение энергии будет равно работе, затраченной на раздвижение пластин, возрастет и U_c .

Рассмотрим конденсатор, находящийся под переменным напряжением $u(t)$, емкость которого уменьшается при максимальных мгновенных значениях напряжения на нем и увеличивается при нулевых его значениях (рис. 1.18, а и б).

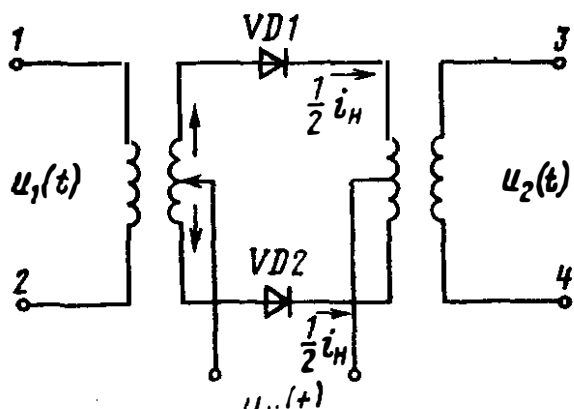


Рис. 1.17

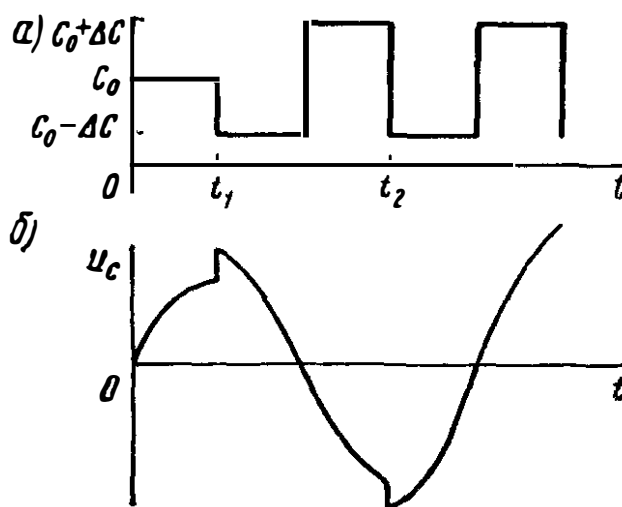


Рис. 1.18

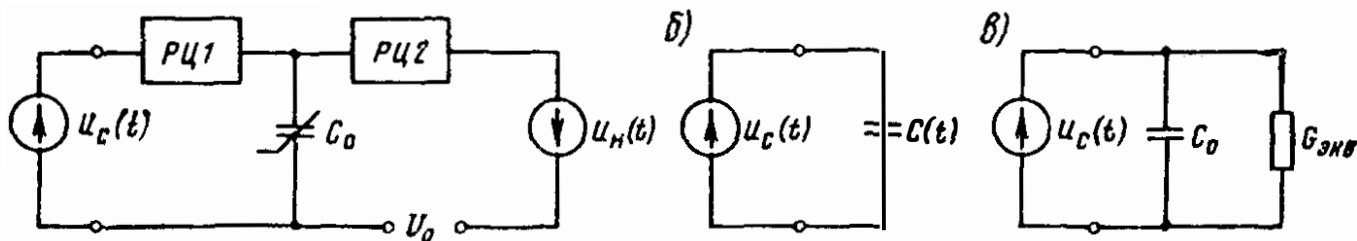


Рис. 1.19

В моменты времени t_1, t_2, \dots , когда емкость конденсатора уменьшается, напряжение и запасенная энергия увеличиваются, происходит накачка энергии в конденсатор. Если в эти моменты (напряжение сигнала достигает максимума) будет увеличиваться емкость, напряжение на конденсаторе и его энергия будут уменьшаться. Регулируя возрастание напряжения уменьшением емкости на определенное значение ΔC , можно в цепи с таким конденсатором получить как усиление, так и параметрическую генерацию.

Скачкообразное изменение емкости технически трудно реализуемо, и поэтому на практике применяют ее гармоническое изменение. Схема включения варикапа в этом случае приведена на рис. 1.19, а. Здесь $u_c(t) = U_c \cos \omega_c t$ — напряжение сигнала частотой ω_c , $u_H(t) = U_H \times \times \cos(\omega_H t + \varphi_H)$ — управляющее напряжение (напряжение накачки), его частота $\omega_H = 2\omega_c$, U_0 — постоянное напряжение, определяющее значение C_0 , причем $U_0 > U_H \leq U_c$; PC1 — развязывающая цепь, пропускающая колебания частотой ω_c и задерживающая колебания частотой $\omega_H \approx 2\omega_c$. Такая цепь может быть реализована последовательно соединенными катушкой и конденсатором, имеющими резонанс на частоте $\omega \approx \omega_c$; PC2 — развязывающая цепь, пропускающая напряжение накачки к варикапу и препятствующая ответвлению тока с частотой ω_c через источники $u_H(t)$ и U_0 .

Условие $U_c \leq U_H < U_0$ позволяет пренебречь изменением емкости варикапа под воздействием $u_c(t)$ и представить суммарное управляющее напряжение в виде

$$u_{упр}(t) = U_0 + U_H \cos(\omega_H t + \varphi_H) = U_0 (1 + m \cos(\omega_H t + \varphi_H)),$$

где $m = U_H/U_0$.

Изменение емкости во времени в этом случае

$$C(t) = \frac{C_0}{1 + m \cos(\omega_H t + \varphi_H)} \approx C_0 - \Delta C \cos(\omega_H t + \varphi_H), \quad (1.58)$$

где $\Delta C = mC_0$.

Таким образом, приведенную на рис. 1.19, а схему можно заменить эквивалентной (рис. 1.19, б). В соответствии с эквивалентной схемой и выражениями (1.53) и (1.58) ток через емкость $C(t)$ при воздействии $u_c(t) = U_0 \cos \omega_c t$ будет:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{d}{dt} q(t) = C(t) \frac{d}{dt} u_c(t) + u_c(t) \frac{d}{dt} C(t) = \\ &= [C_0 - \Delta C \cos(\omega_H t + \varphi_H)] [-\omega_c U_c \sin \omega_c t] + \\ &+ U_c \cos \omega_c t \Delta C \sin(\omega_H t + \varphi_H) = -\omega_c C_0 \sin \omega_c t + 0,5 (\omega_H - \omega_c) \Delta C U_0 \times \\ &\times \sin[(\omega_H - \omega_c)t + \varphi_H] + 0,5 (\omega_H + \omega_c) \Delta C U_0 \sin[(\omega_H + \omega_c)t + \varphi_H]. \quad (1.59) \end{aligned}$$

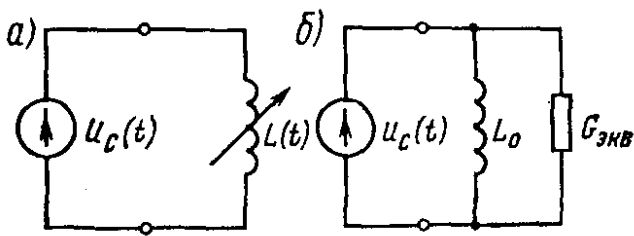


Рис. 1.20

Ток $i(t)$ содержит три составляющие с частотами ω_c , $\omega_H - \omega_c$ и $\omega_H + \omega_c$. Развязывающая цепь РЦ (см. рис. 1.19, а) составляющей тока с частотой $\omega_H + \omega_c \approx 3\omega_c$ будет оказывать большое сопротивление, и поэтому ею можно пренебречь. Тогда

$$i(t) = -\omega_c C_0 U_c \sin \omega_c t + 0,5 (\omega_H - \omega_c) \Delta C U_0 \sin [(\omega_H - \omega_c) t + \varphi_H]. \quad (1.60)$$

Поскольку к конденсатору емкостью $C(t)$ подведено напряжение $u_c(t) = U_c \cos \omega_c t$, первое слагаемое в выражении (1.60) $i_p(t) = -\omega_c C_0 U_c \sin \omega_c t$ представляет собой реактивную составляющую тока, сдвинутую по фазе относительно u_c на 90° . Эта составляющая в переносе энергии сигнала не участвует и определяется постоянной составляющей емкости C_0 , как в случае конденсатора с постоянной емкостью.

Активная составляющая тока

$$i_a(t) = 0,5 (\omega_H - \omega_c) \Delta C U_c \sin [(\omega_H - \omega_c) t + \varphi_H] = 0,5 I_a \cos [\omega_c t - (0,5\pi - \varphi_H)],$$

как видно, зависит от фазы напряжения накачки — φ_H .

Отдаваемая источником сигнала мощность

$$P_c = U_c I_a \cos (0,5\pi - \varphi_H) = U_c^2 G_{\text{экв}}, \quad (1.61)$$

где $G_{\text{экв}} = 0,5 (\omega_H - \omega_c) \Delta C \sin \varphi_H$.

Изменение емкости конденсатора ведет к потреблению активной мощности. Таким образом, конденсатор с переменной емкостью энергетически ведет себя как конденсатор с постоянной емкостью, шунтированный активной проводимостью $G_{\text{экв}}$. Этому соответствует схема замещения (рис. 1.19, в), являющаяся линейной моделью, содержащей нелинейный элемент цепи (см. рис. 1.19, а). На рис. 1.19, в $G_{\text{экв}} = 0,5 \times \times \omega_c \Delta C \sin \varphi_H$.

Катушка с переменной индуктивностью. Все сказанное о конденсаторе с переменной емкостью легко переносится на катушки с переменной индуктивностью. В катушку с ферромагнитным сердечником для управления индуктивностью следует ввести обмотку подмагничивания, ток в которой, изменяя режим насыщения сердечника, изменяет и индуктивность основной обмотки.

Рассмотрим цепь с переменной индуктивностью (рис. 1.20, а), на которую действует напряжение $u_c(t) = U_0 \cos \omega_c t$. Пусть индуктивность изменяется по закону

$$L(t) = L_0 + \Delta L \cos (\omega_H t + \varphi_H).$$

Ток в цепи

$$\begin{aligned} i_L(t) &= \frac{1}{L(t)} \int u_L(t) dt = \frac{1}{(L_0 + \Delta L \cos (\omega_H t + \varphi_H))} \frac{U_0}{\omega_c} \sin \omega_c t \approx \\ &\approx \frac{U_c}{\omega_c L_0} \left\{ \sin \omega_c t + \frac{\Delta L}{2L_0} \sin [(\omega_H - \omega_c) t + \varphi_H] - \frac{\Delta L}{2L_0} \sin [(\omega_H + \omega_c) t + \varphi_H] \right\}. \end{aligned}$$

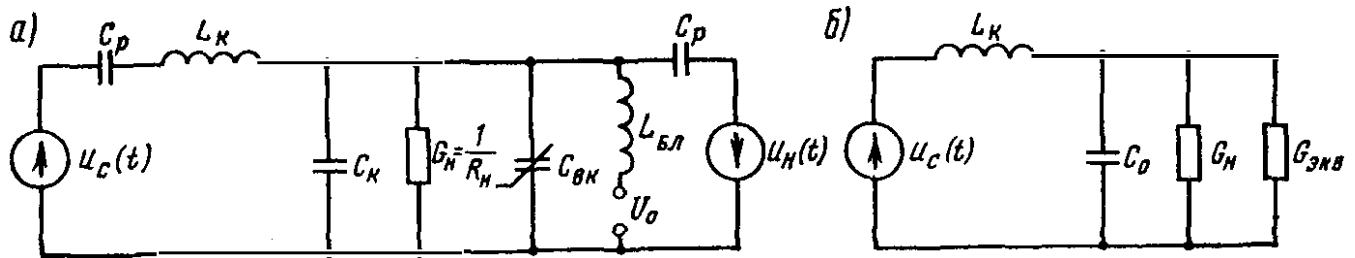


Рис. 1.21

Если принять $\omega_n \approx 2\omega_c$ и пренебречь током с частотой $3\omega_c$, то

$$i_L(t) \approx \frac{U_c}{\omega_c L_0} \sin \omega_c t + \frac{U_c \Delta L}{2\omega_c L_0} \cos \left[\omega_c t - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_n \right) \right].$$

Первое слагаемое этого выражения является реактивной составляющей тока. Активная составляющая

$$i_a(t) = \frac{U_c \Delta L}{2\omega_c L_0} \cos \left[\omega_c t - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_n \right) \right] = I_a \cos \left[\omega_c t - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_n \right) \right].$$

Цепь потребляет энергию мощностью

$$P_L = U_c I_a = U_c^2 G_{\text{экв}},$$

где $G_{\text{экв}} = \frac{\Delta L}{2\omega_c L_0} \sin \varphi_n.$

Рассматриваемая цепь энергетически эквивалентна цепи (рис. 1.20, б), которая представляет собой линейную модель катушки с обмоткой подмагничивания.

Параметрический усилитель. Если в колебательный контур включить переменную емкость или индуктивность, то можно получить усиление колебаний. Схема простейшего параметрического усилителя с переменной емкостью приведена на рис. 1.21, а. Разделительные конденсаторы C_p ограждают источники напряжения сигнала и напряжения накачки от постоянного напряжения U_0 и должны иметь большую емкость. Блокировочный дроссель $L_{бл}$ предотвращает шунтирование источников $u_c(t)$ и $u_n(t)$ малым внутренним сопротивлением источника. L_k и C_k — постоянные составляющие индуктивности и емкости контура. Проводимость G_n отражает расход мощности в нагрузке.

Если $\omega_n \approx 2\omega_c$, то режим работы усилителя называют синхронным. Соответствующая схема замещения приведена на рис. 1.21, б. Здесь не показаны разделительные конденсаторы большой емкостью C_p . Конденсатор C_0 отображает сумму емкостей C_k и C_0 варикапа. Параллельное подключение отрицательной эквивалентной $G_{\text{экв}} = -0,5 m\omega C_0$ и положительной G_n проводимостей уменьшает последнюю, снижает потребление энергии от источника сиг-

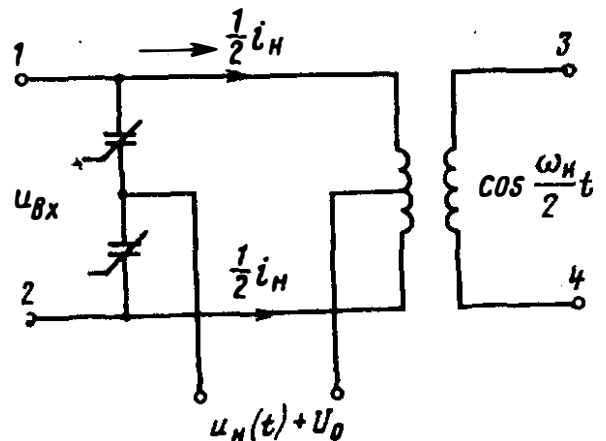


Рис. 1.22

нала и обеспечивает большее напряжение u_c на конденсаторе по сравнению с $u_{\text{сигн}}$ на контуре.

Как отмечалось, напряжение на конденсаторе увеличивается с уменьшением его емкости (см. рис. 1.18). Последнее должно происходить в моменты прохождения напряжения сигнала через амплитудные значения, напряжение на конденсаторе возрастает также и при изменении фазы напряжения накачки на 180° .

Свободные колебания в контуре с параметрическим реактивным элементом. Как известно, свободными колебаниями в электрических цепях называют колебания, происходящие после прекращения действия внешних возмущений. В колебательном контуре свободные колебания возникают в случае наличия на конденсаторе первоначального заряда или тока в катушке индуктивности. Частота таких колебаний $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, а фаза может быть произвольной.

Если один из элементов контура, например емкость, является параметрическим, то усиление и поддержание свободных колебаний осуществляются за счет энергии, поступающей из цепи накачки. Следует, однако, отметить, что такое поддержание собственных колебаний в контуре с параметрической емкостью возможно только при определенных фазовых соотношениях между собственными колебаниями в контуре и колебаниями напряжения накачки. Собственные колебания в таком контуре могут иметь только две фазы, отличающиеся друг от друга на 180° .

Параметрон. Параметрическую цепь, основу которой составляет колебательный контур с параметрическим элементом, называют параметроном. Так как установление фазы колебаний φ или $\varphi + \pi$ зависит от начальных условий, то, задавая сигналом в момент запуска начальную фазу, можно получить один из двух устойчивых колебательных режимов. Таким образом, параметрон может различать слабые гармонические сигналы с неодинаковыми фазами.

Пример схемы параметрона с управляемой емкостью приведен на рис. 1.22. В качестве переменной емкости использованы два варикапа, индуктивностью служит обмотка трансформатора. Из цепи накачки подается напряжение $U_n(t) + U_0 = U_n \cos \omega_n t + U_0$. Частота напряжения накачки ω_n вдвое превышает частоту резонанса контура. Емкость конденсаторов уменьшается или увеличивается синфазно. Взаимные влияния цепей накачки и колебаний устраняют симметрией схемы. Постоянным напряжением U_0 устанавливаются рабочие точки нелинейных элементов.

Глава 2

ПРИЕМЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

2.1. ПРИМЕРЫ РАЗВЕТВЛЕННЫХ ЦЕПЕЙ В УСТРОЙСТВАХ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЙ ТЕЛЕМЕХАНИКИ И СВЯЗИ

Электрические цепи устройств телемеханики и связи, как правило, разветвленные. Рассмотрим, например, часть схемы кодированной станционной рельсовой цепи (блок БПК) (рис. 2.1, а). На рисунке показана также цепь тягового тока, обтекающего рельсовые нити. Если сопротивления последних неодинаковы, то в рельсовую цепь вместе с сигнальными токами попадает часть тягового тока, оказывающего мешающее действие. При рассмотрении питающего конца рельсовой цепи схему, приведенную на рис. 2.1, а, можно упростить, заменив цепь тягового тока эквивалентным источником напряжения, рельсовую цепь —

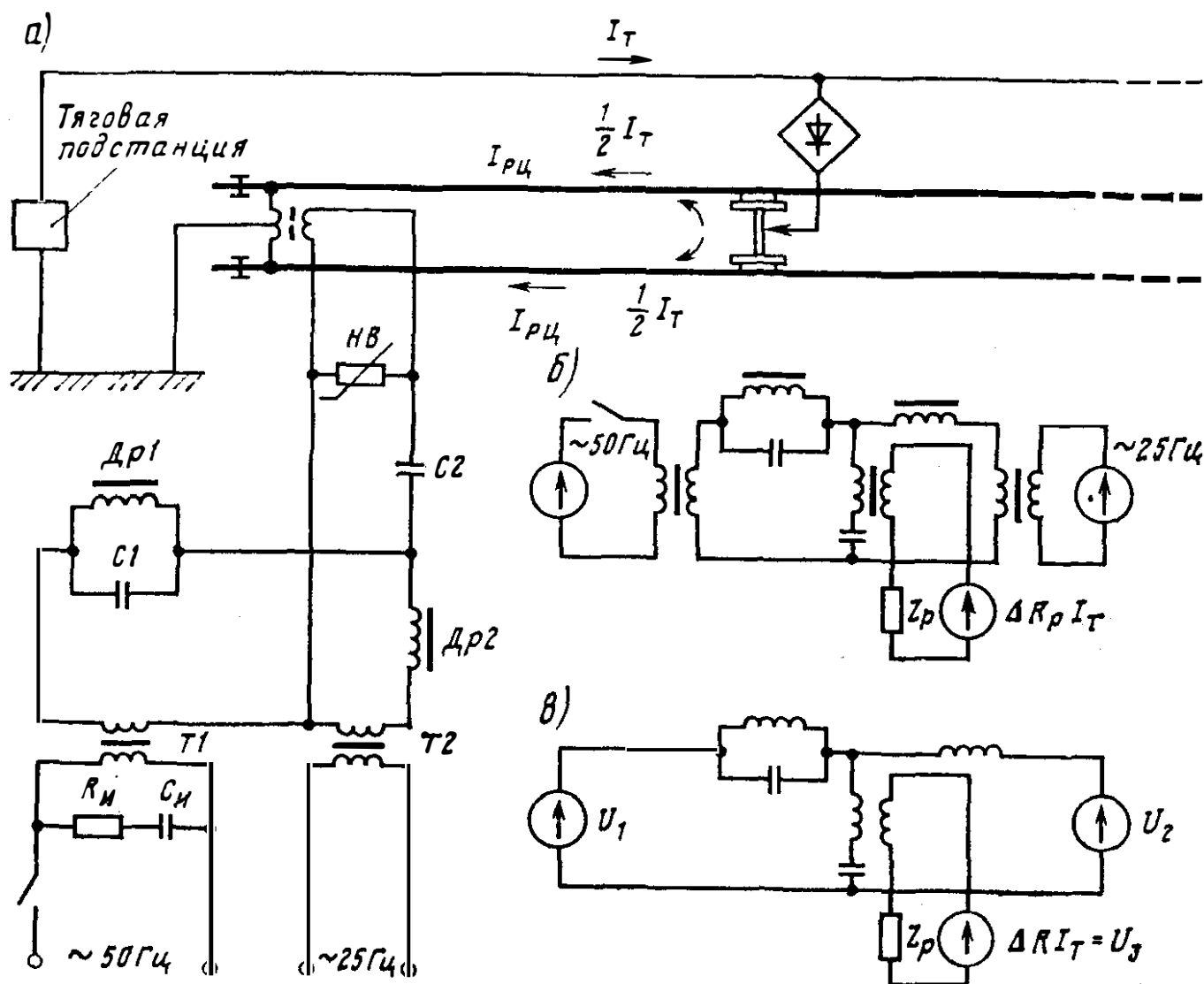


Рис. 2.1

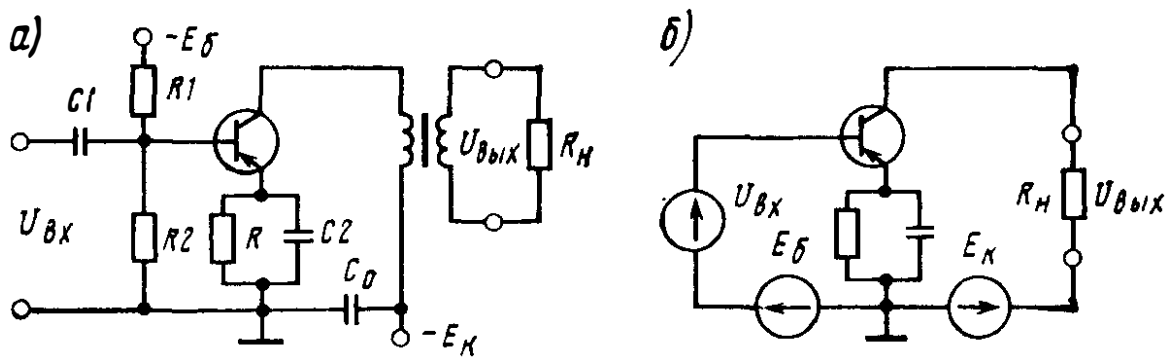


Рис. 2.2

ее входным сопротивлением Z_p и опустив второстепенные элементы, например цепь искрогашения $R_{и}$, $C_{и}$ (рис. 2.1, б). Дальнейшее упрощение схемы получается при замене выходов трансформаторов $T1$ и $T2$ эквивалентными источниками напряжения (рис. 2.1, в). Эта схема содержит три взаимосвязанных контура, в каждом из которых действуют независимые источники напряжения с разными частотами.

Рассмотрим также схему транзисторного усилителя (рис. 2.2, а), применяемого в устройствах телемеханики и связи. Как и в случае рельсовой цепи, ее можно заменить эквивалентной схемой (рис. 2.2, б). Следующий шаг по упрощению схемы усилителя может заключаться в замене транзистора его эквивалентной схемой.

Как и в первом примере, схема усилителя представляет собой многоконтурную цепь с действующими в контурах источниками напряжения. При этом один из источников напряжения $U_{вх}$ представляет собой усиливаемый сигнал, а два других источника постоянных напряжений $E_б$ и $E_к$ обеспечивают режим транзистора по постоянному току.

В обоих случаях мы сталкиваемся с многоконтурностью и разнообразием форм напряжений действующих источников.

В разветвленных цепях устройств телемеханики и связи одновременно действуют источники напряжения самой разнообразной формы в отличие от сетей энергоснабжения, в которых напряжения совместно питающих сеть электростанций имеют одно и то же значение и частоту.

Однако если пользоваться операторными изображениями напряжения $U(p)$, токов $I(p)$ и сопротивлений $Z(p)$, то при расчете цепей с источниками напряжения произвольной формы можно применять те же приемы, что и при расчете резистивных цепей или цепей переменного тока символическими методами. Во всех случаях действуют закон Ома и законы Кирхгофа.

2.2. ГРАФ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Простейшие электрические цепи имеют только одну ветвь или только два узла. Связь между напряжением и током в таких цепях вполне определяется одной из ее характеристик: $Z(p)$, $Y(p)$, $K(t)$, $A(t)$, ...

В разветвленной цепи связи между напряжениями и токами определяются характеристиками отдельных ветвей и способом соединения последних между собой. Свойства отдельных ветвей разветвленных це-

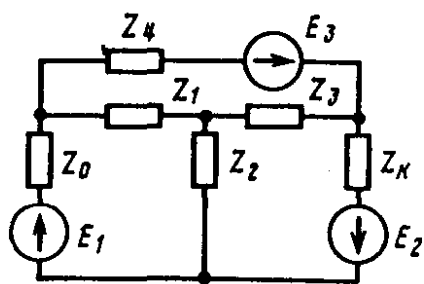


Рис. 2.3

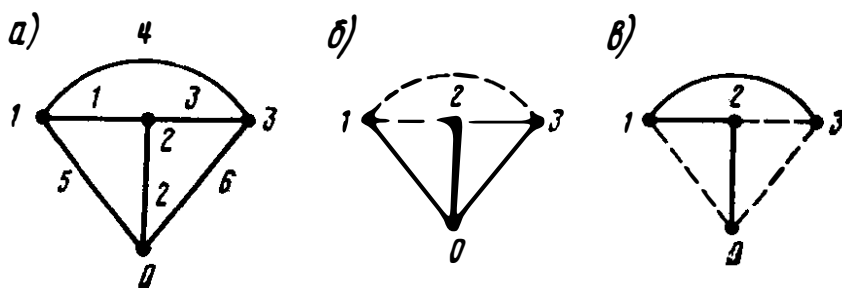


Рис. 2.4

пей чаще всего характеризуются их полными сопротивлениями Z_i (p) или проводимостями Y_i (p), где i — номер ветви. Способ соединения ветвей между собой зависит от схемы цепи и может быть отображен ее графом — чертежом, показывающим соединения ветвей цепи между собой. Граф электрической цепи (рис. 2.3) приведен на рис. 2.4, а. В нем различают узлы и ветви. Один из узлов выбирают базисным. Если на ветвях графа цепи стрелками обозначены выбранные условные направления тока, то граф называют ориентированным.

Все ветви графа можно разбить на две части. В первую входят незамкнутые последовательности ветвей, проходящие через все узлы графа. Образующую этими ветвями геометрическую фигуру называют деревом графа. Во вторую входят ветви, подключение которых образует замкнутые контуры. Эти ветви называют замыканиями (иногда ребрами) графа. Разбить ветви графа на дерево и замыкания можно многими способами, два из них для рассматриваемого графа приведены на рис. 2.4, б и в. Здесь ветви дерева изображены сплошными линиями, а замыкания — штриховыми.

Каждый контур, образованный подключением к дереву графа одной из ветвей замыканий, является независимым, поскольку содержит в себе ветвь — замыкание —, входящую только в данный контур. Поэтому число ветвей — замыканий графа — равно числу независимых контуров цепи.

В графе цепи можно выделить пути — незамкнутые последовательности ветвей, при которых в каждый узел входит и выходит по одной ветви. Как будет показано далее, использование понятий графа цепи, деревьев, замыканий и путей графа облегчает расчет цепей.

2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВХОДНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ (ПРОВОДИМОСТЕЙ) И СОПРОТИВЛЕНИЙ (ПРОВОДИМОСТЕЙ) ПЕРЕДАЧИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Рассмотрим схему, приведенную на рис. 2.3. Допустим, что заданными активными элементами в ней являются источники напряжения, а определению подлежат токи. Эту задачу удобно решить методом контурных токов, выбрав в качестве последних искомые токи.

Уравнения равновесия напряжений для трех контуров цепи:

$$\begin{aligned} Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2 + Z_{13} i_3 &= \dot{U}_1; \\ Z_{21} i_1 + Z_{22} i_2 + Z_{23} i_3 &= \dot{U}_2; \\ Z_{31} i_1 + Z_{32} i_2 + Z_{33} i_3 &= \dot{U}_3. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Решим систему (2.1) методом Крамера (с помощью определителей). Решение для тока i_i ($i = 1, 2, 3$) будет

$i_i = \Delta_i / \Delta$, в котором столбец с номером заменен свободными членами, где Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_0 + Z_1 + Z_2 & -Z_2 & -Z_1 \\ -Z_2 & Z_2 + Z_3 + Z_K & -Z_3 \\ -Z_1 & -Z_3 & Z_1 + Z_3 + Z_4 \end{vmatrix} -$$

определитель, составленный из коэффициентов системы уравнений (2.1).

Разлагая стоящий в числителе определитель по элементам i -го столбца (содержащего \dot{U}_j), найдем ток как сумму трех слагаемых, зависящих соответственно от $\dot{U}_1 - \dot{U}_3$. Полное решение системы (2.1) будет:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \dot{U}_1 + \frac{\Delta_{21}}{\Delta} \dot{U}_2 + \frac{\Delta_{31}}{\Delta} \dot{U}_3; \\ i_2 &= \frac{\Delta_{12}}{\Delta} \dot{U}_1 + \frac{\Delta_{22}}{\Delta} \dot{U}_2 + \frac{\Delta_{32}}{\Delta} \dot{U}_3; \\ i_3 &= \frac{\Delta_{13}}{\Delta} \dot{U}_1 + \frac{\Delta_{23}}{\Delta} \dot{U}_2 + \frac{\Delta_{33}}{\Delta} \dot{U}_3. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь Δ_{ij} — алгебраические дополнения элемента Z_{ij} в определителе Δ ; $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}$ — минор, остающийся после вычеркивания в определителе i -й строки и j -го столбца.

Коэффициенты Δ_{ij}/Δ , входящие в выражение для токов, по смыслу и размерности представляют собой проводимости.

Проводимости

$$Y_{ii} = \Delta_{ii}/\Delta \quad (2.3)$$

называют в х о д н ы м и, они связывают напряжение \dot{U}_i , действующее в контуре i , с током в том же контуре (и той же ветви), если указанное напряжение в контуре единственное.

Проводимости

$$Y_{ij} = \Delta_{ij}/\Delta \quad (2.4)$$

связывают напряжение, действующее в контуре i с током в контуре j , их называют п р о в о д и м о с т я м и п е р е д а ч и. Указанные проводимости связывают напряжение источника с нулевым внутренним сопротивлением с током в замкнутом контуре и поэтому их называют и н а ч е — п р о в о д и м о с т я м и к о р о т к о г о з а м ы к а н и я.

Разумеется, можно пользоваться и обратными величинами: в х о д н ы м и с о п р о т и в л е н и я м и

$$Z_{ii} = \Delta / \Delta_{ii} \quad (2.5)$$

и с о п р о т и в л е н и я м и п е р е д а ч и

$$Z_{ij} = \Delta / \Delta_{ij}. \quad (2.6)$$

По формулам (2.3)—(2.6) определяют токи по заданным напряжениям, но они не позволяют анализировать связи между напряжениями и токами в зависимости от сопротивлений отдельных ветвей цепи, в частности от сопротивлений генераторов и приемников.

В схеме (см. рис. 2.3) при определении Z_{12} , связывающего \dot{U}_1 и \dot{I}_2 , сопротивление генератора представляют сопротивлением Z_0 , а приемника — сопротивлением Z_K . Величины Z_{ii} , Y_{ii} , Z_{ij} , Y_{ij} будем далее называть в х о д н ы м и и п е р е д а т о ч н ы м и функциями цепи.

Полной характеристикой неразветвленной цепи является ее сопротивление, а характеристикой разветвленной цепи — совокупность собственных и взаимных сопротивлений контуров, образующих определитель Δ . Зная последний, можно в соответствии с выражением (2.2) определить любой контурный ток при индивидуальном или совместном действии каждого из напряжений $\dot{U}_1 — \dot{U}_3$. Совокупность собственных и взаимных сопротивлений, входящих в определитель цепи, как характеристика цепи эквивалентна совокупности собственных сопротивлений ветвей цепи и ее графа.

Напомним, что пассивные линейные электрические цепи имеют свойство обратимости. Его формируют обычно в виде теоремы обратимости (или взаимности) таким образом: если э. д. с. \dot{U}_i контура i электрической цепи вызывает в контуре j ток \dot{I}_j , то та же э. д. с., будучи перенесена в контур j , вызовет в контуре i ток $\dot{I}_i = \dot{I}_j$. Это значит, что в обратимых цепях сопротивления передачи равны друг другу:

$$Z_{ij} = \dot{U}_i / \dot{I}_j \text{ и } Z_{ji} = \dot{U}_j / \dot{I}_i.$$

Свойства обратимости удобно использовать в тех задачах, по условию которых Z_{ij} определяется легче, чем Z_{ji} .

2.4. МАТРИЦЫ (Z) и (Y) РАЗВЕТВЛЕННОЙ ЦЕПИ

Для того чтобы подчеркнуть связи между способами расчета неразветвленных и разветвленных цепей, рассмотрим еще раз уравнения (2.1) и (2.2). На уравнения (2.1) можно смотреть как на уравнения преобразования координат ($\dot{I}_1 — \dot{I}_3$) трехмерного вектора в новые координаты ($\dot{U}_1 — \dot{U}_3$), а на уравнения (2.2) — как на обратные преобразования координат ($\dot{U}_1 — \dot{U}_3$) в координаты ($\dot{I}_1 — \dot{I}_3$).

Коэффициенты системы уравнений контурных токов (2.1) образуют матрицу преобразования:

$$(Z) = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

В ТЛЭЦ эту матрицу называют матрицей сопротивлений холостого хода. Любое из сопротивлений Z_{ij} можно измерить только в том случае, если все контуры будут разомкнуты.

Коэффициенты системы уравнений обратного преобразования (2.2), представляющих собой по существу систему уравнений узловых напряжений дуальной цепи, образуют матрицу обратного преобразования:

$$(Y) = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_{11}}{\Delta} & \frac{\Delta_{21}}{\Delta} & \frac{\Delta_{31}}{\Delta} \\ \frac{\Delta_{12}}{\Delta} & \frac{\Delta_{22}}{\Delta} & \frac{\Delta_{32}}{\Delta} \\ \frac{\Delta_{13}}{\Delta} & \frac{\Delta_{23}}{\Delta} & \frac{\Delta_{33}}{\Delta} \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Эту матрицу называют матрицей проводимостей короткого замыкания. Любую из проводимостей Y_{ij} можно измерить только в случае замкнутых всех контуров цепи и замкнутых узлов дуальной цепи. Она обратна матрице (Z) .

В матричной форме уравнения (2.1) и (2.2) будут:

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix},$$

что кратко записывается так:

$$(Z)(i) = (\dot{U}) \text{ и } (Y)(\dot{U}) = (i).$$

Подобно тому как пассивная часть неразветвленной цепи характеризуется сопротивлением Z или проводимостью $Y = Z^{-1}$, так пассивная часть разветвленной цепи характеризуется матрицей (Z) или матрицей $(Y) = (Z)^{-1}$. Матрицы (Z) и (Y) обратны друг другу. Их элементы определяют все свойства пассивной части цепи.

Совершенно очевидно, что все сказанное здесь о трехконтурной цепи можно отнести к цепи любой сложности.

Если при расчетах режимов простейших цепей задано напряжение и следует определить ток, источник энергии удобно представить в виде источника напряжения с нулевым внутренним сопротивлением, включенным последовательно в замкнутую цепь с сопротивлением Z , которое учитывает и сопротивление источника. При этом $i = \dot{U}/Z = Y\dot{U}$. Если задан ток и необходимо определить напряжение, источник удобно представить в виде источника тока с нулевой внутренней проводимостью, включенного параллельно разомкнутой цепи с проводимостью $Y = 1/Z$. При этом $\dot{U} = Zi$.

Аналогичная картина наблюдается в разветвленных цепях. Если заданы напряжения и определению подлежат токи, источники энергии следует представлять в виде источников напряжения с нулевыми внутренними сопротивлениями, действующими в замкнутых контурах. Связи между токами и напряжениями в этом случае определяются элементами матрицы (Y).

При заданных токах и определяемых напряжениях источники удобно представить в виде источников тока с нулевыми внутренними проводимостями, подключаемыми параллельно разомкнутым ветвям цепи. Связи между напряжениями и токами в этом случае определяются элементами матрицы (Z).

2.5. МАТРИЦЫ СОЕДИНЕНИЙ (ИНЦИДЕНЦИЙ) ЦЕПИ

Элементы матриц (Z) и (Y) цепи зависят от значений сопротивлений или проводимостей ее ветвей и способа соединения последних — графа цепи. Аппарат матричной алгебры позволяет рассматривать указанные характеристики отдельно. Проиллюстрируем это на примере простой цепи (рис. 2.5).

Свойства ветвей цепи изображают диагональной матрицей

$$Z_B = \begin{pmatrix} Z_1 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 \end{pmatrix},$$

связывающей напряжения ветвей с токами.

Способ соединения ветвей между собой характеризуется так называемой матрицей соединения цепи. Столбцы этой матрицы соответствуют ветвям, а строки — контурам. Если ветвь входит в контур и ток в ней совпадает по направлению с контурным, то элемент, стоящий на пересечении соответствующих столбца и строки, равен 1. При несовпадении направлений токов ветви и контура соответствующий элемент равен -1 . Если ветвь не входит в контур, то соответствующий элемент равен 0. Порядок составления матрицы цепи на примере цепи, схема которой приведена на рис. 2.5, поясняется табл. 2.1.

Матрица цепи

$$(M) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица сопротивлений ветвей (Z)_в вместе с матрицей цепи (M) содержит всю информацию о цепи. Если в матрице цепи по-

Таблица 2.1

Контурные токи	Токи ветвей		
	$I_{1в}$	$I_{2в}$	$I_{3в}$
I_1	1	-1	0
I_2	0	-1	1

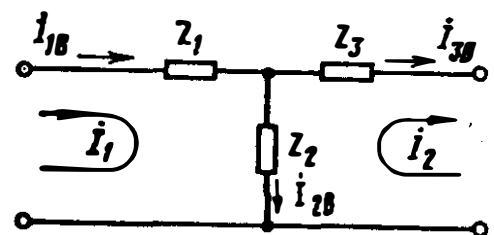


Рис. 2.5

менять местами строки и столбцы, получается транспонированная матрица цепи:

$$(M)_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для любой разветвленной цепи

$$(Z) = (M) (Z)_B (M)_T, \quad (2.9)$$

Проиллюстрируем это на примере рассматриваемой цепи.

$$\begin{aligned} (Z) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 & 0 \\ 0 & -Z_2 & Z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 + Z_2 & -Z_2 \\ -Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

На выражение (2.9) следует смотреть как на представление матрицы сопротивлений холостого хода, преобразующей контурные токи в напряжения, в виде произведения трех матриц. Каждая из матриц множителей дает одно из преобразований, из которых складывается преобразование, осуществляемое матрицей (Z) .

Матрица $(M)_T$ преобразует контурные токи в токи ветвей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_1 - i_2 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{1B} \\ i_{2B} \\ i_{3B} \end{pmatrix}.$$

Матрица $(Z)_B$ преобразует токи ветвей в напряжения ветвей:

$$\begin{pmatrix} Z_1 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{1B} \\ i_{2B} \\ i_{3B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 i_{1B} \\ Z_2 i_{2B} \\ Z_3 i_{3B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \end{pmatrix}.$$

Наконец, матрица (M) преобразует напряжения ветвей в напряжения контуров:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{U}_1 + \dot{U}_2 \\ -\dot{U}_1 + \dot{U}_3 \end{pmatrix}.$$

Выражение (2.9) указывает на два возможных способа характеризования разветвленной электрической цепи: одной $(Z) = (Y)^{-1}$ или двумя $(Z)_B$ и (M) матрицами.

2.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВХОДНЫХ И ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ПО ГРАФУ ЦЕПИ

Рассчитывая разветвленную цепь методами контурных токов или узловых напряжений, интересующие нас входные или передаточные функции получаем в виде отношения двух определителей [см. выражения (2.3)—(2.6)].

Входное сопротивление цепи (см. рис. 2.3).

$$Z_{вх11} = \Delta / \Delta_{11}. \quad (2.10)$$

Сопротивление передачи

$$Z_{пер12} = \Delta / \Delta_{12}. \quad (2.11)$$

Это компактные выражения. Однако для получения конкретной зависимости от элементов схемы цепи и частоты, входящие в выражение для Z , определители надо раскрыть. Для цепи, схема которой приведена на рис. 2.3, при $Z_0 = 0$ определитель системы уравнений (2.1) имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta &= (Z_1 + Z_2) (Z_2 + Z_3) (Z_1 + Z_3 + Z_4) - Z_1 Z_2 Z_3 - Z_1 Z_2 Z_3 - Z_1^2 (Z_2 + Z_3) - \\ &- Z_2^2 (Z_1 + Z_3 + Z_4) - Z_3^2 (Z_1 + Z_2) = (Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2^2 + Z_2 Z_3) (Z_1 + Z_3 + Z_4) - \\ &- 2Z_1 Z_2 Z_3 - Z_1^2 Z_2 - Z_1 Z_3 - Z_2^2 Z_1 - Z_3^2 Z_3 - Z_2^2 Z_4 - Z_3^2 Z_1 - Z_3^2 Z_2 = \\ &= Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_3 Z_4 + Z_2 Z_3 Z_4. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Соответственно

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= (-1)^2 \begin{vmatrix} Z_2 + Z_3 - Z_3 & \\ -Z_3 & Z_1 + Z_2 + Z_3 \end{vmatrix} = (Z_2 + Z_3) (Z_1 + Z_2 + Z_3) - Z_3^2 = \\ &= Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_2 Z_4 + Z_1 Z_3 + Z_3^2 + Z_3 Z_4 - Z_3^2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

и

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} -Z_2 - Z_3 & \\ -Z_1 & Z_1 + Z_2 + Z_3 \end{vmatrix} (-1)^2 = Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_2 Z_4 + Z_1 Z_3. \quad (2.14)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} Z_{вх11} &= \frac{\Delta}{\Delta_{11}} = \frac{Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_3 Z_4 + Z_2 Z_3 Z_4}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_2 Z_4 + Z_1 Z_3 + Z_3 Z_4}; \\ Z_{пер12} &= \frac{\Delta}{\Delta_{12}} = \frac{Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_3 Z_4 + Z_2 Z_3 Z_4}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_2 Z_4 + Z_1 Z_3}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Составим выражение для $Z_{вх11}$ непосредственно по рассматриваемой схеме, которую перечертим в другом виде (рис. 2.6):

$$\begin{aligned} Z_{вх11} &= \frac{\left(Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} \right) Z_4}{Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} + Z_4} = \\ &= \frac{(Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3) Z_4}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_4}. \end{aligned}$$

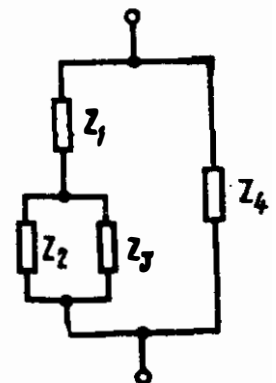


Рис. 2.6

Сравним оба способа получения $Z_{вх11}$. Использование общей формулы (2.10) вносит в вычисления некоторую общность и формальность, но дает при этом много лишних взаимно уничтожаемых слагаемых. При вычислении $Z_{вх11}$ по схеме следует учитывать правила параллельного и последовательного соединений сопротивлений в соответствии с этой схемой, т. е. всякий раз по-своему, зато никаких подлежащих сокращению слагаемых при этом не возникает.

Составление функций по ее графу — способ, имеющий преимущества двух рассмотренных случаев: общность, формальность и отсутствие ненужных усложнений при вычислениях. Граф цепи можно упрощать по тем же правилам, что и ее схему. По графу можно составить выражение определителей без лишних уничтожающихся слагаемых.

Правила определения функций цепи по графу в двух дуальных формах (применительно к уравнениям контурных токов и уравнениям узловых напряжений) были даны Кирхгофом и Максвеллом. Эти правила сводятся к нахождению по графу цепи определителей Δ , Δ_{ii} и Δ_{ij} .

Правила Кирхгофа формулируются так. Пусть цепь характеризуется N независимыми контурами, тогда:

1) определитель Δ равен сумме произведений сопротивлений ветвей замыканий, составленных для всех возможных деревьев графа цепи;

2) определитель Δ_{ii} равен сумме произведений сопротивлений $(N - 1)$ ветвей замыканий, при удалении которых остается один контур, включающий ветвь с напряжением \dot{U}_i ;

3) определитель Δ_{ij} равен сумме произведений $(N - 1)$ ветвей замыканий, при удалении которых остается один контур, содержащий ветви с \dot{U}_i и \dot{I}_j .

Применим эти правила к вычислению определителей Δ , Δ_{11} и Δ_{12} разобранной ранее задачи. Рассмотрим граф цепи (см. рис. 2.3) и возможные способы разбиения ветвей на дерево и замыкания (рис. 2.7).

В соответствии с первым правилом Кирхгофа из рис. 2.7, б, в и г следует, что $\Delta = Z_1 Z_3 Z_4 + Z_2 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_4$, сравните с выражением (2.12). Множества замыканий для случаев, приведенных на рис. 2,7, д, е, ж, з и не показанных на нем, содержат ветви с нулевыми сопротивлениями, и поэтому соответствующие произведения в выражение для Δ не вошли.

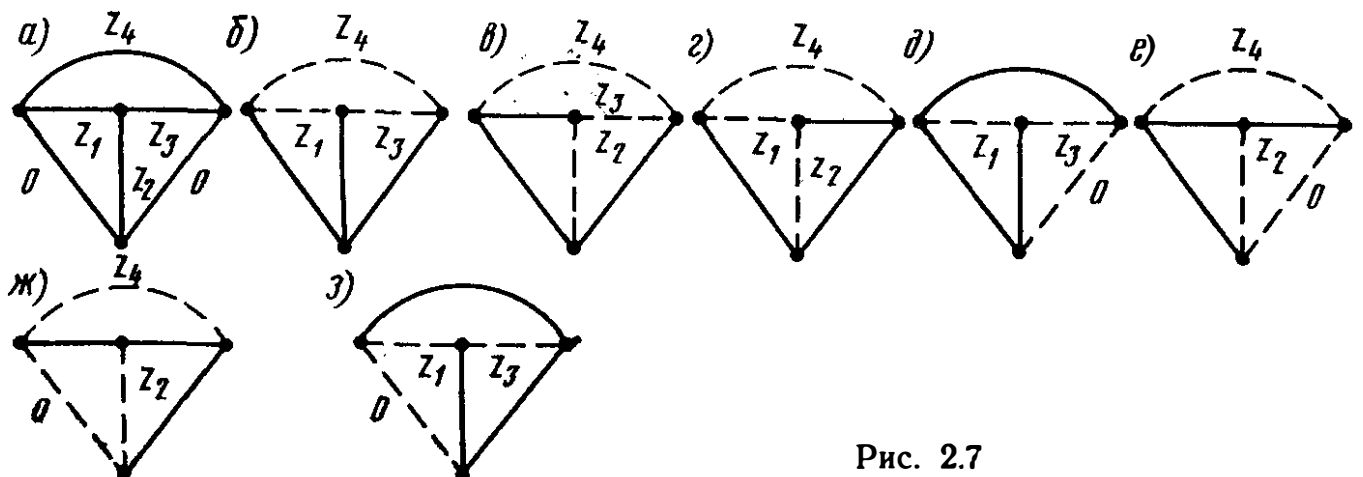


Рис. 2.7

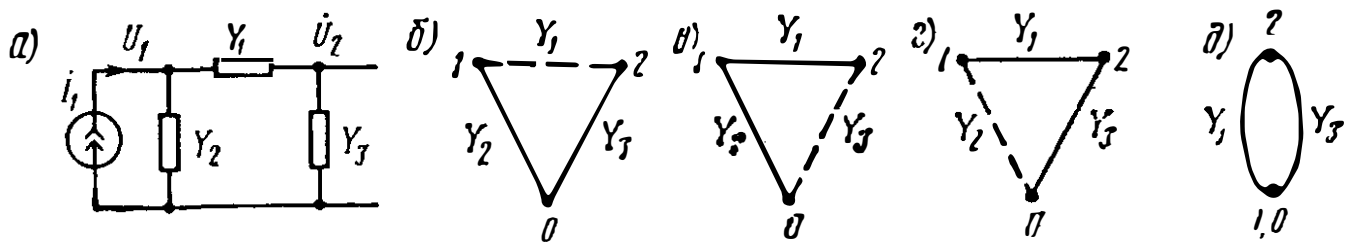


Рис. 2.8

В соответствии со вторым правилом Кирхгофа непосредственно по графу (рис. 2.7, а) найдем

$$\Delta_{11} = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_4.$$

По третьему правилу Кирхгофа из рассматриваемого графа

$$\Delta_{12} = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3 + Z_2 Z_4.$$

Правила Максвелла формулируют так:

1) определитель Δ равен сумме произведений проводимостей ветвей, образующих все возможные деревья графа цепи;

2) определитель Δ_{ii} равен сумме произведений проводимостей ветвей всех возможных деревьев графа цепи, получающейся после замыкания узла с базисным, относительно которого отсчитывают напряжения;

3) определитель Δ_{ij} равен сумме произведений проводимостей ветвей деревьев, общих для двух цепей, получающихся замыканиями узлов i и j с базисным.

Проиллюстрируем применение этих правил на простой цепи (рис. 2.8, а).

Уравнения узловых напряжений для этой схемы:

$$Y_{11} U_1 + Y_{12} U_2 = i_1; \quad Y_{21} U_1 + Y_{22} U_2 = 0.$$

Определим напряжения узлов:

$$U_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} i_1; \quad U_2 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} i_1.$$

Непосредственные вычисления дают:

$$\Delta = \begin{vmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_1 \\ -Y_1 & Y_1 + Y_2 \end{vmatrix} = Y_1^2 + Y_1 Y_3 + Y_2 Y_3 + Y_2 Y_1 - Y_1^2;$$

$$\Delta_{11} = Y_1 + Y_3; \quad \Delta_{12} = Y_1.$$

Найдем теперь определитель Δ , Δ_{11} , Δ_{12} по правилам Максвелла: определитель Δ — есть сумма произведений проводимостей ветвей, образующих деревья. Деревья графа цепи (см. рис. 2.8, а) показаны на рис. 2.8, б, в, г, поэтому $\Delta = Y_2 Y_3 + Y_1 Y_2 + Y_1 Y_3$; Δ_{11} — есть сумма произведений проводимостей ветвей, образующих деревья, получающиеся после замыкания первого узла с базисным. Соответствующий граф приведен на рис. 2.8, д. Определитель $\Delta_{11} = Y_1 + Y_3$. Аналогично поступая, получим $\Delta_{12} = Y_1$.

При расчетах сложных цепей приходится применять метод контурных токов и исходить из матрицы (Z) и метод узловых напряжений и исходить из матрицы (Y). Использование двух правил Кирхгофа и Макс-

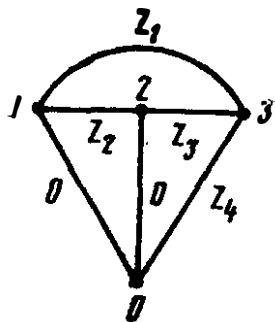


Рис. 2.9

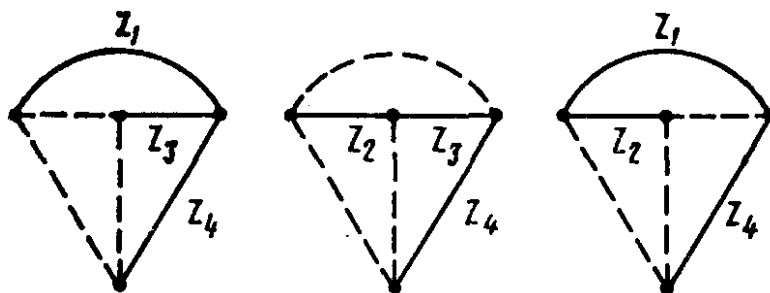


Рис. 2.10

велла для вычисления определителей в этих двух случаях неудобно. Поэтому чаще пользуются правилами Максвелла или им эквивалентными. При этом, если рассчитываемая цепь охарактеризована проводимостями узлов, т. е. матрицей (Y), правила применяют непосредственно для этой цепи.

В случае использования для характеристики рассчитываемой цепи сопротивлений контуров, т. е. матрицы (Z), сначала эту цепь заменяют дуальной, а затем применяют правила Максвелла. Проиллюстрируем это на примере рассмотренной ранее цепи (см. рис. 2.3), которая содержит три контура, номера которых соответствуют индексам напряжений и токов. В дуальную цепь должны входить три узла. Поэтому построение ее графа начнем с узлов 1, 2, 3 и базисного, соответствующего внешнему контуру (рис. 2.9). Общее сопротивление Z_2 контуров 1 и 2 исходной цепи превратим в численно равную ему проводимость связи между узлами 1 и 2, а общее сопротивление Z_1 контуров 1 и 3 в проводимость связи между узлами 1 и 3 и т. д. Общее сопротивление внешнего контура и контура 1 — нулевое сопротивление левой ветви графа — станет проводимостью связи узлов 0 и 1, а общее сопротивление Z_4 внешнего контура и контура 3 — проводимостью, соединяющей узлы 0 и 3. Так мы получим граф, дуальный графу (см. рис. 2.7), и цепи (см. рис. 2.3). В нем узлы соответствуют контурам, деревья — замыканиям и наоборот. Возможные деревья с ненулевыми ветвями для полученного графа приведены на рис. 2.10.

Используя первое правило Максвелла, получим

$$\Delta = Z_1 Z_3 Z_4 + Z_2 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_4,$$

что соответствует выражению (2.12).

По второму правилу Максвелла для вычисления Δ_{11} следует замкнуть первый узел с базисным. Полученный граф приведен на рис. 2.11, а. По его деревьям (рис. 2.11, б) определяем значение Δ_{11} .

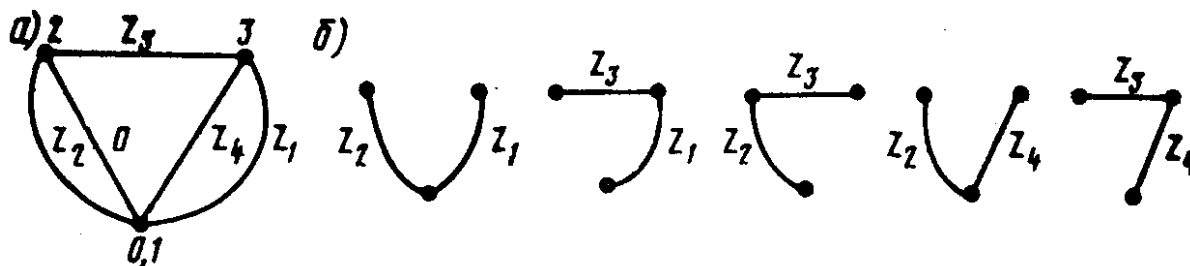


Рис. 2.11

совпадающее с выражением (2.13). Применяя третье правило Максвелла, найдем Δ_{12} , совпадающее с выражением (2.14).

Мы использовали здесь графы цепи для вычисления определителей Δ и Δ_{ij} систем линейных уравнений. Из этих определителей составляют все решения системы линейных уравнений. Очевидно, можно сформулировать правила получения необходимых решений системы уравнений сразу по графу, не прибегая к составлению уравнения; в этом смысле граф эквивалентен системе линейных уравнений. Это обстоятельство лежит в основе использования графов в теории линейных электрических цепей и во многих других науках. Теория графов — развитая математическая дисциплина и, как всякий раздел математики, находит широкое применение.

2.7. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ КАК МНОГОПОЛЮСНИК. ДВУХ- И ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

Системы автоматики, телемеханики и связи представляют собой сложные комплексы разнообразных взаимосвязанных устройств, детальное рассмотрение электрических цепей которых возможно только по частям.

Рассматриваемая электрическая цепь должна быть отделена от системы, частью которой она является. При этом воздействия, которым цепь подвергалась со стороны системы, и реакции системы на воздействия со стороны этой цепи следует заменить эквивалентными. Первое достигается включением в схему рассматриваемой цепи эквивалентных генераторов, а второе — эквивалентных нагрузок. Точки подключения эквивалентных генераторов называют входными зажимами (в х о д а м и), а точки подключения эквивалентных нагрузок — выходными зажимами (в ы х о д а м и) изучаемой цепи.

В общем случае разветвленная электрическая цепь, выделенная для детального рассмотрения из более сложной системы, может иметь несколько входов и выходов. Такую цепь и взаимодействие ее с внешней средой изображают как на рис. 2.12, а саму цепь называют м н о г о п о л ю с н и к о м.

Основные практические задачи сводятся обычно к установлению связей между напряжениями и токами на входах и выходах многополюсника, или, другими словами, к определению его входных и передаточных функций.

В линейных цепях благодаря принципу наложения возможно поочередное рассмотрение действия каждого из генераторов (или источников). При этом возникает несколько типичных задач, методы решения которых достаточно разработаны и находят все большее применение в различных областях телемеханики и связи. Совокупность понятий, используемых при решении этих задач (переменных, параметров и взаимосвязей между ними), образует математические схемы — основу теории линейных электрических цепей.

Наиболее важными задачами являются следующие:

определение или обеспечение заданной связи между напряжением и током на одном из входов цепи (см. рис. 2.12), например на входе, где

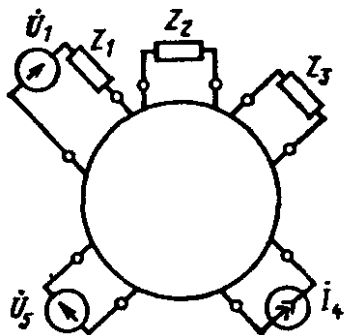


Рис. 2.12

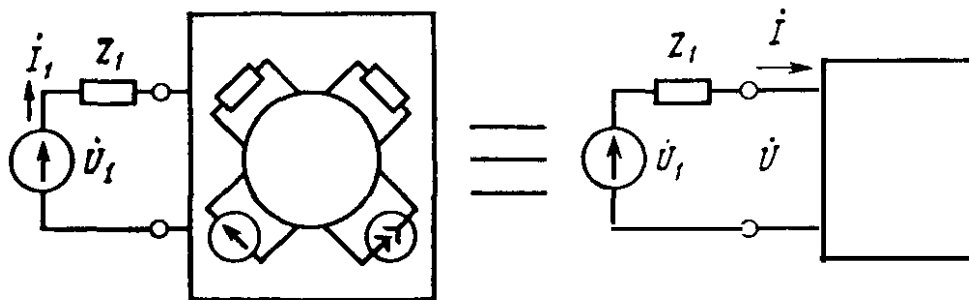


Рис. 2.13

действует напряжение \dot{U}_1 . Для решения этой задачи достаточно исходить из эквивалентной схемы (рис. 2.13). Поскольку здесь рассматривается один вход цепи (два зажима), цепь называют **д в у х п о л ю с н и к о м**. Обобщением этого случая является рассмотрение одного входа n -фазной цепи, представляющей собой n -полюсник;

определение или обеспечение заданных связей между напряжением и током на нескольких входах. В этом случае используют эквивалентную схему (рис. 2.14, а). Цепь, выделенную таким образом, называют $2n$ -полюсником. Здесь простейшим случаем является цепь с двумя входами 1 и 2 (рис. 2.14, б и в). В соответствии с числом зажимов ее называют **ч е т ы р е х п о л ю с н и к о м**. С помощью матричной алгебры все, относящееся к цепи с двумя входами, автоматически переносится на цепи с большим числом входов;

определение или обеспечение заданных связей между напряжением и током на нескольких входах и выходах цепи. Здесь, как и в предыдущей задаче, наиболее типичным, простым и легко обобщаемым случаем является цепь с одним входом и одним выходом (рис. 2.14, г).

В виде четырехполюсника представляют также и цепь с двумя входами (см. рис. 2.14, в).

Определение связей между токами и напряжениями есть анализ цепи, его выполняют по известной схеме и определяют ее частотные или временные характеристики. Обеспечение заданных связей между напряжениями и токами есть **с и н т е з** цепи — построение цепи с заданными свойствами, например с определенной частотной характеристикой.

В обоих случаях (анализа и синтеза) очень важно уметь представить сложную цепь в виде соединения более простых цепей, для которых связь между схемой и ее свойствами менее сложная, и, таким образом, определение характеристики или реализация ее части упрощается.

Таковыми частями сложных цепей являются двух- и четырехполюсники.

Двух- и четырехполюсник — важнейшие понятия, используемые при рассмотрении сложных электрических цепей устройств телемеханики и связи; их теории и посвящена следующая часть этой главы.

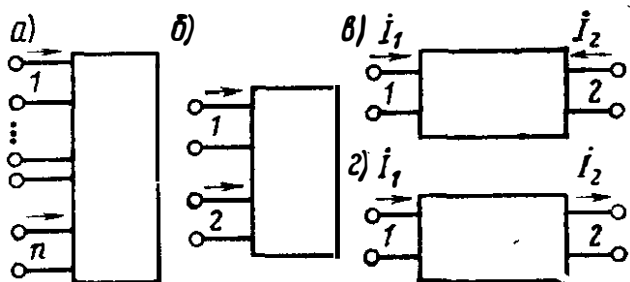


Рис. 2.14

2.8. КАНОНИЧЕСКИЕ СХЕМЫ ПАССИВНЫХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ

Двухполюсные электрические цепи — двухполюсники — разделяют по сложности на одно-, двухэлементные и т. д. и характеру входящих в них элементов — на rC , rL , LC , rLC .

Двухполюсники rC . Наиболее простыми, часто применяющимися и типичными в отношении теории являются двухполюсники rC . Допустим, что требуется построить двухполюсник, модуль сопротивления которого с заданной точностью уменьшался бы с увеличением частоты (рис. 2.15, *a*, кривая 1). Эта зависимость является типичной для цепей rC при варьировании величинами R_1 и R_2 и охватывает все возможные случаи.

Очевидно, самым простым решением задачи будет использование одноэлементного двухполюсника-конденсатора. Зависимость его модуля сопротивления от частоты приведена на рис. 2.15, *a*, кривая 2. Полученная зависимость совпадает с заданной только в одной точке на частоте ω_1 , которую можно менять, варьируя емкостью конденсатора.

Для более точного выполнения задания, например большего приближения модуля сопротивления к значению R_1 , конденсатор следует шунтировать сопротивлением r_1 . Зависимость $|Z(\omega)|$ в этом случае будет изображаться кривой 3. Используя двухэлементный двухполюсник, можно получить совпадение заданной и полученной зависимостей $|Z(\omega)|$ в двух точках.

Если необходимо обеспечить более точное получение заданной зависимости $|Z(\omega)|$, и, в частности, добиться, чтобы с неограниченным увеличением частоты модуль сопротивления не снижался до нуля, в схему следует включить еще один резистор (рис. 2.15, *b*) и подобрать сопротивления резисторов так, чтобы выполнялись соотношения: $r_1 + r_2 = R_1$; $r_2 = R_2$.

Зависимость модуля сопротивления двухполюсника, состоящего из трех элементов, совпадает с заданной в трех точках: $\omega_0 = 0$, $\omega = \omega_1$ и $\omega_\infty = \infty$.

Следует заметить, что при усложнении схемы двухполюсника с целью получения более точного совпадения зависимости его сопротивления от частоты с заданной первый резистор был включен параллельно конденсатору, а второй — последовательно. Включая второй резистор также параллельно, мы не получили бы существенного изменения свойств двухполюсника.

Из рассмотренного примера следуют выводы:

в схему двухполюсника с заданной зависимостью модуля сопротивления от частоты следует включать тем большее число элементов, чем в большем числе точек должны совпадать полученная и заданная указанные зависимости. Этим объяс-

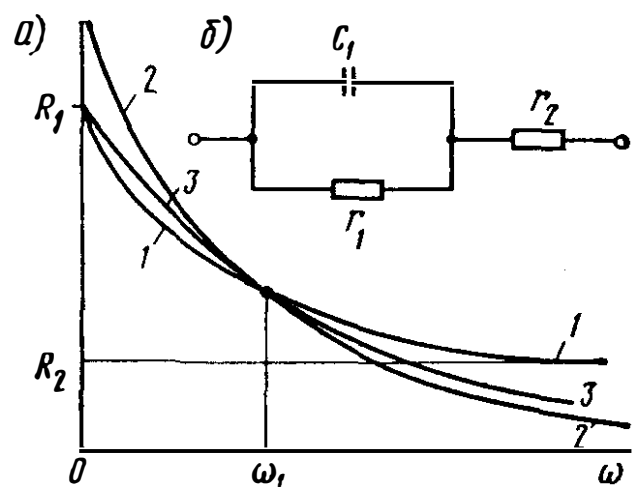


Рис. 2.15

няется необходимость изучения многоэлементных двухполюсных схем;

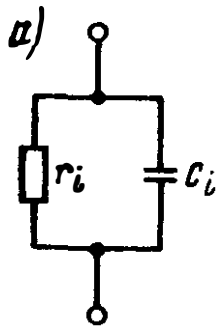
схему двухполюсника следует составлять так, чтобы можно было просто определить численные значения параметров ее элементов. Последние свойства присущи так называемым каноническим схемам.

Рассмотрим простейшую цепь с двумя параметрами r_i и C_i . Для цепи (рис. 2.16, а) операторная проводимость

$$Y(p) = (1/r_i) + pC_i.$$

Переход от $Y_i(j\omega)$ к $Y_i(p)$ упрощает выражение этой величины и заменяет комплексную функцию $Y_i(j\omega)$ вещественной $Y(p)$ при вещественном p . Вещественными оказываются и нули и полюсы $Y_i(p)$ для цепей rC .

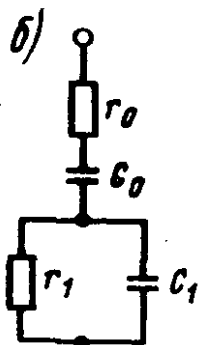
Параллельное подключение новых элементов эквивалентно новым численным значениям r_i и C_i и не изменяет вида $Y_i(p)$. При последовательном подключении других цепей к данной можно получить существенно новые свойства. Определим



$$Z_i(p) = \frac{1}{Y_i(p)} = \frac{1}{(1/r_i) + pC_i} = \frac{1/C_i}{p + [1/(r_i C_i)]} = \frac{A_i}{p - p_i}, \quad (2.16)$$

где $A_i = 1/C_i$; $p_i = -1/(r_i C_i)$.

Соединяя последовательно такие простейшие цепи и учитывая, что в отдельных случаях r_i может быть бесконечно большим, а C_i — бесконечно малым, получим схему (рис. 2.16, б), которая является канонической. Сопротивление такого двухполюсника

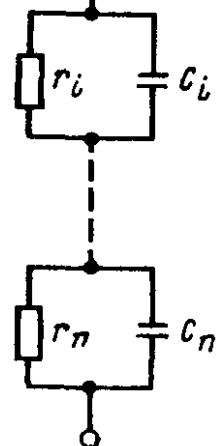


$$Z(p) = r_0 + \frac{1}{pC_0} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{A_i}{p - p_i}, \quad (2.17)$$

где $A_i = 1/C_i$ и $p_i = -1/(r_i C_i)$.

Между рассматриваемой схемой и формулой (2.17) ее сопротивления имеется четкое соответствие, т. е. каждому последовательному элементу схемы соответствует одно из слагаемых в формуле. Каноническая схема содержит наименьшее число элементов по сравнению со всеми другими схемами, имеющими те же свойства.

Рассмотрим цепь (рис. 2.17, а). Для нее



$$Z_i(p) = r_i + 1/(pC_i).$$

Последовательное включение новых элементов не меняет вида $Z_i(p)$. Для существенного изменения свойств этой цепи новые элементы следует подключать к ней параллельно.

Рис. 2.16

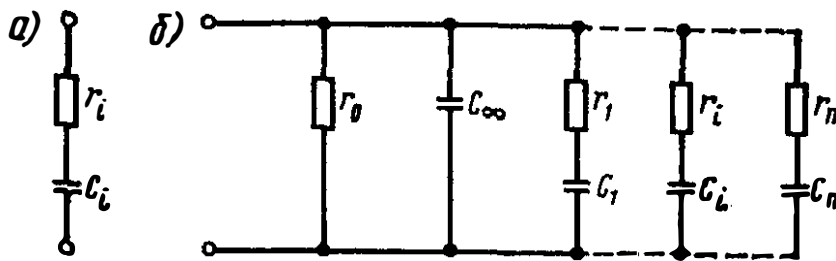


Рис. 2.17

Найдем:

$$Y_i(\rho) = 1/Z_i(\rho);$$

$$Y_i(\rho) = \frac{1}{r_i + [1/\rho C_i]} = \frac{1/(r_i \rho)}{\rho + [1/(r_i C_i)]} = \frac{A_i \rho}{\rho - \rho_i}. \quad (2.18)$$

При параллельном соединении нескольких таких цепей, учитывая, что r_i может быть равно нулю, а C_i — бесконечности, получаем схему (рис. 2.17, б) — второй вид канонической схемы для двухполюсников rC . Проводимость такого двухполюсника

$$Y(\rho) = \frac{1}{r_0} + \rho C_\infty + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{A_i \rho}{\rho - \rho_i}, \quad (2.19)$$

где $A_i = 1/r_i$; $\rho_i = -1/(r_i C_i)$.

Для схемы, приведенной на рис. 2.18, а, имеем:

$$Z(\rho) = \frac{1}{\rho C_1 + \frac{1}{r_1 + \frac{1}{\rho C_2 + \frac{1}{r_2 + \dots}}}}. \quad (2.20)$$

Эта схема является третьим видом канонической схемы двухполюсника rC . Каноническая схема четвертого вида двухполюсника rC приведена на рис. 2.18, б. Для нее

$$Y(\rho) = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{\frac{1}{\rho C_1} + \frac{1}{\frac{1}{r_2} + \frac{1}{\rho C_2} + \dots}}. \quad (2.21)$$

Двухполюсники rL . Допустим, что необходимо построить двухполюсник, изменение модуля сопротивления которого с частотой соответствовало бы кривой 1, приведенной на рис. 2.19, а. Поскольку сопротивление с увеличением частоты должно возрастать, в качестве простейшего приближенного решения можно выбрать одноэлементный двухполюсник — катушку индуктивности. Зависимость ее сопротивления от частоты характеризуется прямой 2. Заданная и полученная зависимости совпадают в одной точке (на частоте ω_1).

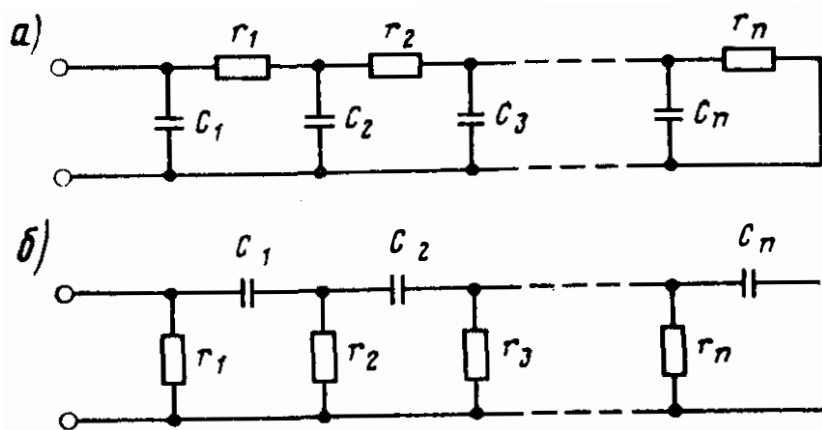


Рис. 2.18

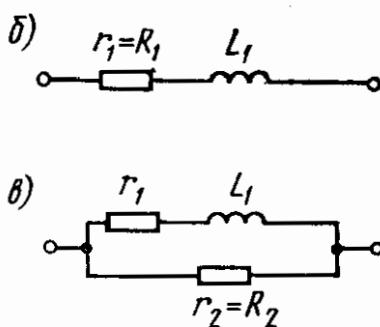
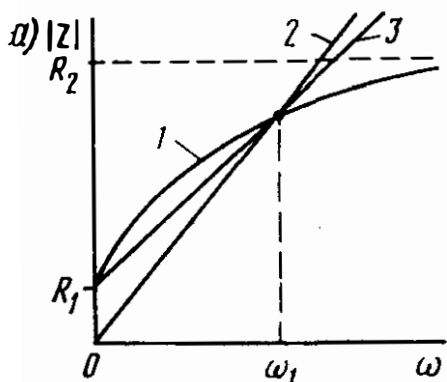


Рис. 2.19

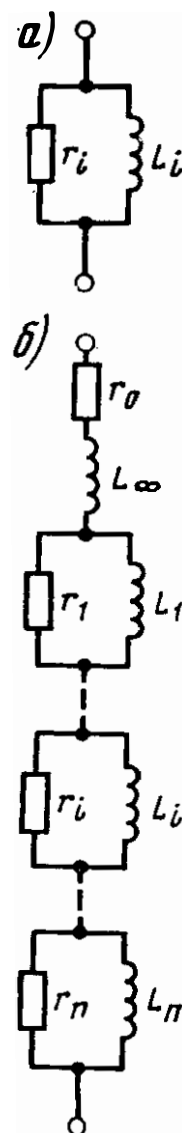


Рис. 2.20

Рассуждая так же как и при рассмотрении двухполюсников rC , приходим к выводу о необходимости усложнения схемы для более точного воспроизведения заданной зависимости $|Z(\omega)|$ (рис. 2.19, б). Зависимость модуля ее сопротивления от частоты приведена на рис. 2.19, а, кривая 3.

Зависимость модуля сопротивления от частоты трехэлементного двухполюсника (рис. 2.19, в), элементы которого удовлетворяют соотношениям:

$$r_2 = R_2, \quad \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = R_1,$$

совпадает с заданной в трех точках.

При построении схем многоэлементных двухполюсников удобно пользоваться каноническими схемами.

Для схемы (рис. 2.20, а):

$$Y_i(p) = \frac{1}{r_i} + \frac{1}{pL_i};$$

$$Z_i(p) = \frac{1}{(1/r_i) + [1/(pL_i)]} = \frac{r_i p}{p + (r_i/L_i)} = \frac{A_i p}{p - p_i}.$$

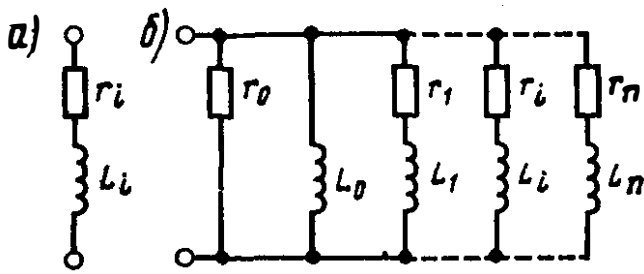


Рис. 2.21

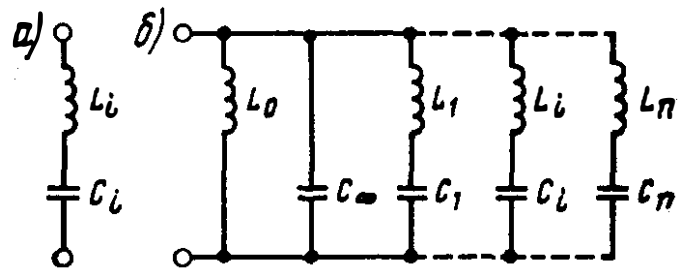


Рис. 2.22

Для сложной цепи, образованной последовательным соединением простейших схем (рис. 2.20, б), имеем:

$$Z(\rho) = r_0 + \rho L_\infty + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{A_i \rho}{\rho - p_i}, \quad (2.22)$$

где $A_i = r_i$; $p_i = -r_i/L_i$.

Для схемы (рис. 2.21, а):

$$Z_i(\rho) = r_i + \rho L_i;$$

$$Y_i(\rho) = \frac{1}{r_i + \rho L_i} = \frac{1/L_i}{\rho + (r_i/L_i)} = \frac{A_i}{\rho - p_i}.$$

Для схемы (рис. 2.21, б):

$$Y(\rho) = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{\rho L_0} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{A_i}{\rho - p_i}, \quad (2.23)$$

где $A_i = 1/L_i$; $p_i = -r_i/L_i$.

Двухполюсники LC. Рассмотрим схему, образованную элементами L_i и C_i (рис. 2.22, а). Для нее:

$$Z_i(\rho) = \rho L_i + [1/(\rho C_i)];$$

$$Y_i(\rho) = \frac{1}{\rho L_i + [1/(\rho C_i)]} = \frac{1/(L_i \rho)}{\rho^2 + [1/(L_i C_i)]} = \frac{A_i \rho}{\rho^2 - p_i^2}.$$

Для схемы (рис. 2.22, б):

$$Y(\rho) = \rho C_\infty + \frac{1}{\rho L_0} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{A_i \rho}{\rho^2 - p_i^2}, \quad (2.24)$$

где $A_i = \frac{1}{L_i}$; $p_i = \pm j \frac{1}{\sqrt{L_i C_i}}$.

Для схемы (рис. 2.23, а):

$$Y_i(\rho) = \rho C_i + [1/(\rho L_i)];$$

$$Z(\rho) = \frac{1}{\rho C_i + [1/(\rho L_i)]} = \frac{1/(C_i \rho)}{\rho^2 + [1/(L_i C_i)]} = \frac{A_i \rho}{\rho^2 - p_i^2}.$$

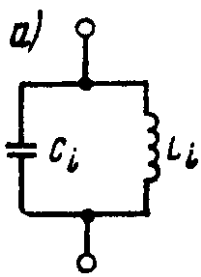


Рис. 2.23

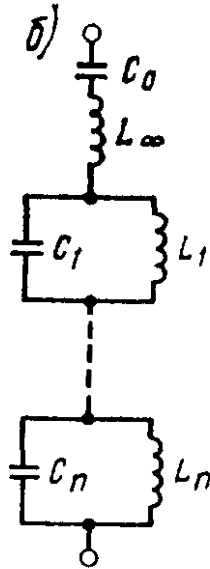


Рис. 2.24

Для схемы (рис. 2.23, б):

$$Z(p) = pL_\infty + \frac{1}{pC_0} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{A_i p}{p^2 - p_i^2}, \quad (2.25)$$

где $A_i = \frac{1}{C_i}$; $p_i = \pm j \frac{1}{\sqrt{L_i C_i}}$.

Двухполюсники r, L, C . Рассмотрим простейшую цепь с элементами r_i, L_i, C_i (рис. 2.24).

Для этой цепи:

$$Z_i(p) = r_i + pL_i + \frac{1}{pC_i};$$

$$Y_i(p) = \frac{1}{r_i + pL_i + [1/(pC_i)]} = \frac{1/(L_i p)}{p^2 + (r_i/L_i)p + [1/(L_i C_i)]} = \frac{A_i p}{(p - p_{i1})(p - p_{i2})},$$

где p_{i1} и p_{i2} — корни уравнения;

$$p^2 + \frac{r_i}{L_i} p + \frac{1}{L_i C_i} = 0.$$

Операторную проводимость можно разложить на простые дроби:

$$Y_i(p) = \frac{A_{i1}}{p - p_{i1}} + \frac{A_{i2}}{p - p_{i2}}.$$

Однако этим слагаемым не соответствуют реальные параллельные ветви. Поэтому говорят, что у цепей rLC нет канонических схем, поскольку здесь нарушено соответствие между простейшими слагаемыми $Y(p)$ или $[Z(p)]$ и ветвями (частями) схемы.

2.9. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ ВХОДНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ (ПРОВОДИМОСТЕЙ) ПАССИВНЫХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ

При разработке и совершенствовании систем телемеханики и связи очень часто приходится создавать электрические цепи с заданными свойствами. Свойства пассивной двухполюсной цепи полностью определяются зависимостью ее входного сопротивления или входной проводимости от частоты ω (или параметра p). При синтезе цепи очень важным является вопрос: какими могут быть и какими не могут быть функции $Z(p)$ или $Y(p)$. Если по этим функциям можно построить соответствующую электрическую цепь, то их называют **физически реализуемыми**.

а л и з у е м ы м и. Все формулы, определяющие $Z(p)$ или $Y(p)$ канонических схем, представляют собой физически реализуемые функции.

Если в любом из выражений (2.17), (2.22) или (2.25) выполнить сложение, то получим выражение для входного сопротивления двухполюсника в операторной форме в виде рациональной дроби, т. е. дроби, в числителе и знаменателе которой стоят многочлены:

$$Z(p) = \frac{A_n p^n + A_{n-1} p^{n-1} + \dots + A_1 p + A_0}{B_m p^m + B_{m-1} p^{m-1} + \dots + B_1 p + B_0} = \frac{P(p)}{R(p)}. \quad (2.26)$$

Можно утверждать, что реализуемая функция сопротивления обязательно должна иметь вид рациональной дроби. Это же можно сказать и о реализуемых функциях проводимости.

Заметим, что величина $Z(p)_{p \rightarrow \infty} = (A_n/B_m)p^{n-m}$ представляет собой сопротивление цепи токам весьма высоких частот. Сопротивление реальной цепи токам высоких частот может быть активным. Активное сопротивление представляется вещественным числом и не зависит от p . Это имеет место при $n = m$. У сопротивления может быть индуктивный характер и вид Lp . Для таких цепей $n - m = 1$ и

$$Z(p)_{p \rightarrow \infty} = \frac{A_n}{B_m} p.$$

Наконец, сопротивление $Z(p)$ в области высоких частот может носить емкостный характер и иметь вид $1/(Cp)$. Для таких цепей $n - m = -1$ и

$$Z(p)_{p \rightarrow \infty} = \frac{A_n}{B_m} \frac{1}{p}.$$

Изложенное позволяет сделать такой вывод: рациональные дроби $P(p)/Q(p)$, выражающие зависимости входных сопротивлений и проводимостей от параметра p , должны иметь в числителе и знаменателе многочлены, степени которых могут отличаться не более чем на единицу.

Имея в виду, что $Z(p)_{p \rightarrow 0}$ является сопротивлением двухполюсника токам весьма низких частот, придем к выводу, что и наименьшие степени p , входящие в многочлены $P(p)$ и $Q(p)$, не могут отличаться друг от друга более чем на единицу.

Коэффициенты A_i и B_i многочленов представляют собой произведение параметров r , L , C и поэтому должны быть вещественными и положительными. Многочлены в числителе и знаменателе рациональной дроби (2.26) можно представить в виде произведения множителей вида $(p - p_i)$, где p_i — корни многочленов $P(p)$ и $Q(p)$:

$$Z(p) \cong \frac{A_n}{B_m} \frac{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}{(p - p_{n+1})(p - p_{n+2}) \dots (p - p_{n+m})}.$$

Значения переменного p , соответствующие корням многочлена $P(p)$, обращают $Z(p)$ в нуль, их называют нулями функции $Z(p)$. При значениях p , соответствующих корням $Q(p)$, $Z(p)$ становится неограниченно большим. Корни многочлена $Q(p)$ называют полюсами

функции $Z(p)$. Корни p_i , как мы убедились при рассмотрении канонических схем, могут быть вещественными отрицательными, попарно комплексно-сопряженными с отрицательной вещественной частью и мнимыми попарно сопряженными.

Нули и полюсы функции входного сопротивления должны иметь отрицательную вещественную часть. Собственные колебания в цепи должны быть затухающими. Эти два требования эквивалентны. В крайнем случае, когда все $r_i = 0$, в чисто реактивной цепи нули и полюсы могут быть мнимыми, попарно сопряженными.

Обобщая требования, предъявляемые к нулям и полюсам функции $Z(p)$, говорят, что нули и полюсы $Z(p)$ должны лежать в левой полуплоскости комплексного переменного p .

Совокупность отмеченных условий, которым должна удовлетворять функция $Z(p)$ реальной цепи, называют условиями физической реализуемости $Z(p)$ в виде пассивной цепи.

Все сказанное о функции $Z(p)$ в равной степени относится и к функции $Y(p)$.

2.10. ПРИЕМЫ ПОСТРОЕНИЯ СХЕМЫ ДВУХПОЛЮСНИКА ПО ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ $Z(p)$ ИЛИ $Y(p)$

Если удовлетворяющая условиям физической реализуемости и в то же время достаточно сложная функция $Z(p)$ задана выражением (2.26), то по ней нельзя сразу составить схему двухполюсника с соответствующим сопротивлением. Существует ряд способов, основывающихся на таком преобразовании выражения $Z(p)$, после которого составление схемы становится возможным. Наиболее распространенным способом является представление $Z(p)$ в виде суммы достаточно простых слагаемых, по каждому из которых можно составить схему простой цепи. Простые слагаемые выделяются при этом делением и разложением правильных дробей на простейшие, затем все построенные цепи соединяют последовательно. Кроме того, заданную рациональную дробь можно представить в виде цепной дроби. В этом случае схема двухполюсника получается в виде цепочки, содержащей чередующиеся последовательные и параллельные ветви. Функцию $Y(p) = 1/Z(p)$ можно разложить на простые слагаемые. В этом случае схема двухполюсника получается параллельным соединением простых ветвей. Наконец, функцию $Y(p)$ можно разложить в цепную дробь.

Таким образом, по заданной функции $Z(p)$ в общем случае можно построить четыре различные схемы двухполюсников с одинаковой зависимостью сопротивления от частоты. Такие двухполюсники называют эквивалентными.

Наиболее четкое соответствие между отдельными частями выражений $Z(p)$ или $Y(p)$ и элементами схем двухполюсников получается у двухполюсников, содержащих элементы в каких-либо двух сочетаниях: rC , rL , LC , т. е. имеющих канонические схемы. При этом синтез двухполюсной цепи указанными выше способами приводит к каноническим схемам (см. § 6.5).

Пусть функция сопротивления некоторого двухполюсника $Z_1(p) = P(p)/Q(p)$. Очевидно, что можно построить двухполюсник с сопротивлением $Z_2(p) = Q(p)/P(p)$. Произведение сопротивлений этих двухполюсников не зависит от частоты: $Z_1(p)Z_2(p) = 1$.

Такие два двухполюсника с сопротивлениями $Z_1(p)$ и $Z_2(p)$ называют взаимно обратными. Они имеют взаимнообратные свойства: если, например, при некотором p_1 сопротивление $Z_1(p) \rightarrow 0$, то $Z_2(p) \rightarrow \infty$, и наоборот.

Теория двухполюсников rC , rL , LC и rLC предоставляет широкие возможности по получению разнообразных зависимостей сопротивления (проводимости) от частоты. Последние необходимы при построении цепей для формирования сигналов и отделения их друг от друга.

При использовании для этих целей двухполюсной цепи под входным сигналом понимают подводимое к цепи напряжение, а под выходным — возникающий в ней ток или наоборот. Если это неудобно и желательно входной и выходной сигналы представлять напряжением, следует перейти к четырехполюсной схеме (рис. 2.25), где $r \ll |Z(\omega)|$.

Тогда $I_1(\omega) \cong U_1(\omega)/Z(\omega)$; $U_2(\omega) = rI_1(\omega) = kI_1(\omega)$.

Примерами таких преобразующих сигналы простейших схем могут служить схемы интегрирующих и дифференцирующих цепей (см. рис. 1.13, а и б).

Большие возможности открываются при соединении двухполюсников в более сложные четырехполюсные схемы, что рассматривается далее.

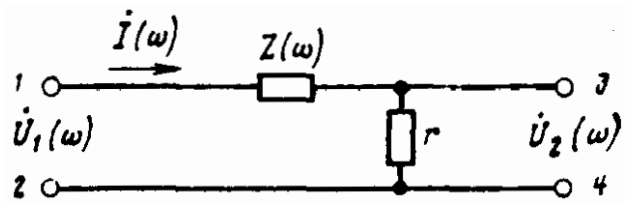


Рис. 2.25

2.11. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ КАК ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА. СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Двухполюсная цепь характеризуется входным сопротивлением или входной проводимостью, устанавливающими связь между напряжением и током на ее входе:

$$U = Zi; i = YU.$$

У двухполюсника две характеристики, соответствующие двум возможным способам их соединения: последовательному Z и параллельному Y .

Четырехполюсную цепь с двумя входами (или входом и выходом) следует характеризовать связями между напряжениями U_1 и U_2 и токами I_1 и I_2 (см. рис. 2.14, б). Эти связи можно представлять различным образом в зависимости от того, какие две из величин U_1 , U_2 , I_1 , I_2 заданы и какие две подлежат определению.

Число различных форм связей (характеристик) у четырехполюсника $S_4^2 = 6$. Этому числу характеристик соответствует и возможное число соединений четырехполюсников.

Уравнения с параметрами Z . Допустим, что заданы токи I_1 и I_2 , требуется определить напряжения U_1 и U_2 . Если схема разветвленной цепи, рассматриваемой как четырехполюсник, известна, для нее можно составить систему уравнений узловых напряжений и решить их относительно напряжений U_1 и U_2 :

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{\Delta_{11}}{\Delta} i_1 + \frac{\Delta_{21}}{\Delta} i_2; \\ U_2 &= \frac{\Delta_{12}}{\Delta} i_1 + \frac{\Delta_{22}}{\Delta} i_2, \end{aligned} \quad (2.27)$$

где Δ — определитель матрицы проводимости короткого замыкания цепи;

Δ_{11} и Δ_{12} — его алгебраические дополнения.

Коэффициенты при токах — суть сопротивления, поэтому уравнения (2.27) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2; \\ U_2 &= Z_{21} i_1 + Z_{22} i_2, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где Z_{11} — входное сопротивление четырехполюсника, измеренное со стороны входа 1 при разомкнутом входе 2;

Z_{22} — входное сопротивление четырехполюсника, измеренное со стороны входа 2 при разомкнутом входе 1;

Z_{12} , Z_{21} — сопротивления передачи, измеренные при размыкании обоих входов.

Уравнения (2.28) называют уравнениями четырехполюсника. Все вместе сопротивления Z_{ij} принято называть сопротивлениями, или параметрами, холостого хода четырехполюсника. Вид уравнений (2.28) определен тем, что в цепи, представленной четырехполюсником, рассматриваются только два входа и число уравнений здесь не зависит от сложности цепи. Последняя влияет на порядок определителя Δ и его алгебраических дополнений, определяющих коэффициенты Z_{ij} .

Уравнения четырехполюсника (2.28) можно рассматривать как уравнения контурных токов некоторой двухконтурной цепи, характеризуемой такими же связями между напряжением и током на двух своих входах, как и представленная в виде четырехполюсника исходная разветвленная цепь.

Представленная четырехполюсником цепь, содержащая только пассивные элементы, обладает свойством обратимости, или взаимности. В этом случае $Z_{12} = Z_{21}$, а четырехполюсник называют обратимым, или взаимным. Из четырех параметров обратимого четырехполюсника три независимых.

Схему двухконтурной цепи, соответствующую уравнениям обратимого четырехполюсника (рис. 2.26, а), называют схемой замещения Т-обратимого четырехполюсника. Она содержит три сопро-

тивления, которые однозначно определяются тремя независимыми параметрами четырехполюсника. Четырехполюсник называют с и м м е т р и ч н ы м, если равны его входные сопротивления Z_{11} и Z_{22} . Из четырех параметров Z_{11} , Z_{12} , Z_{21} , Z_{22} у симметричного обратимого четырехполюсника независимыми являются только два, другие два устанавливаются из соотношений: $Z_{12} = Z_{21}$ и $Z_{11} = Z_{22}$.

Для всякой сложной разветвленной обратимой цепи, рассматриваемой со стороны двух ее входов, можно построить схему замещения T , если измерить предварительно сопротивления Z_{11} , Z_{22} и Z_{12} .

Связи между напряжениями и токами (2.28) можно рассматривать как уравнения двухконтурной цепи. Ее схема (рис. 2.26, б) содержит два зависимых источника напряжения и может служить схемой замещения обратимого (при $Z_{12} = Z_{21}$) и необратимого ($Z_{12} \neq Z_{21}$) четырехполюсников. Этим же уравнениям удовлетворяет третий вариант схемы замещения четырехполюсника (рис. 2.26, в).

Уравнения четырехполюсника (2.28) в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

или

$$(\dot{U}) = (Z) (\dot{I}).$$

Матрицу $(Z) = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}$ называют матрицей сопротивления холостого хода четырехполюсника [сравните с выражением (2.7)].

Уравнения с параметрами Y . Уравнения четырехполюсника (2.28) можно решить относительно токов \dot{I}_1 и \dot{I}_2 :

$$\dot{I}_1 = \frac{Z_{22}}{\Delta} \dot{U}_1 - \frac{Z_{12}}{\Delta} \dot{U}_2; \quad \dot{I}_2 = -\frac{Z_{21}}{\Delta} \dot{U}_1 + \frac{Z_{11}}{\Delta} \dot{U}_2, \quad (2.30)$$

где Δ — определитель, составленный из коэффициентов системы уравнений (2.28).

Обозначим

$$\frac{Z_{22}}{\Delta} = Y_{11}; \quad -\frac{Z_{12}}{\Delta} = Y_{12}; \quad -\frac{Z_{21}}{\Delta} = Y_{21}; \quad \frac{Z_{11}}{\Delta} = Y_{22} \quad (2.31)$$

и перепишем уравнения четырехполюсника, решенные относительно токов, в виде:

$$\dot{I}_1 = Y_{11} \dot{U}_1 + Y_{12} \dot{U}_2; \quad \dot{I}_2 = Y_{21} \dot{U}_1 + Y_{22} \dot{U}_2, \quad (2.32)$$

где Y_{11} — входная проводимость четырехполюсника, измеренная на входе при закороченном выходе;

Y_{22} — входная проводимость, измеренная на выходе при закороченном входе;

Y_{12} и Y_{21} — проводимости передачи, измеренные при закороченных входах.

Это уравнения четырехполюсника второй формы. Они удобны, если заданы напряжения и определяются токи.

Уравнения (2.32) можно рассматривать как уравнения узловых напряжений цепи с двумя узлами. Для обратимого четырехполюсника

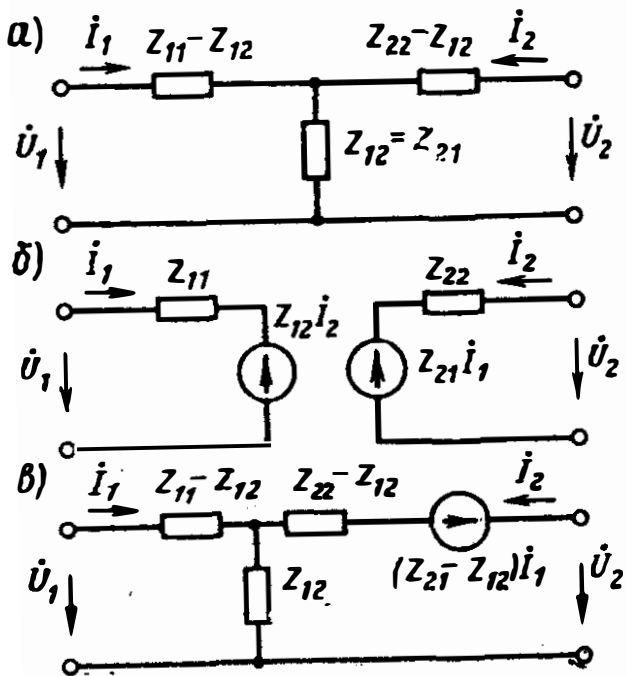


Рис. 2.26

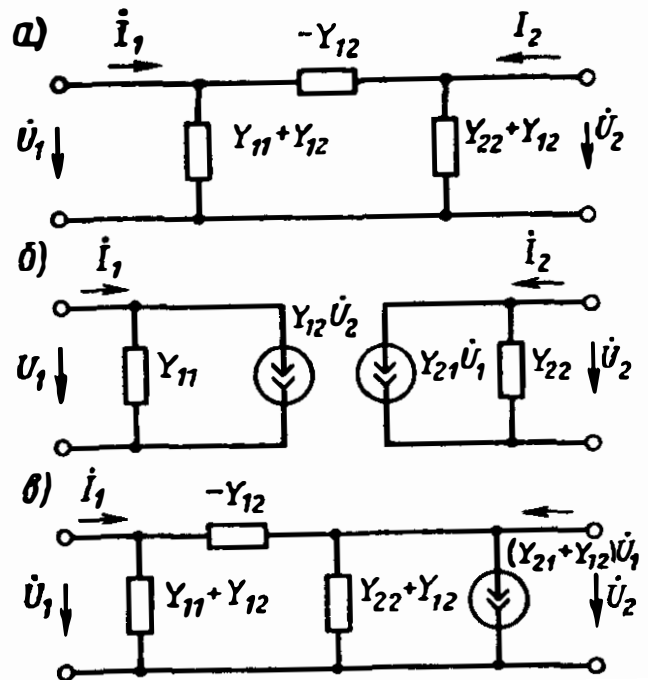


Рис. 2.27

$Y_{12} = Y_{21}$. Соответствующая уравнениям (2.32) обратимого четырехполюсника схема цепи с двумя узлами приведена на рис. 2.27, а. Эта схема замещения П-обратимого четырехполюсника. Входные проводимости короткого замыкания Y_{11} и Y_{22} симметричного четырехполюсника равны. Таким образом, у обратимого симметричного четырехполюсника независимы два параметра: входная проводимость и проводимость передачи. Два других параметра определяют из соотношений: $Y_{12} = Y_{21}$ и $Y_{11} = Y_{22}$, обусловленных обратимостью и симметрией четырехполюсника.

Два варианта двухузловых схем, соответствующих уравнениям (2.32), с зависимыми источниками тока приведены на рис. 2.27, б и в. Уравнения (2.32) в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

или

$$(\dot{I}) = (Y) (\dot{U}).$$

Матрицу $\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$ называют матрицей проводимостей короткого замыкания четырехполюсника.

Смешанные формы уравнений четырехполюсника. Рассмотренные две формы уравнений четырехполюсника выражают напряжения через токи и наоборот. Возможны другие их формы, когда одно из напряжений и один из токов определяют через оставшиеся напряжения и ток. Так, например, решив первое уравнение (2.32) относительно \dot{U}_1 , а второе уравнение (2.28) — относительно \dot{I}_2 , получим:

$$\dot{U}_1 = \frac{1}{Y_{11}} \dot{I}_1 - \frac{Y_{12}}{Y_{11}} \dot{U}_2; \quad \dot{I}_2 = -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} \dot{I}_1 + \frac{1}{Z_{22}} \dot{U}_2; \quad (2.34)$$

Обозначим

$$\frac{1}{Y_{11}} = H_{11}; \quad -\frac{Y_{12}}{Y_{11}} = H_{12}; \quad -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} = H_{21}; \quad \frac{1}{Z_{22}} = H_{22}, \quad (2.35)$$

тогда

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= H_{11} \dot{I}_1 + H_{12} \dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 &= H_{21} \dot{I}_1 + H_{22} \dot{U}_2. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Это уравнения четырехполюсника смешанной формы.

Здесь H_{11} — входное сопротивление, измеренное на входе при замкнутом выходе;
 H_{22} — выходная проводимость, измеренная на выходе при разомкнутом входе;
 H_{12} и H_{21} — коэффициенты трансформации, равные соответственно отношению напряжений \dot{U}_1 к \dot{U}_2 при холостом ходе на входе или отношению токов \dot{I}_2 к \dot{I}_1 при коротком замыкании выхода.

Для обратимого четырехполюсника $H_{12} = -H_{21}$. Действительно, из соотношений (2.31) между сопротивлениями холостого хода и проводимостями короткого замыкания следует, что

$$H_{12} = -\frac{Y_{12}}{Y_{11}} = \frac{Z_{12}}{\Delta} \frac{\Delta}{Z_{22}} = \frac{Z_{12}}{Z_{22}} = -H_{21}.$$

Связь между напряжениями и токами, обеспечивающую выполнение требования $\dot{U}_1/\dot{U}_2 = -\dot{I}_2/\dot{I}_1$, обеспечивает трансформатор с коэффициентом трансформации $\dot{U}_2/\dot{U}_1 = n = 1/H_{12}$.

Уравнениям (2.36) соответствует схема простой обратимой четырехполюсной цепи (рис. 2.28, а). Как и ранее рассмотренные схемы замещения, она характеризуется тремя независимыми параметрами. Точка у обмотки трансформатора отмечает ее начало. Соответствующая уравнениям (2.36) схема замещения необратимого четырехполюсника приведена на рис. 2.28, б.

Еще одна смешанная форма уравнений четырехполюсника получается при решении их относительно \dot{I}_1 и \dot{U}_2 . Из первого уравнения (2.28) и второго (2.31)

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{Z_{12}} \dot{U}_1 - \frac{Z_{12}}{Z_{11}} \dot{I}_2; \quad \dot{U}_2 = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}} \dot{U}_1 + \frac{1}{Y_{22}} \dot{I}_2. \quad (2.37)$$

Обозначим

$$1/Z_{11} = F_{11}; \quad -\frac{Z_{12}}{Z_{11}} = F_{12}; \quad +\frac{Y_{21}}{Y_{22}} = F_{21}; \quad \frac{1}{Y_{22}} = F_{22} \quad (2.38)$$

и перепишем уравнения в виде:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= F_{11} \dot{U}_1 + F_{12} \dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 &= F_{21} \dot{U}_1 + F_{22} \dot{I}_2. \end{aligned} \quad (2.39)$$

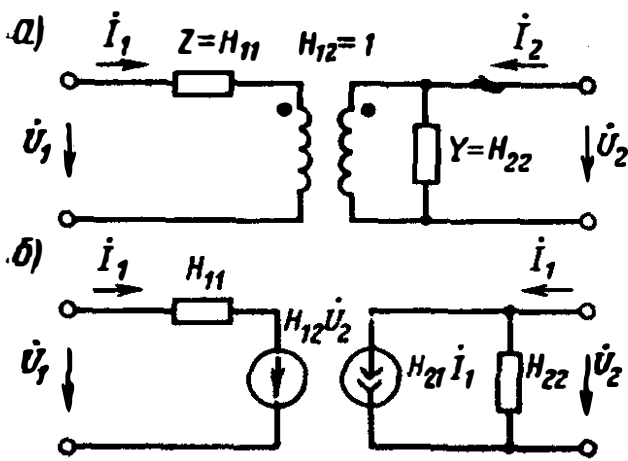


Рис. 2.28

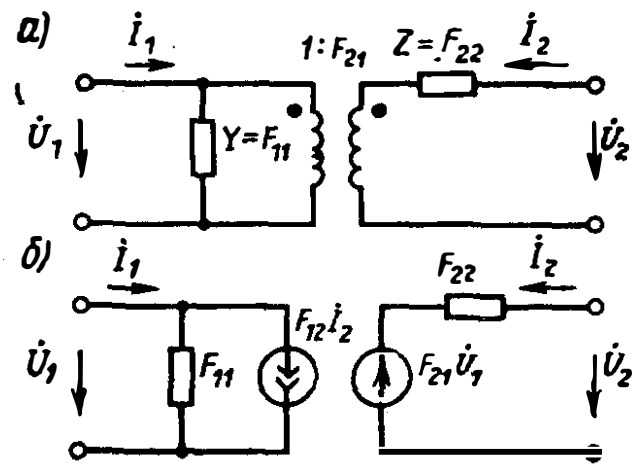


Рис. 2.29

Здесь

F_{11} — входная проводимость на входе четырехполюсника при холостом ходе на его выходе;

F_{22} — входное сопротивление на выходе четырехполюсника при замкнутом его входе;

$F_{12} = \dot{I}_1 / \dot{I}_2$ — отношение токов при замкнутом входе четырехполюсника;

$F_{21} = \dot{U}_2 / \dot{U}_1$ — отношение напряжений при разомкнутом выходе четырехполюсника.

Так как $Z_{12} / Z_{11} = -Y_{12} / Y_{22}$, то $F_{12} = -F_{21}$ — есть коэффициент трансформации.

Уравнениям (2.29) соответствует схема замещения обратимого четырехполюсника (рис. 2.29, а). Схема замещения необратимого четырехполюсника приведена на рис. 2.29, б.

2.12. УРАВНЕНИЯ ПЕРЕДАЧИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Четыре рассмотренные формы уравнений четырехполюсника относились к четырехполюсной цепи, имеющей как бы два входа. Это подчеркивалось направлением стрелок тока на рис. 2.14, в и последующих. Теперь будем считать, что рассматриваемая четырехполюсная цепь представляет собой промежуточное звено в какой-то системе передачи электрической энергии и имеет вход (зажимы 1) и выход (зажимы 2). Направления токов при этом принято обозначать стрелками, как на рис. 2.14, г. Разумеется, и в этом случае могут быть применены все рассмотренные ранее формы уравнений четырехполюсника и схемы замещения только с учетом изменения направления тока \dot{I}_2 .

В дальнейшем в зависимости от удобства будут использованы оба направления тока \dot{I}_2 , однако следует иметь в виду, что при одинаковом направлении токов \dot{I}_1 и \dot{I}_2 напряжение $\dot{U}_2 = Z_n \dot{I}_2$, а при противоположных $\dot{U}_2 = -Z_n \dot{I}_2$, где Z_n — сопротивление нагрузки.

Необходимо отметить, что при решении задачи о передаче энергии от входа четырехполюсника к его выходу наиболее удобны уравнения четырехполюсника, решенные относительно \dot{U}_1 и \dot{I}_1 .

Используя второе уравнение (2.31) и второе уравнение (2.28) и изменяя знак тока I_2 на обратный, получим:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} \dot{U}_2 - \frac{1}{Y_{21}} i_2; \\ i_1 &= \frac{1}{Z_{21}} \dot{U}_2 + \frac{Z_{22}}{Z_{21}} i_2. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Принято обозначать:

$$-\frac{Y_{22}}{Y_{21}} = A; \quad -\frac{1}{Y_{21}} = B; \quad \frac{1}{Z_{21}} = C; \quad \frac{Z_{22}}{Z_{21}} = D. \quad (2.41)$$

Уравнения (2.40) при этом запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= A\dot{U}_2 + B i_2; \\ i_1 &= C\dot{U}_2 + D i_2, \end{aligned} \quad (2.42)$$

где $A = \dot{U}_1 / \dot{U}_2$ — величина, обратная коэффициенту трансформации по напряжению при разомкнутых зажимах 2;
 $B = \dot{U}_1 / i_2$ — величина, обратная Y_{21} — проводимости передачи при замкнутых зажимах 2;
 $C = i_1 / \dot{U}_2$ — величина, обратная Z_{21} — сопротивлению передачи при разомкнутых зажимах 2;
 $D = i_1 / i_2$ — величина, обратная коэффициенту трансформации по току при замкнутых зажимах 2.

У всякого обратимого четырехполюсника из четырех параметров независимыми являются только три.

Заметим, что при разомкнутых зажимах 2 ток $i_2 = 0$ и уравнения (2.42) приобретают вид:

$$\dot{U}'_1 = A\dot{U}_2; \quad i'_1 = C\dot{U}_2.$$

При коротком замыкании зажимов 2 напряжение $\dot{U}_2 = 0$ и $\dot{U}''_1 = B i_2; \quad i''_1 = D i_2$.

Если при холостом ходе на выходе четырехполюсника напряжение \dot{U}'_1 , приложенное к выходу системы, вызвало на ее входе ток i'_1 , а на выходе напряжение \dot{U}_2 и если при коротком замыкании выхода для получения тока i_2 необходимо иметь на входе напряжение \dot{U}''_1 и ток i''_1 , то, для того чтобы на выходе четырехполюсника одновременно были ток i_2 и напряжение \dot{U}_2 , следует к его входу приложить напряжение

$$\dot{U}_1 = \dot{U}'_1 + \dot{U}''_1 = A\dot{U}_2 + B i_2.$$

Общий ток на входе при этом

$$i_1 = i'_1 + i''_1 = C\dot{U}_2 + D i_2.$$

Таким образом, рабочий режим четырехполюсника, выражаемый уравнениями (2.42), можно рассматривать как наложение двух режимов: холостого хода и короткого замыкания.

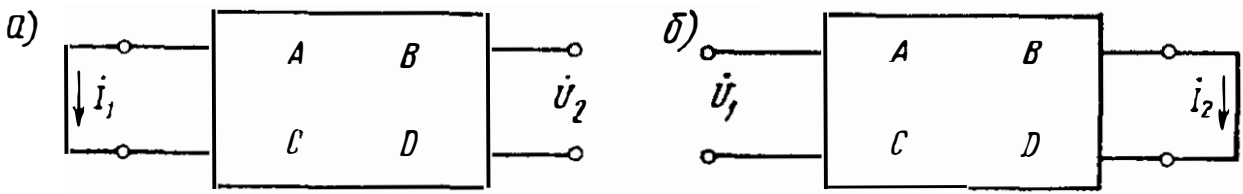


Рис. 2.30

Для установления связи между параметрами A , B , C и D , выражающей свойства обратимости, изменим направление передачи. Представим \dot{U}_2 и \dot{I}_2 как функции \dot{U}_1 и \dot{I}_1 , для чего решим систему уравнений (2.42) относительно \dot{U}_2 и \dot{I}_2 :

$$\dot{U}_2 = \frac{D\dot{U}_1 - B\dot{I}_1}{AD - BC}; \quad \dot{I}_2 = \frac{-C\dot{U}_1 + A\dot{I}_1}{AD - BC}.$$

При коротком замыкании входных зажимов (рис. 2.30, а)

$$\dot{U}_2 = \frac{-B\dot{I}_2}{AD - BC}. \quad (2.43)$$

Но при прямом направлении передачи и замыкании выходных зажимов (рис. 2.30, б)

$$\dot{U}_1 = B\dot{I}_2. \quad (2.44)$$

По теореме обратимости при равных напряжениях \dot{U}_1 и \dot{U}_2 токи должны быть одинаковыми. Сопоставляя выражения (2.43) и (2.44), можно видеть, что теорема обратимости выполняется, если

$$AD - BC = 1. \quad (2.45)$$

Для обратимого четырехполюсника, коэффициенты A , B , C и D которого связаны соотношением (2.45), уравнения обратной передачи:

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= D\dot{U}_1 - B\dot{I}_1; \\ \dot{I}_2 &= -C\dot{U}_1 + A\dot{I}_1. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Если не учитывать знак минус, появившийся здесь вследствие выбора направления тока противоположным направлению передачи, то уравнения (2.46) подобны уравнениям (2.42), только коэффициенты A и D поменялись местами.

Если четырехполюсник симметричен, условия передачи энергии не должны зависеть от ее направления. Из этого следует, что в симметричном четырехполюснике $A = D$.

Уравнения передачи четырехполюсника, как и все другие формы уравнений, содержат в общем случае четыре коэффициента, причем для обратимых четырехполюсников коэффициенты уравнений связаны между собой соотношением (2.45). Из четырех коэффициентов обратимого четырехполюсника независимыми являются только три, при обратимости и симметрии — два. Уравнения передачи четырехполюсника находят широкое применение при решении задач передачи электрической энергии.

2.13. НАПРАВЛЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТЕОРИИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Теорию четырехполюсника успешно применяют при решении задач разных типов, например при анализе свойств сложных разветвленных электрических цепей и электронных приборов: ламп, транзисторов и т. д.

Обратимую электрическую цепь, использованную для передачи электрической энергии независимо от ее сложности, в общем случае можно охарактеризовать тремя параметрами (коэффициентами), которые определяют измерением или расчетом в режимах короткого замыкания или холостого хода. Следовательно, любую сложную обратимую цепь можно заменить эквивалентной простой цепью, состоящей из трех элементов, для которой эти коэффициенты имеют те же значения, что и для сложной цепи.

Необратимая четырехполюсная цепь характеризуется четырьмя независимыми параметрами. Ее эквивалентные схемы состоят из четырех элементов и содержат зависимые источники. Схемы таких эквивалентных цепей, называемых схемами замещения четырехполюсников, были рассмотрены нами ранее. При этом отмечалось, что каждой форме уравнений четырехполюсника соответствует определенная структура схемы замещения. Для уравнений четырехполюсника (2.42) нет специальной соответствующей этой форме уравнений схемы замещения. При решении задач передачи электрической энергии, используя уравнения (2.42) и их эквивалентные, рассматриваемые далее, применяют все возможные схемы замещения, наиболее часто используют схемы Т и П (рис. 2.31).

Схемы замещения Т и П представляют собой схемы симметричных четырехполюсников, если в схеме Т будут равны сопротивления Z_1 и Z_3 , а в схеме П — сопротивления Z_2 и Z_3 .

Четырехполюсник называют уравновешенным, если падения напряжения между его зажимами 1-3 и 2-4 равны по значению. Схемы замещения (см. рис. 2.31) можно сделать уравновешенными, если сопротивления Z_1 и Z_3 в схеме Т и Z_1 в схеме П разделить на две равные части и включить между зажимами 1-3 и 2-4 (рис. 2.32).

Параметры уравновешенного четырехполюсника не отличаются от параметров соответствующего ему неуравновешенного. Действительно, схемы, приведенные на рис. 2.31 и 2.32, содержат одно и то же число контуров и узлов с соответственно равными собственными и взаимными сопротивлениями и проводимостями.

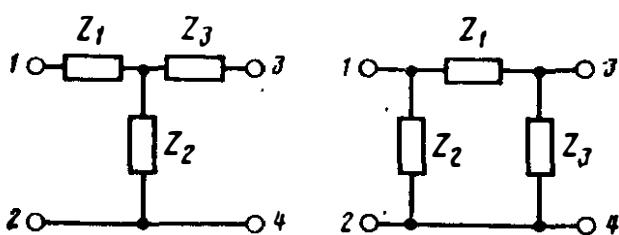


Рис. 2.31

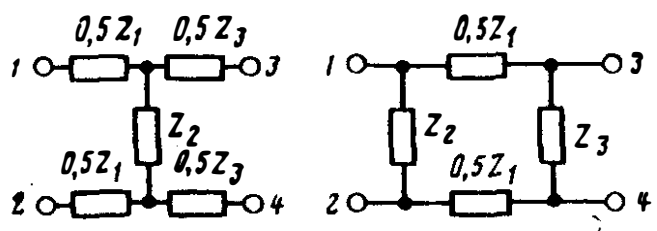


Рис. 2.32

Теорию четырехполюсника используют для создания электрических цепей с определенными передающими свойствами. Последние задают в виде частотных зависимостей параметров, связывающих напряжения и токи, а по параметрам выбирают одну из рассмотренных ранее схем замещения, по которой и строят синтезирующую цепь.

Во многих случаях сложные разветвленные цепи выгодно рассматривать как соединенные между собой различными способами четырехполюсные элементы. Проведенное в § 2.11—2.12 рассмотрение систем, параметров и схем замещения четырехполюсных цепей было ориентировано в основном на использовании понятия четырехполюсника для отображения свойств цепей при их анализе.

Для решения задач синтеза целесообразно располагать как бы каталогом схем четырехполюсников и их параметров. Составлению такого каталога и посвящены § 2.14 и 2.15.

2.14. ПАРАМЕТРЫ СХЕМ ЗАМЕЩЕНИЯ ОБРАТИМЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Схема замещения Т. Составим для схемы (рис. 2.33) уравнения четырехполюсника в форме (2.42):

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2;$$

$$\dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2.$$

Выразим для этого напряжение \dot{U}_1 и ток \dot{I}_1 через напряжение \dot{U}_2 и ток \dot{I}_2 . Воспользуемся принципом наложения и рассмотрим в отдельности режимы холостого хода и короткого замыкания выходных зажимов.

При холостом ходе, т. е. при разомкнутых зажимах 3 и 4, напряжение \dot{U}'_1 равно напряжению \dot{U}_2 на сопротивлении Z_2 плюс падение напряжения на сопротивлении Z_1 , вызванное током в сопротивлении Z_2 :

$$\dot{U}'_1 = \dot{U}_2 + Z_1 \frac{\dot{U}_2}{Z_2} = \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) \dot{U}_2 = A\dot{U}_2.$$

Ток в сопротивлениях Z_1 и Z_2 одинаковый. Таким образом,

$$\dot{I}'_1 = \dot{U}_2 / Z_2 = C\dot{U}_2.$$

При коротком замыкании (т. е. при замкнутых накоротко зажимах 3 и 4) ток \dot{I}''_1 можно выразить суммой тока \dot{I}_2 и тока в сопротивлении Z_2 :

$$\dot{I}''_1 = \dot{I}_2 + \frac{Z_3 \dot{I}_2}{Z_2} = \left(1 + \frac{Z_3}{Z_2}\right) \dot{I}_2 = D\dot{I}_2.$$

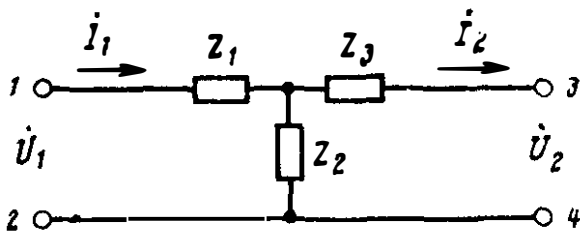


Рис. 2.33

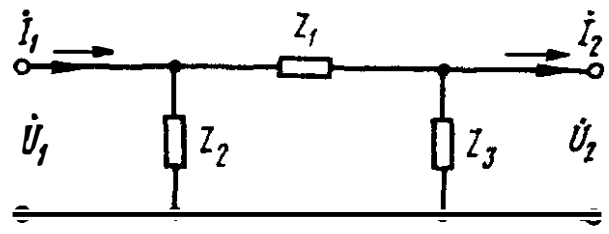


Рис. 2.34

Напряжение U_1'' равно сумме падений напряжения на сопротивлении Z_3 от тока I_2 и на сопротивлении Z_1 от суммы токов I_2 и $Z_3 I_2 / Z_2$:

$$U_1'' = Z_3 i_2 + Z_1 \left(i_2 + \frac{Z_3 i_2}{Z_2} \right) = \left(Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2} \right) i_2 = B i_2.$$

При подключении к зажимам 3 и 4 цепи, комплекс сопротивления которой не равен бесконечности или нулю, между этими зажимами будет напряжение \dot{U}_2 , а в присоединенной цепи начнет проходить ток \dot{I}_2 .

На основании принципа наложения можно утверждать, что полные напряжения и ток на входе цепи \dot{U}_1 и \dot{I}_1 равны соответственно сумме \dot{U}' и \dot{I}' при холостом ходе и \dot{U}_1'' и \dot{I}_1'' при коротком замыкании зажимов 3 и 4:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}' + \dot{U}_1'' = \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2} \right) \dot{U}_2 + \left(Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2} \right) i_2; \\ \dot{I}_1 &= \dot{I}' + \dot{I}_1'' = \frac{1}{Z_2} \dot{U}_2 + \left(1 + \frac{Z_3}{Z_2} \right) i_2. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Это и есть уравнение схемы замещения Т в форме уравнений (2.42).

Здесь

$$A = 1 + \frac{Z_1}{Z_2}; \quad B = Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2}; \quad C = \frac{1}{Z_2}; \quad D = 1 + \frac{Z_3}{Z_2}. \quad (2.48)$$

Нетрудно проверить, что между коэффициентами A , B , C и D выполняется соотношение $AD - BC = 1$.

Для получения уравнения схемы Т в виде уравнений (2.28) выразим напряжения на входе и выходе цепи \dot{U}_1 и \dot{U}_2 через токи \dot{I}_1 и \dot{I}_2 . Пользуясь вторым уравнением (2.47) и решая его относительно \dot{U}_2 , получим:

$$\dot{U}_2 = Z_2 \dot{I}_1 - (Z_2 + Z_3) \dot{I}_2.$$

Подставляя полученное значение \dot{U}_2 в первое уравнение (2.28), найдем:

$$\dot{U}_1 = (Z_1 + Z_2) \dot{I}_1 - Z_2 \dot{I}_2.$$

Сравнивая полученные уравнения с уравнениями (2.28) и учитывая изменение напряжения тока \dot{I}_2 , найдем:

$$Z_{11} = (Z_1 + Z_2); \quad Z_{12} = Z_{21} = Z_2; \quad Z_{22} = (Z_2 + Z_3). \quad (2.49)$$

Схема замещения П (рис. 2.34). Составим для схемы П уравнения вида (2.42), для чего рассмотрим режимы холостого хода и короткого замыкания на выходе. При холостом ходе напряжение \dot{U}_1 на входе равно сумме напряжения \dot{U}_2 и падения напряжения на сопротивлении Z_1 :

$$\dot{U}'_1 = \dot{U}_2 + Z_1 \frac{\dot{U}_2}{Z_3} = \left(1 + \frac{Z_1}{Z_3}\right) \dot{U}_2 = A\dot{U}_2.$$

Ток на входе равен сумме токов в сопротивлениях Z_3 и Z_2 :

$$i'_1 = \frac{\dot{U}_2}{Z_3} + \frac{1}{Z_2} \left(1 + \frac{Z_1}{Z_3}\right) \dot{U}_2 = \left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{Z_1}{Z_2 Z_3}\right) \dot{U}_2 = C\dot{U}_2.$$

При коротком замыкании

$$\dot{U}''_1 = Z_1 i_2 = B i_2; \quad i''_1 = i_2 + \frac{Z_1 i_2}{Z_2} = \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) i_2 = D i_2.$$

Полное напряжение и ток на входе

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}'_1 + \dot{U}''_1 = \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) \dot{U}_2 + Z_1 i_2; \\ i_1 &= i'_1 + i''_1 = \left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{Z_1}{Z_2 Z_3}\right) \dot{U}_2 + \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) i_2. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Это уравнения схемы П в форме уравнений (2.42). Здесь

$$\begin{aligned} A &= \left(1 + \frac{Z_1}{Z_3}\right); \quad B = Z_1; \\ C &= \left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{Z_1}{Z_2 Z_3}\right); \quad D = \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Нетрудно проверить, что между коэффициентами A , B , C и D существует соотношение $AD - BC = 1$.

Представим уравнения схемы П в виде уравнений (2.31). Воспользуемся первым уравнением (2.50). Решая его относительно i_2 , получим:

$$i_2 = \frac{1}{Z_1} \dot{U}_1 - \frac{Z_1 + Z_3}{Z_1 Z_3} \dot{U}_2.$$

Подставляя полученное значение i_2 во второе уравнение (2.50), найдем:

$$i_1 = \frac{Z_1 + Z_3}{Z_1 Z_3} \dot{U}_1 - \frac{1}{Z_1} \dot{U}_2.$$

Если воспользоваться вместо сопротивлений Z_1, Z_2, Z_3 схемы П обратными величинами — проводимостями Y_1, Y_2, Y_3 , то полученные уравнения можно представить так:

$$\begin{aligned} i_1 &= (Y_1 + Y_2) \dot{U}_1 - Y_1 \dot{U}_2; \\ i_2 &= Y_1 \dot{U}_1 - (Y_1 + Y_3) \dot{U}_2. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая изменения направления тока I_2 , найдем, что

$$Y_{11} = (Y_1 + Y_2); Y_{12} = Y_{21} = -Y_1; Y_{22} = (Y_1 + Y_3). \quad (2.52)$$

Рассмотренные формы уравнений схем Т и П позволяют подбирать значения сопротивлений Z_1 , Z_2 и Z_3 , образующих схему, так, чтобы схема замещения оказалась эквивалентной заданному четырехполюснику, для которого измерениями может быть установлено необходимое число каких-либо его параметров. Для построения эквивалентной схемы используют ту форму уравнений и групп параметров, для которых соответствующие параметры четырехполюсника легче всего определяются экспериментально. Пусть, например, для некоторого четырехполюсника легче всего измерить Z_{11} , Z_{22} и Z_{12} при холостом ходе. В этом случае для построения схемы замещения Т на основании соотношений (2.43) достаточно определить:

$$Z_1 = Z_{11} - Z_{12}; Z_3 = Z_{22} - Z_{21}; Z_2 = Z_{21} = Z_{12}.$$

Параметры четырехполюсников удобно сводить в матрицы. Для схемы замещения Т мы определили две матрицы: матрицу (A)

$$(A) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) \left(Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2}\right) \\ \frac{1}{Z_2} \left(1 + \frac{Z_3}{Z_2}\right) \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

и матрицу (Z) — матрицу сопротивлений холостого хода:

$$(Z) = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Z_1 + Z_2) & Z_2 \\ Z_2 & (Z_2 + Z_3) \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

Для схемы замещения П имеем матрицу (A):

$$(A) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{Z_1}{Z_3}\right) & Z_1 \\ \left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{Z_1}{Z_2 Z_3}\right) & \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

и матрицу (Y) — матрицу проводимостей короткого замыкания:

$$(Y) = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right) & -\frac{1}{Z_1} \\ -\frac{1}{Z_1} & \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_3}\right) \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

Симметричные схемы замещения Т и П (рис. 2.35). Каждую из схем можно рассматривать, как составленную из двух частей, называемых схемами Г. Согласно соотношениям (2.47) и (2.50) уравнения симметричных схем примут вид: для схемы Т

$$\begin{aligned} U_1 &= \left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right) U_2 + Z_1 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right) I_2; \\ I_1 &= \frac{1}{Z_2} U_2 + \left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right) I_2. \end{aligned} \quad (2.57)$$

для схемы П

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right) \dot{U}_2 + Z_1 i_2; \\ i_1 &= \frac{1}{Z_2} \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right) \dot{U}_2 + \left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right) i_2. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Матрицы (A) для этих двух схем соответственно будут:

$$\begin{pmatrix} A_T & B_T \\ C_T & D_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right) & Z_1 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right) \\ \frac{1}{Z_2} & \left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right) \end{pmatrix}; \quad (2.59)$$

$$\begin{pmatrix} A_\Pi & B_\Pi \\ C_\Pi & D_\Pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right) & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right) & \left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right) \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

Для симметричных схем замещения, как для всякого симметричного четырехполюсника, $A = D$; при этом для обратимых четырехполюсников между коэффициентами существует соотношение

$$A^2 - BC = 1.$$

Таким образом, симметричные схемы замещения как обратимые симметричные четырехполюсники характеризуются двумя независимыми коэффициентами.

Схема Г. Рассмотрим уравнения и параметры половины симметричных схем Т и П (рис. 2.36). Для этой половины можно сразу написать:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_2 + \frac{Z_1}{2} i_2; \\ i_1 &= \frac{1}{2Z_2} \left(\dot{U}_2 + \frac{Z_1}{2} i_2\right) + i_2 = \frac{1}{2Z_2} \dot{U}_2 + \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right) i_2. \end{aligned}$$

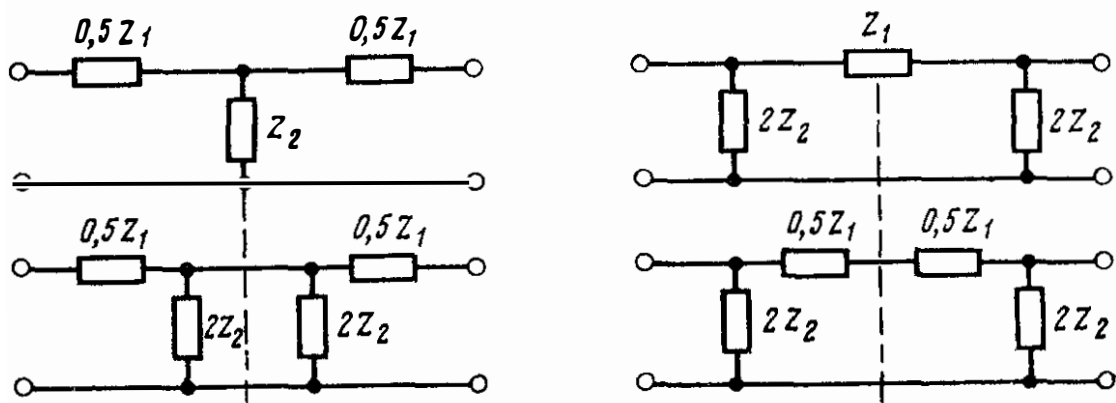


Рис. 2.35

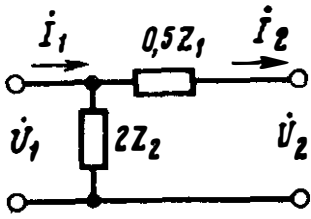


Рис. 2.36

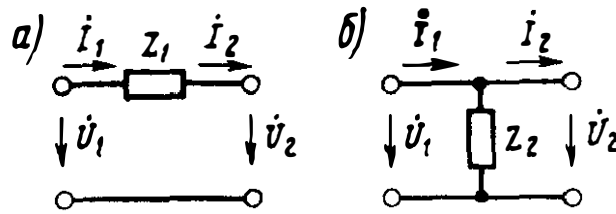


Рис. 2.37

Отсюда

$$\begin{pmatrix} A_{\Gamma} & B_{\Gamma} \\ C_{\Gamma} & D_{\Gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{Z_1}{2} \\ \frac{1}{2Z_2} & \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right) \end{pmatrix}. \quad (2.61)$$

Неполные четырехполюсники. Иногда бывает полезно одиночные ветви и элементы сложной цепи рассматривать как отдельные четырехполюсники. Схемы таких четырехполюсников, называемых неполными, приведены на рис. 2.37. Например, для четырехполюсника (рис. 2.37, а) можно составить уравнения как для неполного четырехполюсника:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 + Z_1 i_2; \quad i_1 = i_2.$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.62)$$

Непосредственно из схемы видно, что с учетом изменения направления i_2

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{Z_1} & -\frac{1}{Z_1} \\ -\frac{1}{Z_1} & \frac{1}{Z_1} \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Сопrotивления холостого хода бесконечно велики, поэтому говорят, что матрицы (Z) для схемы, приведенной на рис. 2.37, а, не существует.

Уравнения для схемы, приведенной на рис. 2.37, б, имеют вид:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2; \quad i_1 = \frac{1}{Z_2} \dot{U}_2 + i_2. \quad (2.64)$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 \end{pmatrix}. \quad (2.65)$$

Все проводимости короткого замыкания равны нулю. Матрицы (Y) не существует.

Четырехполюсник скрещивания. При представлении сложных схем соединениями четырехполюсников бывает полезно в качестве отдельного четырехполюсника рассматривать скрещение соединительных проводов (рис. 2.37, в). Для него

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= -\dot{U}_2; \quad \dot{I}_1 = -\dot{I}_2. \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Четырехполюсник мостовой схемы. В различного рода устройствах телемеханики и связи часто встречается схема симметричного моста (рис. 2.38, а), используемая как передающий элемент с определенными свойствами.

Рассмотрим параметры этой схемы как параметры четырехполюсника. Легче всего для схемы моста определить сопротивления холостого хода. Входное сопротивление при холостом ходе

$$Z_{11} = 0,5 (Z_1 + Z_2).$$

Поскольку схема симметрична, $Z_{22} = Z_{11}$. Для определения $Z_{12} = Z_{21}$ в режиме холостого хода рассмотрим схему (рис. 2.38, б). Найдем напряжение \dot{U}_2 как разность напряжений на зажимах 3 и 4:

$$\dot{U} = Z_2 \cdot 0,5 \dot{I}_2 - Z_1 \cdot 0,5 \dot{I}_1 = 0,5 (Z_2 - Z_1) \dot{I}_1.$$

Отсюда

$$Z_{12} = Z_{21} = 0,5 (Z_2 - Z_1).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (Z_1 + Z_2) & (Z_2 - Z_1) \\ (Z_2 - Z_1) & (Z_1 + Z_2) \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2Z_1 Z_2} \begin{pmatrix} (Z_1 + Z_2) & (Z_1 - Z_2) \\ (Z_1 - Z_2) & (Z_1 + Z_2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Переходный трансформатор как четырехполюсник. В технике сильных токов трансформаторы применяют для преобразования переменного тока напряжения одного значения в переменный ток напряжения другого значения для достижения максимального к.п.д. при неизмен-

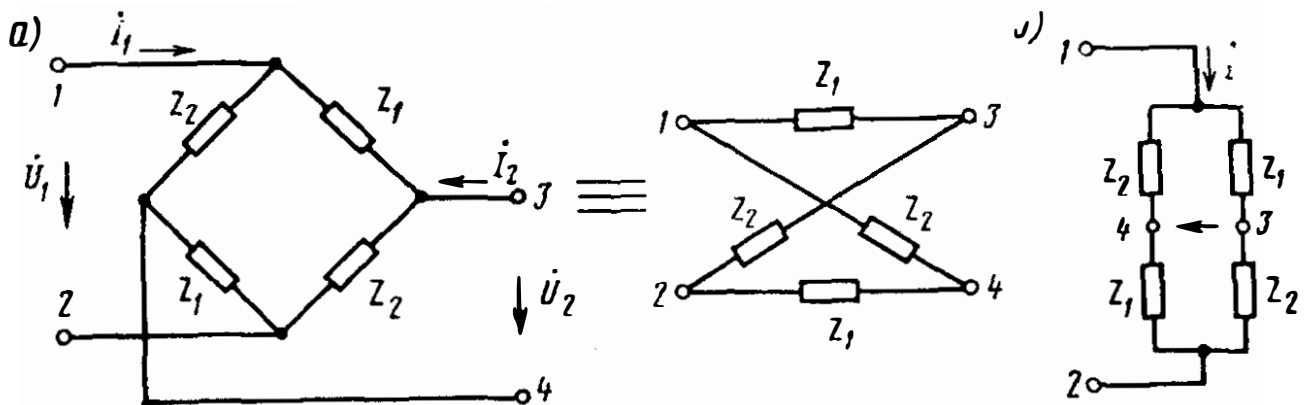


Рис. 2.38

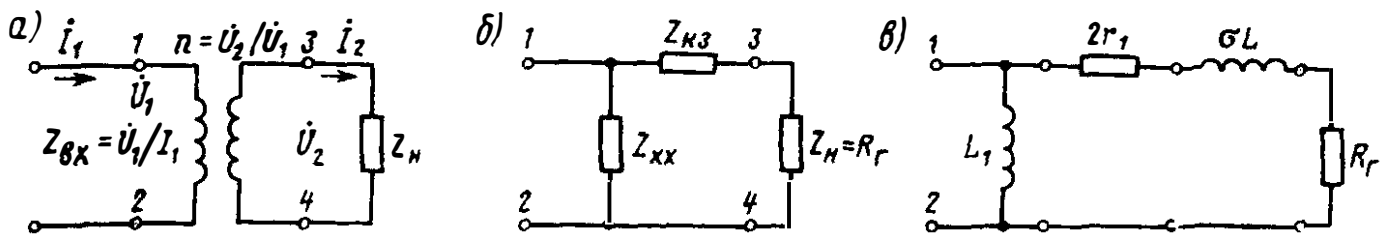


Рис. 2.39

ной частоте. В технике многоканальной связи и телемеханических устройствах для получения оптимальных условий передачи сигналов на расстояние применяют переходные трансформаторы, которые в отличие от силовых трансформаторов обычно работают не на одной частоте, а в спектре частот. Переходный трансформатор должен передавать энергию максимальной мощности от генератора сигналов к нагрузке, поэтому он должен согласовывать сопротивления генератора и нагрузки трансформацией. Согласование указанных сопротивлений поясняется рис. 2.39, а. Как видно, приемник (нагрузка) с сопротивлением $Z_H = -\dot{U}_2/\dot{I}_2$, будучи подключен через трансформатор с коэффициентом трансформации $n = \sqrt{Z_H/Z_r}$, меняет свое сопротивление на Z_r , чем обеспечивается отбор энергии наибольшей мощностью от генератора с внутренним сопротивлением Z_r .

При расчете переходного трансформатора параметры его обмоток — индуктивность, сопротивление и индуктивность рассеивания — выбирают так, чтобы трансформатор мог работать в заданной полосе частот. Подбор параметров проводят на основе теории четырехполюсника.

Составим уравнения трансформатора как четырехполюсника, учитывая направление тока \dot{I}_2 :

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= Z_{11} \dot{I}_1 - Z_{12} \dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 &= Z_{12} \dot{I}_1 - Z_{22} \dot{I}_2. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Здесь Z_{11} — комплекс сопротивления первичной обмотки;
 Z_{22} — комплекс сопротивления вторичной обмотки;
 Z_{12} — комплекс взаимного сопротивления обмоток.

В уравнениях (2.68):

$$\begin{aligned} Z_{11} &= r_1 + j\omega L_1; \\ Z_{22} &= r_2 + j\omega L_2; \\ Z_{12} &= j\omega M_{12}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Взаимная индуктивность обмоток трансформатора

$$M_{12} = \sqrt{L_1 L_2 (1 - \sigma)}, \quad (2.70)$$

где σ — коэффициент рассеяния трансформатора.

Решая уравнения (2.68) относительно \dot{U}_1 и \dot{I}_1 , получим:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \frac{Z_{11}}{Z_{12}} \dot{U}_2 + \frac{Z_{11} Z_{22} - Z_{12}^2}{Z_{12}} \dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 &= \frac{1}{Z_{12}} \dot{U}_2 + \frac{Z_{22}}{Z_{12}} \dot{I}_2, \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{Z_{11}}{Z_{12}} & \frac{Z_{11} Z_{22} - Z_{12}^2}{Z_{12}} \\ \frac{1}{Z_{12}} & \frac{Z_{22}}{Z_{12}} \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (2.71)$$

Уравнения трансформатора как четырехполюсника, определяющие его параметры, позволяют построить его эквивалентную схему.

Эквивалентная схема трансформатора. Трансформаторы, используемые в устройствах преобразования сигналов, мостовых электрических фильтрах, выходных каскадах усилителей, при соединении аппаратуры и цепей проводных линий, называют **п е р е х о д н ы м и**. Они, как правило, кроме функций гальванического разъединения цепей, решают задачу согласования сопротивлений.

Переходные трансформаторы рассчитывают по упрощенной схеме замещения, эквивалентной трансформатору по входному сопротивлению. Для построения такой схемы найдем входное сопротивление трансформатора. Заменяя в выражениях (2.71) \dot{U}_2 на $R_H \dot{I}_2$, делим первое выражение на второе и, сокращая \dot{I}_2 , найдем:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{Z_H (Z_{11}/Z_{12}) + (Z_{11} Z_{22} - Z_{12}^2)/Z_{12}}{(Z_H/Z_{12}) + (Z_{22}/Z_{12})} = Z_{11} \frac{Z_H + (Z_{11} Z_{22} - Z_{12}^2)/Z_{11}}{Z_H + Z_{22}}. \quad (2.72)$$

Умножая числитель и знаменатель на $Z_{11}/Z_{22} = 1/n^2$, получим:

$$Z_{\text{вх}} = Z_{11} \frac{(1/n^2) Z_H + (Z_{11} Z_{22} - Z_{12}^2)/Z_{22}}{(1/n^2) Z_H + Z_{11}}.$$

Из соотношения (2.72) хорошо видно, что при $Z_H = \infty$

$$Z_{\text{xx}} = Z_{11}; \text{ при } Z_H = 0 \quad Z_{\text{кз}} = \frac{Z_{11} Z_{22} - Z_{12}^2}{Z_{22}}.$$

Таким образом, входное сопротивление в общем случае

$$Z_{\text{вх}} = \frac{Z_{\text{xx}} [(1/n^2) Z_H + Z_{\text{кз}}]}{Z_{\text{xx}} + (1/n^2) Z_H}.$$

Так как практически в трансформаторе $Z_{\text{xx}} \gg Z_{\text{кз}}$, то можно к знаменателю последнего выражения без ущерба для точности решаемой задачи прибавить $Z_{\text{кз}}$. Тогда

$$Z_{\text{вх}} = \frac{Z_{\text{xx}} [(1/n^2) Z_H + Z_{\text{кз}}]}{Z_{\text{xx}} + (1/n^2) Z_H + Z_{\text{кз}}}.$$

Последнее выражение представляет собой комплексное сопротивление цепи, состоящей из двух параллельных ветвей (рис. 2.39, б). Учтем, что

$$Z_{xx} = Z_{11} = r_1 + j\omega L_1 \approx j\omega L_1;$$

$$Z_{кз} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}} = r_1 + j\omega L_1 - \frac{j\omega j\omega L_1 L_2 (1 - \sigma)}{r_2 + j\omega L_2}.$$

Если для упрощения считать потери в первой и второй обмотках одинаковыми и в эквивалентной схеме сосредоточить их только в первой обмотке, то получим:

$$Z_{кз} \cong 2r_1 + j\omega L_1 - \frac{j\omega L_1 j\omega L_2 (1 - \sigma)}{j\omega L_2} = 2r_1 + j\omega L_1 \sigma.$$

Заменив в схеме, приведенной на рис. 2.39, б, $Z_{кз}$ и Z_{xx} их значениями, получим схему (рис. 2.39, в). Параметры этой схемы как четырехполюсника можно определить, рассматривая ее как соединение трех неполных схем.

Идеальный трансформатор. Трансформатор без потерь и магнитного рассеяния, обмотки которого имеют весьма большую индуктивность, называют идеальным.

Уравнения идеального трансформатора можно получить из уравнений (2.71), если учесть его свойства, данные в самом определении:

при отсутствии потерь

$$Z_{11} = j\omega L_1; \quad Z_{22} = j\omega L_2; \quad Z_{22}/Z_{11} = L_2/L_1 = n^2;$$

при отсутствии магнитного рассеяния

$$Z_{12} = j\omega \sqrt{L_1 L_2}; \quad Z_{11}/Z_{22} = \sqrt{L_1/L_2} = 1/n; \quad Z_{22}/Z_{11} = n.$$

Отсюда $Z_{12}^2 = Z_{11}Z_{22}$, вследствие чего в уравнениях трансформатора как четырехполюсника второе слагаемое второго уравнения обращается в нуль, в уравнении тока I_1 при больших значениях L_1 и L_2 слагаемыми $\frac{1}{Z_{12}} \dot{U}_2$ можно пренебречь.

Таким образом, напряжения и токи на входе и выходе идеального трансформатора связаны соотношениями:

$$\dot{U}_1 = \frac{1}{n} \dot{U}_2; \quad I_1 = n I_2,$$

где n — коэффициент трансформации трансформатора.

Матрица параметров идеального трансформатора

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}. \quad (2.73)$$

Такой идеальный трансформатор и использован в схемах замещения (см. рис. 2.28 и 2.29).

2.15. СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ И ПАРАМЕТРЫ НЕОБРАТИМЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Мы рассматривали обратимые четырехполюсники. Если четырехполюсник характеризуется, например, сопротивлениями холостого хода [см. уравнения (2.28)], то признаком обратимости является равенство сопротивлений передачи $Z_{12} = Z_{21}$. Обратимый четырехполюсник имеет, таким образом, три независимых параметра и схема замещения его состоит из трех элементов.

В устройствах управления и связи наряду с электрическими линиями, трансформаторами, фильтрами и другими элементами, образованными пассивными электрическими цепями (свойства которых хорошо отображаются рассмотренными ранее схемами замещения обратимых четырехполюсников), широко применяют усилители различного рода. К ним можно отнести электронные, магнитные и другие приборы, обладающие свойством необратимости.

Для уяснения взаимодействия усилительных и других необратимых элементов с элементами устройств, образованными пассивными электрическими цепями, схемы необратимых элементов также представляют в виде эквивалентных схем.

Схемы замещения усилителей. В качестве схемы замещения усилителя может быть использована любая из схем замещения необратимого четырехполюсника (см. рис. 2.26—2.29).

Рассмотрим схему, приведенную на рис. 2.40, а. Это схема Т, содержащая зависимый от I_1 источник напряжения. Для нее уравнения контурных токов:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= (Z_1 + Z_2) \dot{I}_1 + Z_2 \dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 &= (Z_2 + Z_3) \dot{I}_1 + (Z_2 + Z_3) \dot{I}_2. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Эти уравнения усилительного элемента как четырехполюсника в отличие от уравнений пассивного четырехполюсника содержат параметр усилительной способности $Z_3 = \dot{U}_2 / \dot{I}_1$.

Схема замещения Т для усилителя легко строится, если для него экспериментально или теоретически определены элементы матрицы сопротивлений холостого хода:

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Z_1 + Z_2) & Z_2 \\ (Z_2 + Z_3) & (Z_2 + Z_3) \end{pmatrix}, \quad (2.75)$$

[сравним с матрицей (2.54)].

Из равенства (2.75) следует:

$$Z_2 = Z_{12}; \quad Z_1 = Z_{22} - Z_{12}; \quad Z_3 = Z_{22} - Z_{12}; \quad Z_0 = Z_{21} - Z_{12}.$$

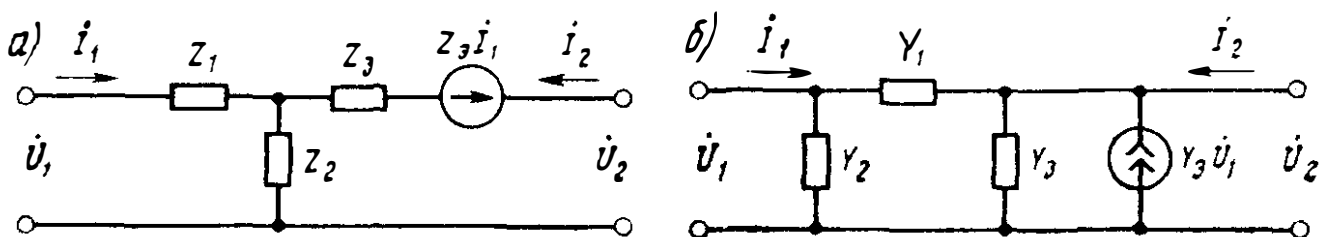


Рис. 2.40

В тех случаях, когда из-за режима, свойственного усилителю, или по другим соображениям удобнее применять проводимости короткого замыкания, используют схему замещения П (рис. 2.40, б), содержащую зависимый от \dot{U}_1 источник тока.

Уравнения узловых напряжений в этом случае:

$$\begin{aligned} \dot{i}_1 &= (Y_1 + Y_2) \dot{U}_1 - Y_1 \dot{U}_2; \\ \dot{i}_2 &= -(Y_1 + Y_2) \dot{U}_1 + (Y_1 + Y_3) \dot{U}_2. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Здесь четвертым элементом схемы является зависимый источник тока, а уравнение дополняют параметром, характеризующим усиленную способность Y_3 .

Матрица проводимостей короткого замыкания

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Y_1 + Y_2) & -Y_1 \\ -(Y_1 + Y_2) & (Y_1 + Y_3) \end{pmatrix}, \quad (2.77)$$

[сравним с матрицей (2.56)].

Установив измерениями или расчетом значения проводимостей короткого замыкания для элементов схемы замещения П, найдем:

$$\begin{aligned} Y_1 &= -Y_{12}; & Y_2 &= Y_{11} + Y_{12}; \\ Y_3 &= Y_{22} - Y_{12}; & Y_2 &= Y_{12} - Y_{21}. \end{aligned}$$

Представление усилителей эквивалентными схемами Т и П с зависимыми источниками достаточно хорошо отражает их свойства и позволяет обычными методами ТЛЭЦ оценивать взаимодействие необратимых элементов с обратимыми, образующими совместно с ними тракт передачи сигналов.

Операционный усилитель и его схемы замещения. Операционный усилитель — это высококачественный усилитель напряжения универсального назначения. Его входное сопротивление $Z_{\text{вх}} \rightarrow \infty$, выходное $Z_{\text{вых}} \rightarrow 0$, коэффициент усиления бесконечно большой. Операционные усилители выпускают в интегральном микроминиатюрном исполнении, они находят всевозрастающее применение в разнообразных устройствах автоматики, телемеханики и связи. Обычно он имеет два входа (рис. 2.41, а): инвертирующий (отмечаемый знаком $-$) и неинвертирующий (отмечаемый знаком $+$). При использовании в схеме обоих входных зажимов операционного усилителя разностью потенциалов между ними обычно пренебрегают.

Схема замещения операционного усилителя с использованными двумя входами приведена на рис. 2.41, б, а с использованным одним инвертирующим входом — на рис. 2.41, в и одним неинвертирующим — на рис. 2.41, г.

Часто операционные усилители применяют для получения заданного усиления по напряжению или току. Коэффициенты усиления фиксируют включением обратных связей, т. е. подачей части выходного напряжения или тока на вход усилителя. Способы получения обратной связи далее будут рассмотрены подробно. Схема неинвертирующего усилителя с заданным устойчивым усилением по напряжению приведена на рис. 2.42, а, его схема замещения — на рис. 2.42, б.

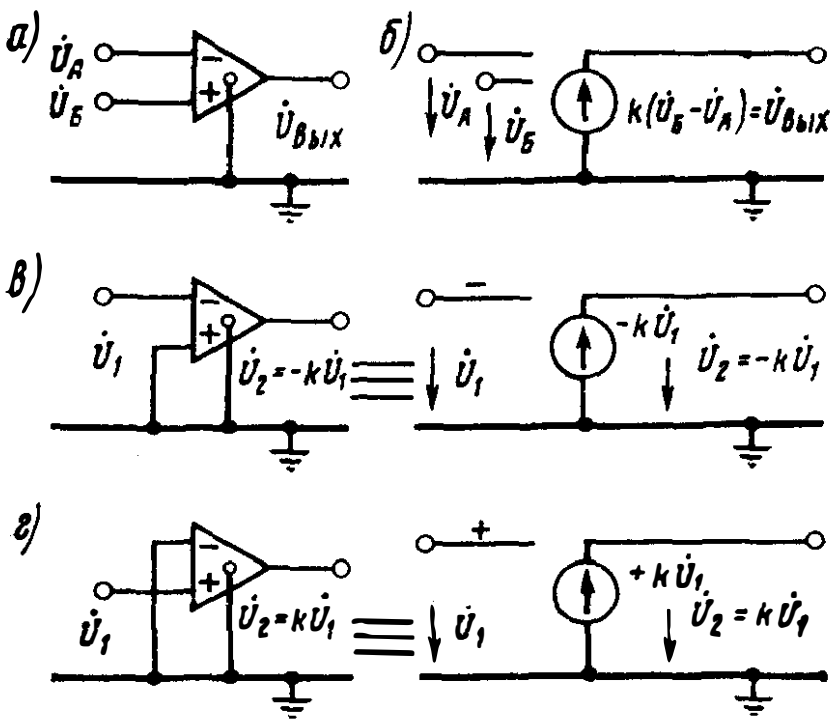


Рис. 2.41

Для операционного усилителя $\dot{U}_B - \dot{U}_A = \dot{U}_2/k$. При $k \rightarrow \infty$ величина $\dot{U}_B - \dot{U}_A \rightarrow 0$ и, таким образом,

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_A = \frac{\dot{U}_2}{R1 + R2} R2.$$

Отсюда $\dot{U}_2/\dot{U}_1 = (R1 + R2)/R2$. Практически усиление усилителя с обратной связью зависит только от величин $R1$ и $R2$.

На рис. 2.42, в приведена схема инвертирующего усилителя с регулируемым усилением, а на рис. 2.42, г — его схема замещения.

В этом случае при $k \rightarrow \infty$

$$\dot{U}_A = -\frac{\dot{U}_2}{k} \rightarrow 0.$$

Но в то же время вследствие большого входного сопротивления операционного усилителя через резисторы $R1$ и $R2$ проходит один и тот же ток \dot{I}_1 . Отсюда

$$\frac{\dot{U}_1}{R1} = -\frac{\dot{U}_2}{R2} \text{ и } \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = -\frac{R2}{R1}. \quad (2.78)$$

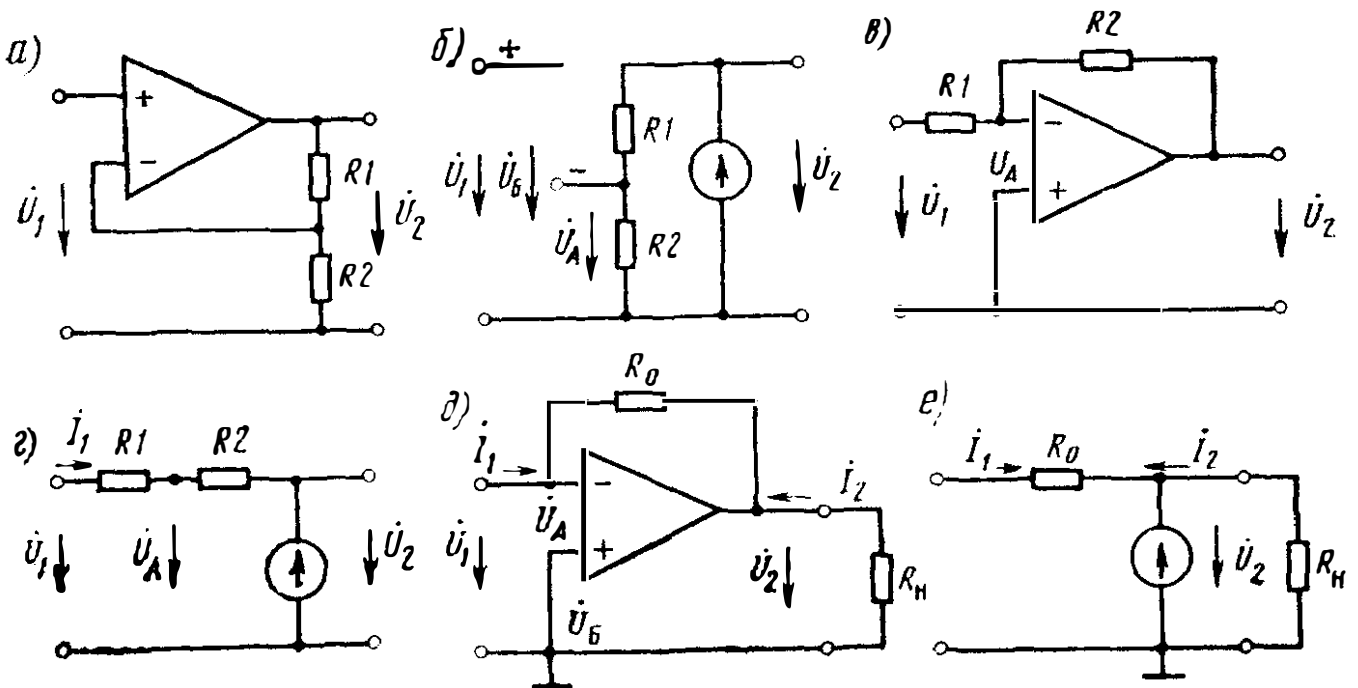


Рис. 2.42

На рис. 2.42, *д* и *е* приведены соответственно полученная на базе использования операционного усилителя схема усилителя тока и схема его замещения. Как и в ранее рассмотренных схемах, здесь $\dot{U}_1 = \dot{U}_A = \dot{U}_2/k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Отсюда

$$\dot{i}_1 = \dot{U}_2/R_0 = R_H \dot{i}_2/R_0 \text{ и } \dot{i}_2/\dot{i}_1 = \frac{R_0}{R_H}. \quad (2.79)$$

Интегратор. В устройствах преобразования сигналов в качестве основных элементов, позволяющих получить необходимые частотные зависимости, вместо катушек индуктивности и конденсаторов часто используют интегрирующие элементы (интеграторы). Это элементы, у которых напряжение $u(t)$ на входе вызывает реакцию $u_2(t) = \int_0^t u(t)dt$ на выходе. Преобразования Лапласа напряжений на входе и выходе интегратора связаны соотношением

$$\dot{U}_2(p) = \frac{1}{p} \dot{U}_1(p).$$

Интегрированию соответствует умножение на $1/p$. Интегратор просто получается при использовании операционного усилителя.

Рассмотрим схему рис. 2.43, *а*, которая получилась в результате замены в схеме, приведенной на рис. 2.42, *в*, резистора R_2 конденсатором C .

Для схемы, приведенной на рис. 2.42, *в*,

$$\dot{U}_2/\dot{U}_1 = -R_2/R_1, \text{ заменяя } R_2 \text{ на } 1/(pC), \text{ для схемы рис. 2.43, а,}$$

получим $\dot{U}_2/\dot{U}_1 = -1/(R_1Cp)$.

Если выбрать $R_1C = 1$, то $\dot{U}_2/\dot{U}_1 = -1/p$.

Если практически выбор $R_1C = 1$ неудобен, то множитель $1/R_1C$ может быть реализован усилением других элементов схемы. Условное изображение интегратора приведено на рис. 2.43, *б*.

Схемы замещения преобразователей отрицательных сопротивлений (конверторов). В некоторых задачах телемеханики и связи возникает необходимость в определенных связях между напряжениями и токами, которые можно получить только при использовании наряду с обычными пассивными элементами, имеющими положительные параметры r, L, C , также и отрицательные сопротивления. Распространенным способом получения отрицательных сопротивлений является применение так называемых преобразователей отрицательных сопротивлений.

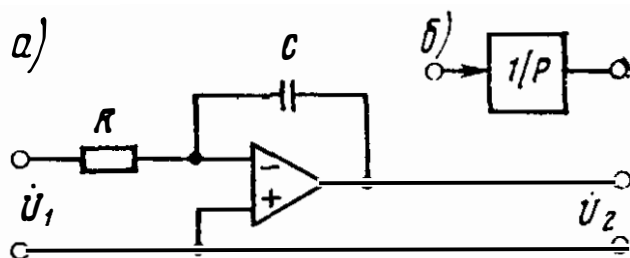


Рис. 2.43

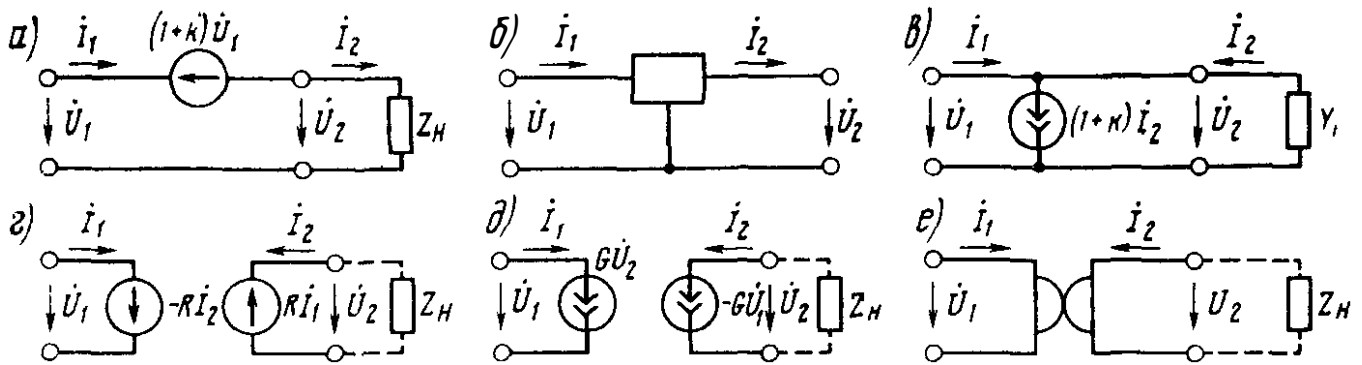


Рис. 2.44

Схема (рис. 2.44, а) представляет собой неполный четырехполюсник, содержащий зависимый источник напряжения $\dot{U} = (1 + k)\dot{U}_1$. Для нее

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 - (1 + k)\dot{U}_1 = -k\dot{U}_1; \quad i_1 = i_2; \quad (2.80)$$

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{i_1} = -\frac{\dot{U}_2}{k i_2} = -\frac{1}{k} Z_{\text{н}};$$

при $k = 1$ $Z_{\text{вх}} = -Z_{\text{н}}$;

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как видно, со стороны входных зажимов, схема четырехполюсника имеет отрицательное входное сопротивление. Она преобразует подключенное к выходу сопротивление $Z_{\text{н}}$ в $-Z_{\text{н}}$ и представляет собой схему замещения преобразователя отрицательных сопротивлений с инверсией напряжения. В схемах устройств телемеханики и связи преобразователи сопротивлений часто изображаются так, как это показано на рис. 2.44, б. Управляемый напряжением источник напряжения в схеме рис. 2.44, а можно выполнить по схеме рис. 2.42, в. Дуальной по отношению к схеме, приведенной на рис. 2.44, а, является схема рис. 2.44, в. Для нее

$$i_1 = -i_2 + (1 + k)i_2 = k i_2; \quad \dot{U}_1 = \dot{U}_2; \quad (2.81)$$

$$Y_{\text{вх}} = \frac{i_1}{\dot{U}_1} = \frac{k i_2}{\dot{U}_2} = -k Y_{\text{н}}.$$

При $k = 1$

$$Y_{\text{вх}} = -Y_{\text{н}}; \quad (2.82)$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

Как видно из рис. 2.44, схемы замещения преобразователей отрицательных сопротивлений содержат идеальные двухполюсные элементы — зависимые источники напряжений и токов. Такие преобразователи строят на основе использования усилителей, и в частности операционных.

Схемы замещения гиратора. Г и р а т о р а м и называют необратимые четырехполюсники, входное сопротивление которых обратно сопротивлению нагрузки, подключенной к его выходу. Для схемы замещения гиратора, приведенной на рис. 2.44, *з*:

$$\dot{U}_1 = -R\dot{I}_2; \quad \dot{U}_2 = R\dot{I}_1;$$

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -R \\ R & 0 \end{pmatrix}; \quad (2.84)$$

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = -\frac{R^2 \dot{I}_2}{\dot{U}_2} = \frac{R^2}{Z_{\text{н}}}, \quad (2.85)$$

где $Z_{\text{н}} = -\dot{U}_2/\dot{I}_2$.

Схема замещения гиратора, приведенная на рис. 2.44, *д*, дуальна рассмотренной:

$$\dot{I}_1 = G\dot{U}_2; \quad \dot{I}_2 = -G\dot{U}_1; \quad G = 1/R;$$

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & G \\ -G & 0 \end{pmatrix}; \quad (2.86)$$

$$Z_{\text{вх}} = \frac{1}{G^2} \frac{1}{Z_{\text{н}}};$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -R \\ G & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.87)$$

Условное изображение гиратора показано на рис. 2.44, *е*. Гираторы находят широкое применение в микроэлектронике, поскольку, преобразуя сопротивление конденсатора $Z_{\text{н}} = 1/(k\omega)$ в сопротивление катушки индуктивности $1/Z_{\text{н}} = k\omega$, позволяют громоздкие катушки заменять малогабаритными конденсаторами.

Преобразователи частотно-зависимых отрицательных сопротивлений. Рассмотренные выше конвертор и гиратор являются частными случаями необратимых устройств (обобщенных конверторов), с помощью которых можно получить различные виды частотно-зависимых отрицательных сопротивлений (ЧЗОС). Распространенная схема такого устройства приведена на рис. 2.45, *а*. Поскольку операционные усилители имеют большое входное сопротивление, а разность потенциалов между входами отсутствует, то эту схему можно заменить эквивалентной (рис. 2.45, *б*).

Входное сопротивление для нее $Z_{\text{вх}} = \dot{U}_1/\dot{I}_1$.

В соответствии со схемой

$$\dot{U}_1 = Z_1 \dot{I}_1 + Z_2 (\dot{I}_1 + \dot{I}_6) + Z_3 (\dot{I}_1 + \dot{I}_6) + (Z_4 + Z_5) (\dot{I}_1 + \dot{I}_6 + \dot{I}_7),$$

кроме того,

$$Z_1 \dot{I}_1 + Z_2 (\dot{I}_1 + \dot{I}_6) = 0;$$

$$Z_3 (\dot{I}_1 + \dot{I}_6) + Z_4 (\dot{I}_1 + \dot{I}_6 + \dot{I}_7) = 0.$$

Из двух последних выражений

$$i_1 + i_6 = -\frac{Z_1}{Z_2} i_1;$$

$$i_1 + i_6 + i_7 = \frac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z_4} i_1.$$

Подставляя полученные значения $i_1 + i_6$ и $i_1 + i_6 + i_7$ в выражение для \dot{U}_1 , найдем:

$$\dot{U}_1 = i_1 \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4};$$

$$Z_{\text{вх}} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1 = Z_1 Z_3 Z_5 / (Z_2 Z_4).$$

Если в схему (см. рис. 2.45, а) включить $Z_1 = R1$, $Z_3 = R3$, $Z_5 = R5$, $Z_2 = R2$ и $Z_4 = 1/(j\omega C)$, то

$$Z_{\text{вх}} = j\omega \frac{R1R3R5C}{R2} = j\omega L_3.$$

Схема ведет себя как гиратор.

При включении в эту схему $Z_1 = Z_3 = 1/(j\omega C)$ и $Z_2 = Z_4 = Z_5 = R$

$$Z_{\text{вх}} = -\frac{1}{\omega^2 C^2 R}.$$

Это ЧЗОС обратно пропорционально квадрату частоты. Другой тип ЧЗОС можно получить, если

$$Z_2 = Z_4 = 1/(j\omega C), \quad Z_1 = Z_3 = Z_5 = R, \quad Z_{\text{вх}} = -\omega^2 C^2 R^3.$$

Это сопротивление пропорционально квадрату частоты.

Идеальный преобразователь мощности. Для этого устройства связи между напряжениями и токами имеют вид:

$$\dot{U}_1 = k \dot{U}_2; \quad \dot{I}_1 = k \dot{I}_2; \quad Z_{\text{вх}} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1 = \dot{U}_2 / \dot{I}_2 = Z_{\text{н}}.$$

Следовательно, этот четырехполюсник преобразует мощность, не изменяя сопротивления. При $k < 1$ мощность на выходе больше мощности на входе, при $k > 1$ наоборот.

Матрица параметров A, B, C, D такого четырехполюсника

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Схема замещения состоит из двух управляемых источников: источника напряжения, действующего во входном контуре, управляемого напряжением, и источника тока, управляемого током в выходном контуре.

Неопределенные матрицы проводимости. При рассмотрении схем замещения и параметров частей разветвленных электрических цепей мы использовали понятие двух-и четырехполюсника. Такой подход позволяет решать все задачи анализа и синтеза разветвленных цепей. Однако такие элементы схем, как транзистор или операционный усили-

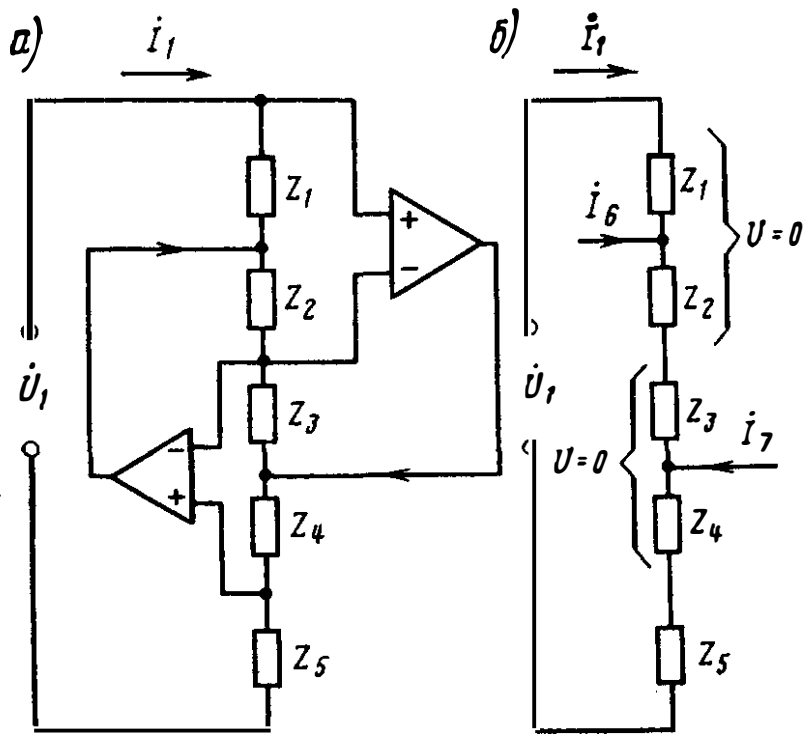


Рис. 2.45

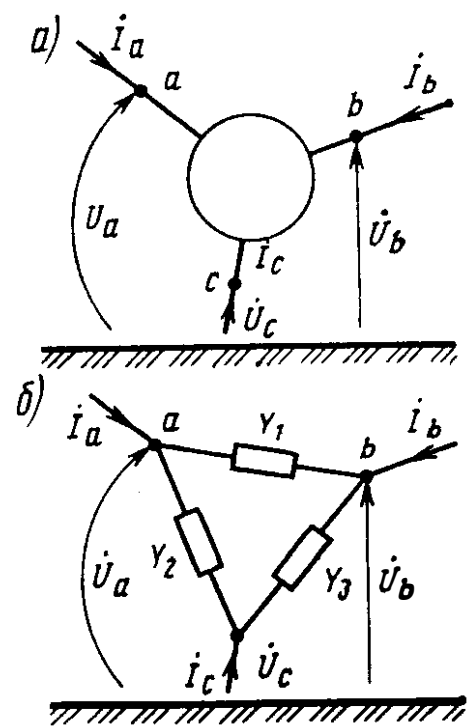


Рис. 2.46

тель, трехполюсны. У транзистора можно заземлять базу, эмиттер или коллектор. Так же по-разному можно заземлять входы операционного усилителя.

Если способ заземления выбран и заземление осуществлено (под заземлением понимают соединение с точкой нулевого потенциала), то получаем рассмотренные ранее четырехполюсные элементы, схемы замещения которых и могут быть использованы для расчета содержащих эти элементы цепей.

Характеризуя сам трехполюсный элемент до включения его в схему, можно использовать так называемые неопределенные матрицы проводимости.

На рис. 2.46, а изображен трехполюсный элемент. В его входы a , b , и c входят токи I_a , I_b , I_c , и они находятся под напряжениями \dot{U}_a , \dot{U}_b , \dot{U}_c относительно точки нулевого потенциала (экрана). Будем считать его входы узлами и заменим эту схему эквивалентной (рис. 2.46, б). Здесь Y_1 , Y_2 , Y_3 — проводимости, включенные между соответствующими узлами. Матрица проводимостей короткого замыкания для эквивалентной схемы

$$Y_H = \begin{pmatrix} Y_{aa} & Y_{ab} & Y_{ac} \\ Y_{ba} & Y_{bb} & Y_{bc} \\ Y_{ca} & Y_{cb} & Y_{cc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Y_1 + Y_2) & -Y_1 & -Y_2 \\ -Y_1 & (Y_1 + Y_3) & -Y_3 \\ -Y_2 & -Y_3 & (Y_2 + Y_3) \end{pmatrix}.$$

Сумма проводимостей этой матрицы по строкам и столбцам равна нулю.

Если заземлить один из узлов трехполюсного элемента, то получится неуравновешенный четырехполюсник, матрица проводимостей короткого замыкания которого может быть получена вычеркиванием

в матрице Y_n строки и столбца, соответствующих заземленному узлу. При заземлении узла s , например, после вычеркивания третьей строки и третьего столбца получаем матрицу (2.56).

2.16. СОЕДИНЕНИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СОЕДИНЕНИЙ

Относительно простые двухполюсные цепи всегда можно охарактеризовать эквивалентной схемой, составленной из элементов r , L , C . Эквивалентные схемы более сложных двухполюсных цепей образуют последовательным или параллельным соединением простых цепей, каждая из которых сама является двухполюсником, содержит элементы r , L и C , параллельно или последовательно соединенные, и характеризуется значением полного сопротивления Z .

Точно так же простые схемы замещения четырехполюсников состоят из двухполюсных цепей с полными сопротивлениями Z_1, Z_2, Z_3 . Однако во многих случаях целесообразно в качестве составных частей четырехполюсников использовать более простые четырехполюсники, соединяемые соответствующим образом. Различают три основных способа их соединения: параллельное, последовательное и цепочечное, или каскадное, а также смешанные способы соединения.

Рассмотрим определение параметров четырехполюсника, образованного соединением более простых четырехполюсников через параметры последних.

Последовательное соединение. Вспомним свойства последовательно соединенных двухполюсников (рис. 2.47, а). Для каждого из двухполюсников выполняется закон Ома: $\dot{U} = Z\dot{I}$, причем $\dot{U} = \dot{U}' + \dot{U}''$, а $\dot{I}' = \dot{I}'' = \dot{I}$. Находя \dot{U} как сумму $\dot{U}' + \dot{U}'' = Z'\dot{I} + Z''\dot{I}$ и вынося за скобки общий множитель — ток \dot{I} , получим $\dot{U} = (Z' + Z'')\dot{I} =$

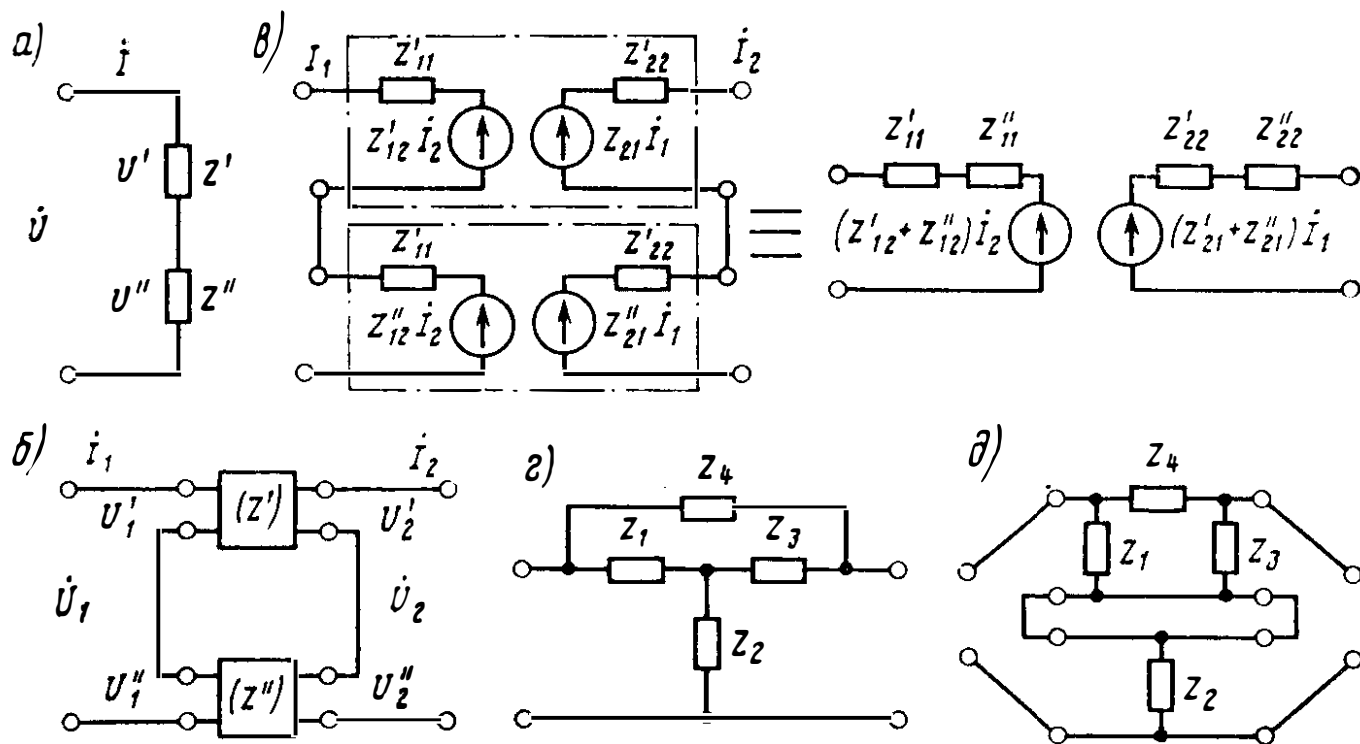


Рис. 2.47

$= ZI$. Откуда $Z = Z' + Z''$. Последовательно соединенные двухполюсники следует характеризовать их сопротивлениями и эти сопротивления складывать.

Рассмотрим теперь последовательное соединение четырехполюсников (рис. 2.47; б). Соединение характеризуется соотношениями:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}'_1 + \dot{U}''_1; & \dot{U}_2 &= \dot{U}'_2 + \dot{U}''_2; \\ \dot{I}_1 &= \dot{I}'_1 = \dot{I}''_1; & \dot{I}_2 &= \dot{I}'_2 = \dot{I}''_2. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Здесь наблюдается полная аналогия с последовательным соединением двухполюсников.

Из соотношений (2.88) видно, что при последовательном соединении каждый из входящих в соединение четырехполюсников можно характеризовать матрицами сопротивлений холостого хода и соотношениями (2.28).

Для двух соединенных четырехполюсников получим:

$$\begin{aligned} \dot{U}'_1 &= Z'_{11} \dot{I}'_1 + Z'_{12} \dot{I}'_2; \\ \dot{U}'_2 &= Z'_{21} \dot{I}'_1 + Z'_{22} \dot{I}'_2; \\ \dot{U}''_1 &= Z''_{11} \dot{I}''_1 + Z''_{12} \dot{I}''_2; \\ \dot{U}''_2 &= Z''_{21} \dot{I}''_1 + Z''_{22} \dot{I}''_2. \end{aligned}$$

Просуммируем \dot{U}'_1 и \dot{U}''_1 , а также \dot{U}'_2 и \dot{U}''_2 . Учитывая соотношения (2.88), найдем:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}'_1 + \dot{U}''_1 = (Z'_{11} + Z''_{11}) \dot{I}_1 + (Z'_{12} + Z''_{12}) \dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 &= \dot{U}'_2 + \dot{U}''_2 = (Z'_{21} + Z''_{21}) \dot{I}_1 + (Z'_{22} + Z''_{22}) \dot{I}_2. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Полученные соотношения — уравнения контурных токов для соединения. Из соотношений (2.89) следует, что

$$\begin{aligned} Z_{11} &= Z'_{11} + Z''_{11}; & Z_{12} &= Z'_{12} + Z''_{12}; \\ Z_{21} &= Z'_{21} + Z''_{21}; & Z_{22} &= Z'_{22} + Z''_{22}. \end{aligned}$$

Последнее равенство можно записать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z'_{11} & Z'_{12} \\ Z'_{21} & Z'_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z''_{11} & Z''_{12} \\ Z''_{21} & Z''_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.90)$$

На основании изложенного правило определения свойств последовательно соединенных четырехполюсников можно сформулировать так. Каждый последовательно соединяемый четырехполюсник следует характеризовать матрицей сопротивлений холостого хода и эти матрицы сложить. Число соединяемых четырехполюсников может быть любым.

Правило определения параметров последовательного соединения четырехполюсников хорошо иллюстрируется рис. 2.47, в, на котором соединяемые четырехполюсники и получившиеся в результате соединения представлены схемами замещения (см. рис. 2.26, б).

В качестве примера рассмотрим схему «перекрытое T» (рис. 2.47, г), которая может быть представлена в виде последовательного соединения двух четырехполюсников (рис. 2.47, д). Определим параметры, пользуясь правилом последовательного соединения.

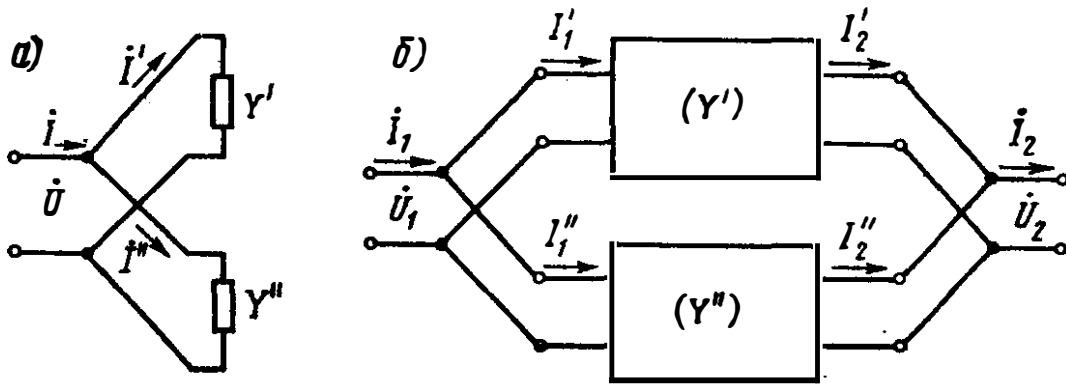


Рис. 2.48

Матрица (Z'') неполного четырехполюсника в соответствии с равенством (2.65)

$$(Z'') = \begin{pmatrix} Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 \end{pmatrix}.$$

Параметры Z схемы Π найдем решением уравнений узловых напряжений относительно \dot{U}_1 и \dot{U}_2 . Коэффициенты системы уравнений узловых напряжений этой схемы определяются матрицей (2.56). Обозначая матрицу (Z) схемы Π через (Z') , будем иметь

$$(Z') = \begin{pmatrix} \frac{Z_1(Z_3 + Z_4)}{Z_1 + Z_3 + Z_4} & \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3 + Z_4} \\ \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3 + Z_4} & \frac{Z_3(Z_1 + Z_4)}{Z_1 + Z_3 + Z_4} \end{pmatrix}.$$

Матрица (Z) соединения записывается так:

$$(Z) = (Z') + (Z'') = \begin{pmatrix} \frac{Z_1(Z_3 + Z_4) + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)}{Z_1 + Z_3 + Z_4} & \frac{Z_1 Z_3 + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)}{Z_1 + Z_3 + Z_4} \\ \frac{Z_1 Z_3 + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)}{Z_1 + Z_3 + Z_4} & \frac{Z_3(Z_1 + Z_4) + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)}{Z_1 + Z_3 + Z_4} \end{pmatrix}. \quad (2.91)$$

Параллельное соединение. Вспомним параллельное соединение двухполюсников (рис. 2.48, а). Для него

$$\begin{aligned} \dot{U}' &= \dot{U}'' = \dot{U}; & i' + i'' &= i; \\ i &= i' + i'' = Y' \dot{U} + Y'' \dot{U} = (Y' + Y'') \dot{U} = Y \dot{U}. \end{aligned}$$

Каждый параллельно соединенный двухполюсник следует характеризовать проводимостью и проводимости сложить.

Рассмотрим теперь параллельное соединение четырехполюсников (рис. 2.48, б). Для рассматриваемой схемы справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} i_1 &= i_1' + i_1''; & i_2 &= i_2' + i_2''; \\ \dot{U}_1 &= \dot{U}_1' = \dot{U}_1''; & \dot{U}_2 &= \dot{U}_2' = \dot{U}_2''. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Из этих соотношений следует, что четырехполюсники, входящие в соединение, удобно характеризовать уравнениями (2.32). Для двух рассматриваемых четырехполюсников имеем:

$$\left. \begin{aligned} i'_1 &= Y'_{11} \dot{U}'_1 + Y'_{12} \dot{U}'_2; \\ i'_2 &= Y'_{21} \dot{U}'_1 + Y'_{22} \dot{U}'_2; \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} i''_1 &= Y''_{11} \dot{U}''_1 + Y''_{12} \dot{U}''_2; \\ i''_2 &= Y''_{21} \dot{U}''_1 + Y''_{22} \dot{U}''_2. \end{aligned} \right\}$$

Просуммируем i'_1 и i''_1 , а также i'_2 и i''_2 и учтем соотношения (2.92):

$$\begin{aligned} i_1 &= i'_1 + i''_1 = (Y'_{11} + Y''_{11}) \dot{U}_1 + (Y'_{12} + Y''_{12}) \dot{U}_2; \\ i_2 &= i'_2 + i''_2 = (Y'_{21} + Y''_{21}) \dot{U}_1 + (Y'_{22} + Y''_{22}) \dot{U}_2. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Эти соотношения представляют собой уравнения узловых напряжений для соединения и указывают на возможность обобщения правила сложения проводимостей при параллельном соединении двухполюсников.

Правило определения коэффициентов соединения Y по коэффициентам входящих в него четырехполюсников можно записать при помощи матриц в виде

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y'_{11} & Y'_{12} \\ Y'_{21} & Y'_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y''_{11} & Y''_{12} \\ Y''_{21} & Y''_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.94)$$

Таким образом, матрица проводимостей параллельно соединенных четырехполюсников равна сумме матриц проводимостей четырехполюсников, входящих в соединение. Конечно, правила определения параметров соединений (2.90) и (2.94) можно было написать формально сразу.

Воспользуемся правилом (2.94) для определения матрицы проводимостей схемы «перекрытое Т», которая может быть представлена как параллельное соединение неполного четырехполюсника, включенного по схеме Т (рис. 2.49, а).

Матрица проводимостей короткого замыкания неполного четырехполюсника (Y') нам известна [сравним выражение (2.63)]:

$$(Y') = \begin{pmatrix} \frac{1}{Z_4} & -\frac{1}{Z_4} \\ -\frac{1}{Z_4} & \frac{1}{Z_4} \end{pmatrix}. \quad (2.95)$$

Для схемы Т мы ранее составили матрицу (Z). Уравнения схемы Т в форме уравнений узловых напряжений (2.32), а следовательно, и элементы матрицы (Y) для этой схемы можно получить, решив соответ-

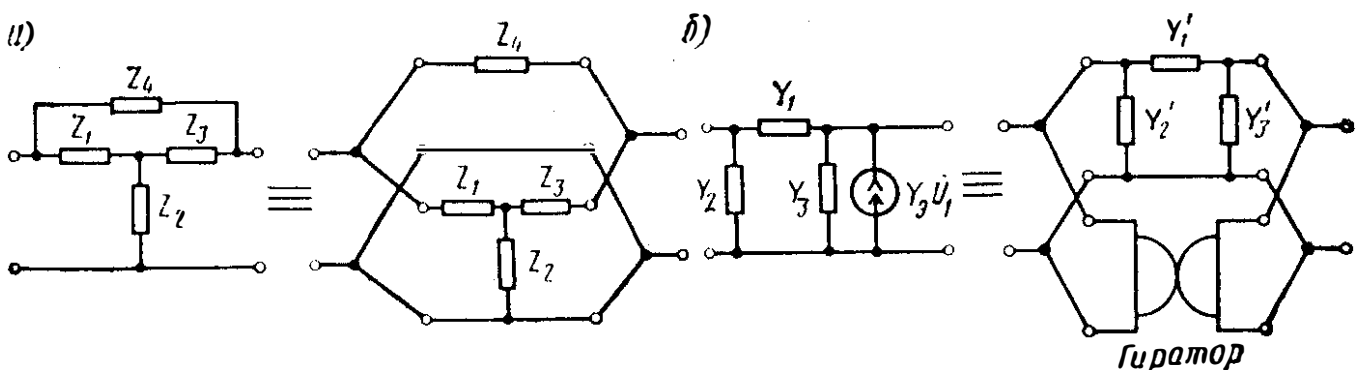


Рис. 2.49

вующие этой схеме уравнения контурных токов в форме уравнений (2.28) относительно токов I_1 и I_2 .

Для схемы Г уравнения (2.28) определяются матрицей коэффициентов (2.54). Решение их относительно токов дает

$$(Y'') = \begin{pmatrix} \frac{Z_2 + Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3} & \frac{-Z_2}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3} \\ -\frac{Z_2}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3} & \frac{Z_1 + Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3} \end{pmatrix}.$$

Матрица (Y) всего соединения есть сумма матриц (Y') и (Y''):

$$(Y) = (Y') + (Y'') = \begin{pmatrix} \frac{(Z_2 + Z_3) Z_4 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{(Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3) Z_4} & \frac{Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{(Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3) Z_4} \\ -\frac{Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{(Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3) Z_4} & \frac{(Z_1 + Z_3) Z_4 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{(Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3) Z_4} \end{pmatrix}.$$

В качестве второго примера рассмотрим способ построения схемы, эквивалентной схеме замещения необратимого четырехполюсника (см. рис. 2.40, б). Матрица проводимостей короткого замыкания для этой схемы [см. выражение (2.77)]

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Y_1 + Y_2) & -Y_1 \\ -(Y_1 + Y_3) & (Y_1 + Y_3) \end{pmatrix}, \quad (2.96)$$

где $Y_{12} \neq Y_{21}$.

Представим ее в виде суммы двух матриц так, чтобы одна из них была матрицей обратимого четырехполюсника:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} (Y_1 + Y_2) & -Y_1 \\ -(Y_1 + Y_3) & (Y_1 + Y_3) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} (Y_1 + Y_2) & -\left(Y_1 + \frac{Y_3}{2}\right) \\ -\left(Y_1 + \frac{Y_3}{2}\right) & (Y_1 + Y_3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{Y_3}{2} \\ -\frac{Y_3}{2} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.97)$$

В соответствии с этим выражением схему необратимого четырехполюсника можно представить в виде параллельного соединения двух четырехполюсников. Один из них обратим и легко строится в виде схемы П с проводимостями: $Y'_1 = Y_1 + \frac{Y_3}{2}$; $Y'_2 = Y_2 - \frac{Y_3}{2}$; $Y'_3 = Y_3 - \frac{Y_3}{2}$, другой необратим и характеризуется матрицей

$$(Y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{Y_3}{2} \\ -\frac{Y_3}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & G \\ -G & 0 \end{pmatrix}.$$

Это матрица гиратора.

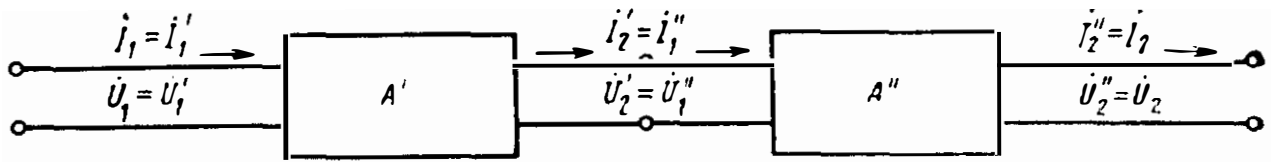


Рис. 2.50

Таким образом, необратимый четырехполюсник представляется в виде параллельного соединения обратимого четырехполюсника и гиратора. Условное изображение этого соединения показано на рис. 2.49, б.

Цепочечное соединение. Этот способ соединения (рис. 2.50) является наиболее важным. Примерами таких соединений могут служить соединения линий между собой, линий и трансформаторов, каскадное включение трансформаторов, усилителей и т. п.

При цепочечном соединении двух четырехполюсников:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_1'; \quad \dot{U}_2' = \dot{U}_1''; \quad \dot{U}_2'' = \dot{U}_2;$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_1'; \quad \dot{I}_2' = \dot{I}_1''; \quad \dot{I}_2'' = \dot{I}_2.$$

В этом случае для определения параметров соединения удобно воспользоваться уравнениями передачи (2.42):

$$\dot{U}_1' = A' \dot{U}_2' + B' \dot{I}_2'; \quad \dot{U}_1'' = A'' \dot{U}_2'' + B'' \dot{I}_2'';$$

$$\dot{I}_1' = C' \dot{U}_2' + D' \dot{I}_2'; \quad \dot{I}_1'' = C'' \dot{U}_2'' + D'' \dot{I}_2''.$$

Учитывая соотношения между напряжениями и токами и подставляя значения \dot{U}_1'' и \dot{I}_1'' из второй группы уравнений в первую вместо \dot{U}_2' и \dot{I}_2' и заменяя \dot{U}_1' на \dot{U}_2'' , а \dot{I}_1' на \dot{I}_2'' , найдем:

$$\dot{U}_1 = A_1' (A'' \dot{U}_2'' + B'' \dot{I}_2'') + B' (C'' \dot{U}_2'' + D'' \dot{I}_2'');$$

$$\dot{I}_1 = C' (A'' \dot{U}_2'' + B'' \dot{I}_2'') + D' (C'' \dot{U}_2'' + D'' \dot{I}_2'').$$

Группируя члены этих уравнений по \dot{U}_2'' и \dot{I}_2'' и опуская штрихи, получим:

$$\dot{U}_1 = (A' A'' + B' C'') \dot{U}_2 + (A' B'' + B' D'') \dot{I}_2; \tag{2.98}$$

$$\dot{I}_1 = (C' A'' + D' C'') \dot{U}_2 + (C' B'' + D' D'') \dot{I}_2.$$

Соотношения (2.98) имеют вид уравнений (2.42) и связывают напряжение и ток на входе с напряжением и током на выходе.

Если четырехполюсники, входящие в цепочечное соединение, характеризовать матрицами $(A) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, то все соединение можно охарактеризовать одной матрицей:

$$(A) = \begin{pmatrix} A' A'' + B' C'' & A' B'' + B' D'' \\ C' A'' + D' C'' & C' B'' + D' D'' \end{pmatrix}.$$

Матрица (A) цепочечного соединения четырехполюсников — произведение матриц (A') и (A'') четырехполюсников, входящих в это соединение:

$$(A) = (A') (A'') = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{pmatrix}. \tag{2.99}$$

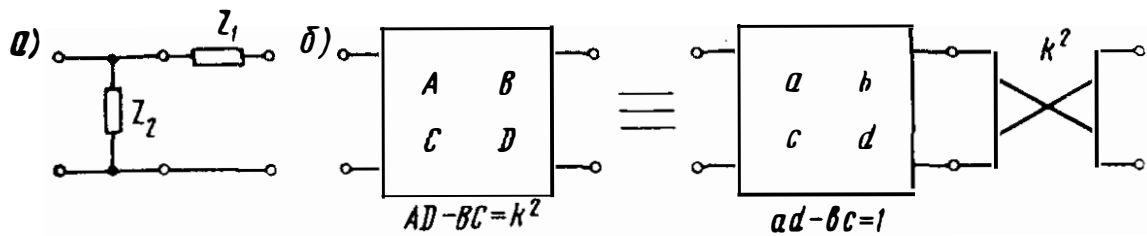


Рис. 2.51

Это правило справедливо и при цепочечном соединении нескольких четырехполюсников. В этом случае выходные величины последовательно, начиная с конца, подвергаются преобразованиям, определяемым матрицами (A'') и (A') . При последовательном преобразовании соответствующие матрицы перемножаются.

В качестве примера цепочечного соединения рассмотрим образование схемы Г из двух неполных четырехполюсников (рис.2.51, а). Из соотношений (2.65) и (2.62)

$$(A') = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{pmatrix}; \quad (A'') = \begin{pmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

получаем:

$$(A) = (A') (A'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) \end{pmatrix}, \quad (2.100)$$

[сравним с равенством (2.61)].

В качестве другого примера цепочечного соединения четырехполюсников рассмотрим еще один способ представления необратимых четырехполюсников. Пусть последний характеризуется матрицей $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, причем $AD - BC = k^2 \neq 1$.

Представим эту матрицу в виде произведения двух матриц:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix},$$

где $ad - bc = 1$.

Представление матриц (A) необратимого четырехполюсника в виде произведения позволяет построить эквивалентную схему необратимого четырехполюсника в виде цепочечного соединения двух четырехполюсников. Один из них обратим и имеет матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, а другой необратим и его матрица $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$. Последняя матрица характеризует идеальный преобразователь мощности.

Таким образом, необратимый четырехполюсник представляется цепочечным соединением обратимого четырехполюсника и идеального пре-

образователя мощности. Условное изображение этого соединения приведено на рис. 2.51, б.

При применении изложенных правил определения параметров составных четырехполюсников по параметрам их составляющих сложением или перемножением матриц следует следить, чтобы при соединении четырехполюсников входящие в них сопротивления не замыкались накоротко ветвями с нулевым сопротивлением и не оставались разомкнутыми.

2.17. ЦЕПОЧЕЧНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ ПРИ СОГЛАСОВАННЫХ НАГРУЗКАХ. СОБСТВЕННЫЕ ПАРАМЕТРЫ ПЕРЕДАЧИ

Определение параметров цепочечного соединения нескольких четырехполюсников перемножением матриц (A) требует довольно громоздких вычислений, особенно в случаях, когда параметры цепей являются функциями частоты. Задача значительно облегчается, если четырехполюсники соединены так, что отношение напряжения к току сохраняется постоянным вдоль всего соединения. Так, при соединении четырехполюсников по схеме, приведенной на рис. 2.52, должно быть:

$$\dot{U}_1/\dot{I}_1 = Z_{вх} = \dot{U}'_2/\dot{I}'_2 = Z_{вх} = \dots = \dot{U}_2/\dot{I}_2 = Z_H.$$

Если $\dot{U}_1/\dot{I}_1 = \dot{U}'_2/\dot{I}'_2$, то $\dot{U}'_2/\dot{U}_1 = \dot{I}'_2/\dot{I}_1$, т. е. коэффициенты передачи по напряжению и току равны.

Рассмотрим, каким должно быть сопротивление приемника Z_H одного четырехполюсника, чтобы оно совпадало с входным сопротивлением $Z_{вх}$.

Составим выражение для $Z_{вх} = \dot{U}_1/\dot{I}_1$ четырехполюсника, для чего разделим одно из уравнений (2.42) на другое, подставив в них $\dot{U}_2 = Z_H \dot{I}_2$:

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_{вх} = \frac{A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2}{C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2} = \frac{AZ_H + B}{CZ_H + D}. \quad (2.101)$$

Найдем теперь $Z_H = Z_x$, при котором $Z_{вх} = Z_H = Z_x$,

$$Z_x = \frac{AZ_x + B}{CZ_x + D}; \quad CZ_x^2 + DZ_x = AZ_x + B.$$

Ограничимся случаем симметричного четырехполюсника, для которого $A = D$.

В этом случае $CZ_x^2 = B$ и $Z_x = \sqrt{B/C}$.

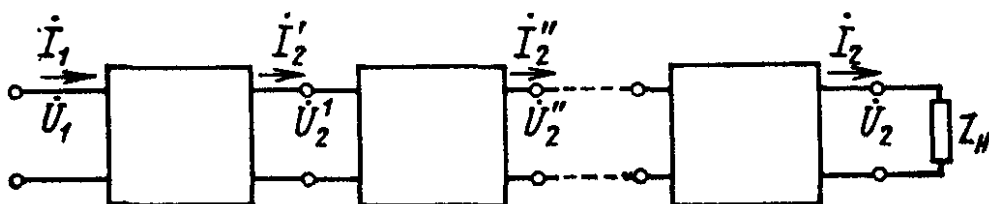


Рис. 2.52

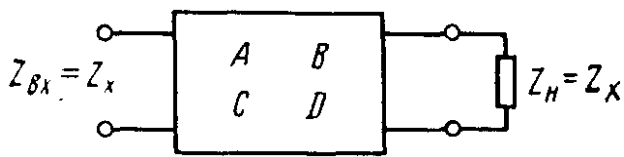


Рис. 2.53

Сопротивление Z_x будем называть характеристическим сопротивлением четырехполюсника. Как параметр четырехполюсника оно определяет отношение напряжения к току на его входе и выходе при нагрузке на сопротивление Z_x .

Нагрузку четырехполюсника на приемник с сопротивлением $Z_H = Z_x = \sqrt{B/C}$ будем называть согласованной (рис. 2.53). Определим, как связаны \dot{U}_1 и \dot{U}_2 четырехполюсника при согласованной нагрузке. Из уравнений (2.42) найдем:

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{i_1}{i_2} = A + B \frac{i_2}{\dot{U}_2} = A + C \frac{\dot{U}_2}{i_2} = A + \sqrt{BC} = k. \quad (2.102)$$

Как видно из выражения (2.102), при согласованной нагрузке условия передачи через четырехполюсник определяются одним коэффициентом передачи k . При согласованном цепочечном соединении нескольких четырехполюсников (см. рис. 2.52) для определения условий передачи через все четырехполюсники следует перемножить все их коэффициенты передачи k_i . Часто для характеристики свойств четырехполюсника бывает удобно пользоваться величиной

$$g = a + jb = \ln k; \quad k = e^g. \quad (2.103)$$

При согласованном цепочечном соединении четырехполюсников их логарифмические характеристики g следует просто складывать.

Два параметра симметричного четырехполюсника Z_x и g , называемые собственными параметрами четырехполюсника, широко используют в ТЛЭЦ. Несимметричный четырехполюсник имеет два характеристических сопротивления — Z_{x1} и Z_{x2} .

2.18. СМЕШАННЫЕ СОЕДИНЕНИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Возможны два вида смешанного соединения четырехполюсников: последовательно-параллельное и параллельно-последовательное (рис. 2.54, а и б).

В случае последовательно-параллельного соединения на входе четырехполюсника суммируются напряжения, а на выходе — токи. Здесь удобно использовать такую совокупность параметров четырехполюсника

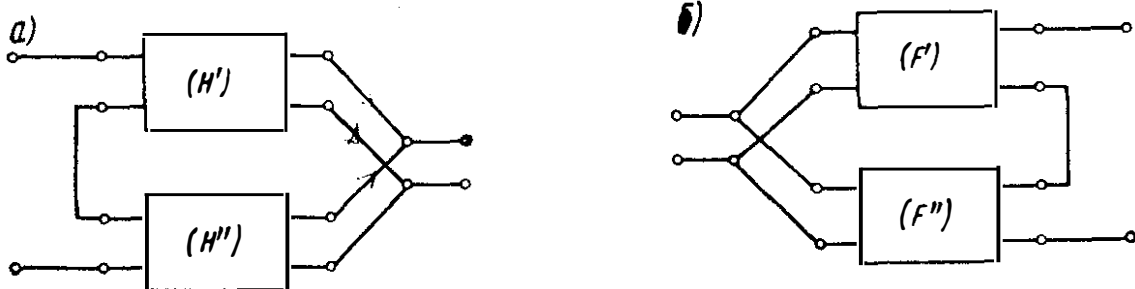


Рис. 2.54

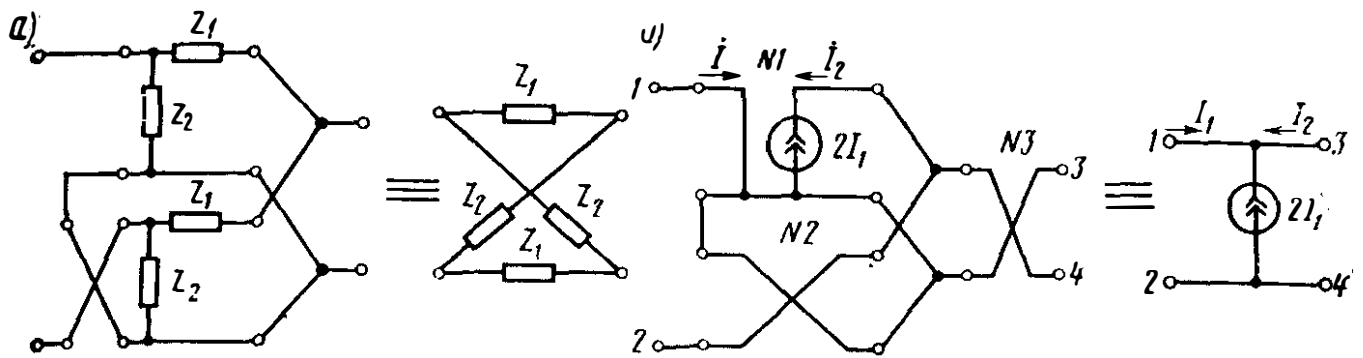


Рис. 2.55

ка, которая со стороны входа определяет его входное сопротивление, а со стороны выхода — входную проводимость. Этому условию удовлетворяет матрица коэффициентов уравнений (2.36):

$$(H) = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.104)$$

Каждый из последовательно-параллельно соединенных четырехполюсников следует характеризовать матрицей (H) и эти матрицы сложить.

При параллельно-последовательном соединении четырехполюсников следует пользоваться матрицей (F) коэффициентов уравнений (2.39)

В качестве примера смешанного соединения рассмотрим образование симметричного моста соединением двух Γ -образных четырехполюсников (рис. 2.55, а). Из уравнений (2.36) следует:

при коротком замыкании на выходе

$$H_{11} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1; \quad H_{21} = \dot{I}_2 / \dot{I}_1,$$

при холостом ходе на входе

$$H_{12} = \dot{U}_1 / \dot{U}_2; \quad H_{22} = \dot{I}_2 / \dot{U}_1.$$

Для первого четырехполюсника непосредственно из схемы получаем:

$$(H') = \begin{pmatrix} H'_{11} & H'_{12} \\ H'_{21} & H'_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{Z_1 + Z_2} \begin{pmatrix} Z_1 Z_2 & Z_2 \\ -Z_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Параметры второго четырехполюсника определяются переменными Z_1 и Z_2 и изменением знака \dot{U}_1'' и \dot{I}_1'' :

$$(H'') = \begin{pmatrix} H''_{11} & H''_{12} \\ H''_{21} & H''_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{Z_1 + Z_2} \begin{pmatrix} Z_1 Z_2 & -Z_1 \\ Z_1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(H) = (H') + (H'') = \frac{1}{Z_1 + Z_2} \begin{pmatrix} 2Z_1 Z_2 & (Z_2 - Z_1) \\ (Z_1 - Z_2) & 2 \end{pmatrix}.$$

Другим примером смешанного соединения может служить схема образования двухполюсного зависимого источника тока из усилителя

тока с усилением $k = 2$ (рис. 2.55, б). Здесь зависимый источник тока получается соединением усилителя, представленного идеализированной схемой замещения 1 и двух скрещиваний 2 и 3.

Матрица (H) усилителя скрещивания

$$(H') = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}; \quad (H'') = (H''') = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица (H) последовательно-параллельного соединения четырехполюсников 1 и 2

$$(H') + (H'') = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.105)$$

Для учета влияния третьего скрещивания, включенного цепочечно, перейдем к матрицам (A) . Для соединения первого и второго четырехполюсников

$$(A) = (A' +''') (A''') = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для всего соединения

$$(A) = (A' +''') (A''') = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица преобразователя отрицательных сопротивлений с инверсией тока. Сравним ее с матрицей (2.83).

2.19. ВХОДНЫЕ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Практические задачи по установлению условий формирования, фильтрации, передаче сигналов сводятся к определению входного сопротивления и сопротивления передачи или эквивалентных им параметров разветвленной электрической цепи, часто включающей в себя электронные приборы. Формально $Z_{вх}$ и $Z_{пер12}$ могут быть рассчитаны по формулам (2.5) и (2.6):

$$Z_{вх1} = \Delta / \Delta_{11}; \quad Z_{пер12} = \Delta / \Delta_{12}.$$

При использовании этих выражений следует задаваться схемой цепи, и, кроме того, получающиеся результаты не позволяют анализировать зависимость условий передачи или преобразования сигналов от сопротивлений генератора и приемника. Поэтому для определения входных и передаточных характеристик цепей применяют теорию четырехполюсника, разделяя цепь на элементы (рис. 2.56, а).

Этот подход дает ясную зависимость условий передачи отдельно от свойств генератора, передающей части и приемника, позволяет пользоваться полученными внешними измерениями, характеристиками передающей части без анализа деталей ее устройства, использовать в качестве элементов цепи более крупные элементы — четырехполюсники.

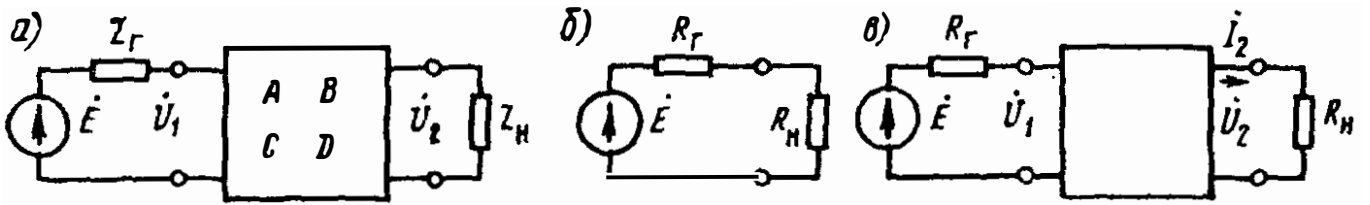


Рис. 2.56

Большая гибкость метода обеспечивается возможностью применения разных наборов параметров четырехполюсников, рассматривавшихся в предшествующих параграфах.

В качестве входных и передаточных функций цепи (применение термина «функция» объясняется зависимостью соответствующих параметров от частоты ω или $p = j\omega$) используют следующие характеристики:

входное сопротивление $Z_{вх} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1$;

сопротивление передачи $Z_{пер} = \dot{U}_1 / \dot{I}_2$;

коэффициент передачи по напряжению

$$F_U = \dot{U}_2 / \dot{U}_1; \quad (2.106)$$

коэффициент передачи по току

$$F_I = \dot{I}_2 / \dot{I}_1; \quad (2.107)$$

приведенное сопротивление

$$Z_{прив} = \dot{E} / \dot{I}_2. \quad (2.108)$$

Между перечисленными характеристиками цепи имеются очевидные связи:

$$Z_{пер} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = Z_{вх} \frac{1}{F_I}; \quad (2.109)$$

$$Z_{прив} = \frac{\dot{E}}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{E}}{\dot{U}_1} \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} = \frac{Z_{вх} + Z_r}{Z_{вх}} Z_{пер}. \quad (2.110)$$

Выражение функций цепи через параметры A, B, C, D. Рассмотрим уравнения четырехполюсника в форме уравнений (2.42):

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \quad \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2.$$

Подставим в них $\dot{U}_2 = Z_n \dot{I}_2$, тогда делением найдем:

$$Z_{вх} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{AZ_n + B}{CZ_n + D}. \quad (2.111)$$

Из первого из уравнений (2.42)

$$Z_{пер} = \dot{U}_1 / \dot{I}_2 = AZ_n + B. \quad (2.112)$$

Из второго уравнения

$$F_I = \dot{I}_2 / \dot{I}_1 = 1 / (CZ_n + D). \quad (2.113)$$

Заменяем в первом уравнении (2.42) \dot{U}_1 на $\dot{E} - Z_{\Gamma} \dot{I}_1$ и \dot{U}_2 на $Z_{\text{H}} \dot{I}_2$. Решив его относительно \dot{E}/\dot{I}_2 , найдем:

$$Z_{\text{прив}} = \dot{E}/\dot{I}_2 = AZ_{\text{H}} + DZ_{\Gamma} + CZ_{\Gamma} Z_{\text{H}} + B. \quad (2.114)$$

Выражение функций цепи через параметры Z . Воспользуемся уравнениями (2.28):

$$\dot{U}_1 = Z_{11} \dot{I}_1 + Z_{12} \dot{I}_2;$$

$$\dot{U}_2 = Z_{21} \dot{I}_1 + Z_{22} \dot{I}_2.$$

Имея в виду что в этом случае направление тока \dot{I}_2 противоположно таковому в уравнениях (2.42), заменим во втором уравнении (2.28) \dot{U}_2 на $-Z_{\text{H}} \dot{I}_2$.

Из второго из уравнений (2.28)

$$F_1 = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = -\frac{Z_{21}}{Z_{\text{H}} + Z_{22}}. \quad (2.115)$$

Из первого уравнения

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_{11} + Z_{12} \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = Z_{11} - \frac{Z_{21} Z_{12}}{Z_{\text{H}} + Z_{22}}. \quad (2.116)$$

Используя выражения (2.109) и (2.110), найдем:

$$Z_{\text{пер}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} = \frac{Z_{11} (Z_{\text{H}} + Z_{22}) - Z_{12} Z_{21}}{Z_{21}}; \quad (2.117)$$

$$Z_{\text{прив}} = \frac{\dot{E}}{\dot{I}_2} = \frac{(Z_{11} + Z_{\Gamma}) (Z_{22} + Z_{\text{H}}) - Z_{12} Z_{21}}{Z_{21}}. \quad (2.118)$$

Эквивалентным способом определения функции является использование вместо уравнений (2.28) соответствующей им схемы (рис. 2.57). Выражение $F_1 = \dot{I}_2/\dot{I}_1$ [см. формулу (2.115)] получается сразу при рассмотрении равновесия напряжений во втором контуре:

$$Z_{21} \dot{I}_1 = -(Z_{22} + Z_{\text{H}}) \dot{I}_2.$$

Аналогично легко получаются и остальные соотношения (2.116) — (2.118).

Формулы (2.111)—(2.118) определяют передающие свойства четырехполюсника при его работе между определенными генератором с сопротивлением Z_{Γ} и приемником с сопротивлением Z_{H} . Поэтому параметры $Z_{\text{вх}}$, $Z_{\text{пер}}$, $Z_{\text{прив}}$ называют рабочими параметрами, а системы коэффициентов, входящие в эти формулы и характеризующие свойства самого четырехполюсника, — собственными коэффициентами, или параметрами четырехполюсника.

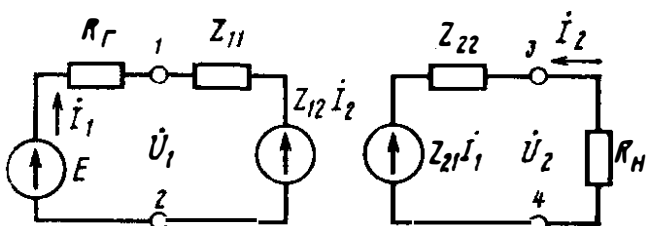


Рис. 2.57

Совершенно очевидно, что аналогично сопротивлениям $Z_{вх}$, $Z_{пер}$ и $Z_{прив}$ могут быть определены

$$Y_{вх} = i_1 / \dot{U}_1; \quad Y_{пер} = i_1 / \dot{U}_2; \quad (2.119)$$

$$Y_{прив} = \frac{i}{\dot{U}_2} = \frac{(Y_H + Y_{Г}) (Y_{22} + Y_H) - Y_{12} Y_{21}}{Y_{21}}.$$

Аналогичные выражения можно получить для любых параметров четырехполюсника.

2.20. РАБОЧИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ И ФУНКЦИИ ПЕРЕДАЧИ НАПРЯЖЕНИЯ, ТОКА И МОЩНОСТИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Рабочими коэффициентами передачи напряжения, тока и мощности четырехполюсника называют коэффициенты, связывающие соответствующие величины на выходе четырехполюсника и на выходе питающего генератора, нагруженного на согласованное сопротивление. Они измеряют степень использования мощности генератора.

Пусть четырехполюсник получает питание от генератора с э. д. с. \dot{E} и внутренним сопротивлением $R_{Г}$. При нагрузке генератора на сопротивление $R_H = R_{Г}$ в соответствии со схемой (см. рис. 2.56, б) на его выходе будут соответственно следующие напряжение, ток и мощность:

$$\dot{U}_0 = \dot{E}/2; \quad I_0 = \dot{E}/(2R_{Г}); \quad S_0 = \dot{E}^2/(4R_{Г}),$$

где S_0 — наибольшая мощность, которая может быть получена от данного генератора во внешней цепи.

В дуальном случае

$$\dot{i}_0 = \dot{i}/2; \quad \dot{U}_0 = \dot{i}/(2Y_{Г}); \quad S_0 = \dot{i}^2/(4Y_{Г}).$$

Если генератор будет подключен к четырехполюснику, нагруженному на сопротивление R_H (см. рис. 2.56, в), то

$$\dot{i}_2 = \dot{E}/Z_{прив}; \quad \dot{U}_2 = R_H \dot{i}_2 = \dot{E} R_H / Z_{прив};$$

$$S_2 = |\dot{E}|^2 R_H / |Z_{прив}|^2, \quad \dot{U}_0 / \dot{U} = Z_{прив} / (2R_H) =$$

$$= k_{рU}; \quad \frac{\dot{i}_0}{I_2} = \frac{Z_{прив}}{2R_{Г}} = k_{рI}; \quad \frac{S_0}{S_2} = \frac{|Z_{прив}|^2}{4R_{Г} R_H} = |k_{р}|^2, \quad (2.120)$$

где $k_{рU}$, $k_{рI}$, $|k_{р}|^2$ — рабочие коэффициенты передачи соответственно напряжения, тока и мощности.

Таким образом, рабочие коэффициенты передачи оценивают режим системы передачи сравнением его со случаем отбора от генератора наибольшей мощности.

В дуальном случае

$$\frac{\dot{i}_0}{I_2} = \frac{Y_{прив}}{2Y_H}; \quad \frac{\dot{U}_0}{\dot{U}_2} = \frac{Y_{прив}}{2Y_{Г}}; \quad |k_{р}|^2 = \frac{|Y_{прив}|^2}{4Y_{Г} Y_H}. \quad (2.121)$$

Величины $F_p = 1k_p$ называют рабочими функциями передачи. Как видно, величины k_{pU} и k_{pI} неодинаковы. Если сопротивления генератора и приемника активные (что часто имеет место на практике), то они отличаются друг от друга только масштабом. Поэтому можно пользоваться любым из них и ввести один заменяющий общий коэффициент. Последнее можно осуществить, если вместо напряжений и токов рассматривать их нормированные значения, полученные делением напряжений на \sqrt{R} и умножением токов на \sqrt{R} . Заменяя \dot{U}_0 на $\dot{U}_0/\sqrt{R_\Gamma}$, \dot{U}_2 на $\dot{U}_2/\sqrt{R_H}$, I_0 на $I_0\sqrt{R_\Gamma}$, I_2 на $I_2\sqrt{R_H}$, получим

$$k_{pU} = k_{pI} = k_p = \frac{Z_{\text{прив}}}{2\sqrt{R_\Gamma R_H}}; \quad (2.122)$$

$$k_{pS} = |k_p|^2 = \left| \frac{Z_{\text{прив}}}{2\sqrt{R_\Gamma R_H}} \right|^2.$$

Нормирование напряжений и токов делением первых и умножением вторых на \sqrt{R} означает одновременное изменение соответствующих сопротивлений заменой величин Z на Z/R .

При этом входные сопротивления четырехполюсников Z_{11} заменяются на Z_{11}/R_Γ , выходные Z_{22} — на Z_{22}/R_H , а взаимные Z_{12} — на $Z_{12}/\sqrt{R_\Gamma R_H}$.

Так, например, приведенное сопротивление [см. формулу (2.118)] нормируется, если числитель разделить на произведение $R_\Gamma R_H$, а знаменатель — на $\sqrt{R_\Gamma R_H}$. Не применяя новых обозначений для нормированных сопротивлений, получим:

$$\frac{Z_{\text{прив}}}{\sqrt{R_\Gamma R_H}} = \frac{(Z_{11} + 1)(Z_{22} + 1) - Z_{12}Z_{21}}{Z_{21}}; \quad (2.123)$$

$$k_p = \frac{Z_{\text{прив}}}{2\sqrt{R_\Gamma R_H}} = \frac{1}{2} Z_{\text{прив норм}}.$$

Нормированные значения $Z_{\text{прив}}$ и k_p , будучи рабочими параметрами, не содержат в явном виде R_Γ и R_H , обращенных нормированием в единицы, и безразмерны, что является их характерной особенностью. Все это в равной степени относится и к $Y_{\text{прив}}$. Формулы (2.120) — (2.123) определяют рабочие коэффициенты в самом общем случае при любых R_Γ и R_H . Они характеризуют условия передачи по цепям, когда критерием оптимальности является передача наибольшей мощности, что существенно в цепях с помехами.

Часто сопротивление генератора R_Γ или его проводимость Y_Γ пренебрежимо малы, и генератор представляет собой источник напряжения или тока. При $R_\Gamma = 0$ $\dot{U}_0 = \dot{E} = \dot{U}_1$ и можно получить простое выражение для рабочего коэффициента передачи напряжения.

Воспользуемся вторым уравнением четырехполюсника в форме Y :

$$i_2 = Y_{21} \dot{U}_1 + Y_{22} \dot{U}_2.$$

Заменим $i_2 = -Y_H \dot{U}_2$.

Отсюда

$$k_{pU} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{Y_{22} + Y_H}{-Y_{21}}; \quad F_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{-Y_{21}}{Y_{22} + Y_H}. \quad (2.124)$$

Если к тому же $Y_H = 0$ (режим холостого хода)

$$F_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}}.$$

При $Y_H = 0$ аналогично из уравнения $\dot{U}_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$, заменяя \dot{U}_2 на $-Z_H I_2$, получим

$$F_I = \frac{i_2}{i_1} = \frac{-Z_{21}}{Z_{22} + Z_H}. \quad (2.125)$$

При $Z_H = 0$ (режим короткого замыкания)

$$F_I = \frac{i_2}{i_1} = \frac{-Z_{21}}{Z_{22}} = \frac{Y_{21}}{Y_{11}}.$$

Выражения (2.124) и (2.125) определяют только связи между напряжениями или токами. Их используют в случаях, когда к. п. д. и наибольшая мощность несущественны, т. е. при рассмотрении формирующих цепей в условиях отсутствия помех и малых напряжений и токах. Такой подход к рассмотрению четырехполюсников приводит к понятию звена.

2.21. ЗВЕНЬЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ, УПРАВЛЕНИЯ И СВЯЗИ. СОЕДИНЕНИЯ ЗВЕНЬЕВ

Понятие звена. Матрица четырехполюсника с четырьмя элементами дает полное физическое описание его как передающей системы. Если четырехполюсник представляет собой электрическую систему передачи, его матрица полностью определяет связи между напряжением и током на его входе и выходе, что характеризует также отношение мощностей на входе и выходе. Если четырехполюсник представляет собой механическую систему, его матрица определяет связи между положениями и скоростями (или двумя другими соответствующими обобщенными координатами) в двух точках системы, принятых за вход и выход.

Во многих случаях нет необходимости в полной физической характеристике элементов систем управления и связи, применяемых для передачи и преобразования сигналов. Такими являются случаи работы четырехполюсников в режиме, близком к холостому ходу ($I_2 = 0$). Смысловое содержание выходных сигналов при этом определяется только напряжением и его изменением во времени. Четырехполюсник, работающий в таком режиме, достаточно характеризовать одним из его параметров:

$$A = \dot{U}_1 / \dot{U}_2; \quad 1/A = F_U.$$

Четырехполюсники часто работают в режиме, близком к короткому замыканию ($\dot{U}_2 = 0$). Смысловое содержание выходного сигнала в таких случаях определяется изменением тока. Для характеристики четырехполюсника достаточен один из параметров:

$$D = \dot{I}_1 / \dot{I}_2; \quad 1/D = F_1 = \dot{I}_2 / \dot{I}_1.$$

Наконец, если сопротивление нагрузки четырехполюсника подобрано так, что $\dot{U}_1 / \dot{I}_1 = \dot{U}_2 / \dot{I}_2$, то $\dot{U}_1 / \dot{U}_2 = \dot{I}_1 / \dot{I}_2$. В этом случае можно ограничиться рассмотрением отношения токов или напряжений.

Главной (и общей) задачей для всех этих случаев является выявление изменений величин на входе и выходе от частоты или времени, независимо от возникающих при этом потерь энергии. Это характерно для цепей с усилителями.

При таком подходе четырехполюсник характеризуют каким-либо одним подходящим параметром. В этом случае его обычно называют звеном (рис. 2.58, а). Таким образом, **звено** — это односторонне характеризуемая электрическая цепь, в которой рассматривают одну входную и одну выходную величины и для которых, в свою очередь, существенна не их физическая природа, а только характер изменения во времени или от частоты. Звенья обычно работают в условиях односторонней передачи сигналов.

Поскольку входные и выходные величины звеньев могут быть выражены через напряжения, токи и любые другие физические величины и размерность их никакой роли не играет, входные величины будем обозначать знаком x , выходные — y , а звенья характеризовать оператором $k = y/x$, определяющим осуществляемое звеном преобразование. Этот оператор может быть задан во временной и в операторной формах. Вычисление $k = y/x$ часто бывает удобно проводить по сигнальному графу цепи.

Если передающая цепь представляет собой неполный четырехполюсник (например, рис. 2.58, б), то $k = y/x = \dot{U} / \dot{I} = Z$.

При таком подходе стирается грань между четырехполюсниками (2 n -полюсниками) и двухполюсниками (n -полюсниками).

Звено есть односторонне рассматриваемый четырехполюсник с одномерными входом и выходом. В связи с этим уменьшается количество соединений, в которые могут входить звенья по сравнению с числом разнообразных способов соединения четырехполюсников с двухмерными входами и выходами.

Параллельное соединение и способы его реализации. Параллельным соединением звеньев (по аналогии с соединением двухполюсников) называют такое соединение, в котором при общей для всех соединенных звеньев величине входа общая величина выхода равна сумме выходов каждого из звеньев (рис. 2.59, а):

$$y = y_1 + y_2 = k_1 x_1 + k_2 x_2 = (k_1 + k_2) x;$$

$$x_1 = x_2 = x,$$

отсюда

$$k = y/x = k_1 + k_2. \quad (2.126)$$

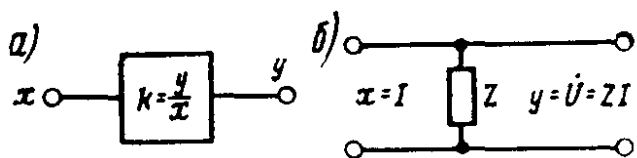


Рис. 2.58

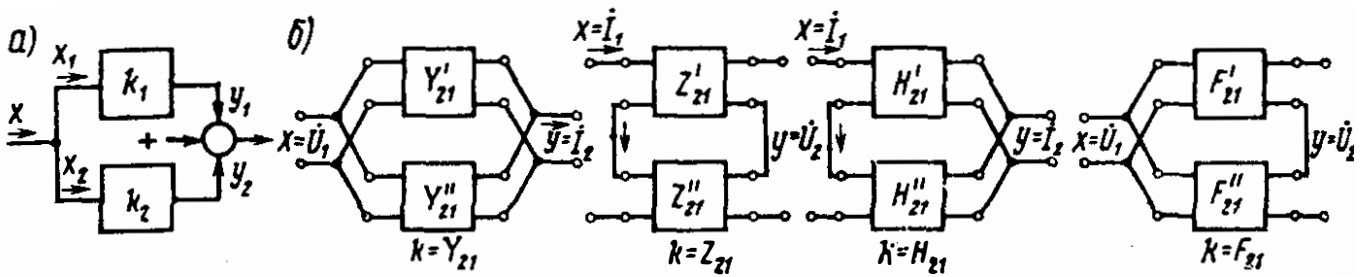


Рис. 2.59

Оператор системы параллельно соединенных звеньев равен сумме операторов каждого из них. Это правило соответствует правилу сложения проводимостей двух- и четырехполюсников.

Допустим, что нам надо составить электрическую схему, преобразование сигнала в которой осуществлялось бы по закону

$$y = k_1 x_1 + k_2 x_2; \quad x_1 = x_2.$$

Нетрудно видеть, что этому условию удовлетворяет ряд схем (рис. 2.59, б). Таким образом, параллельное соединение звеньев может быть реализовано четырьмя различными способами соединения электрических четырехполюсных цепей: параллельным, последовательным и двумя смешанными. Физически коэффициент k в этих случаях различен.

Каскадное, или цепочечное, соединение звеньев. Для этого соединения, называемого иногда и последовательным (рис. 2.60), оператор системы соединенных звеньев равен произведению операторов, характеризующих каждый из входящих в соединение четырехполюсников.

Для схемы, приведенной на рис. 2.60, имеем:

$$y = y_2 = k_2 x_2; \quad x_2 = y_1 = k_1 x_1; \quad x_1 = x.$$

Последовательной подстановкой получаем: $y/x = k = k_1 k_2$, что соответствует правилу перемножения матриц (A).

Встречное соединение или соединение с обратной связью. Это соединение содержит два четырехполюсника, из которых хотя бы один имеет одностороннюю проводимость. Большей частью это бывает усилитель (рис. 2.61, а). Здесь $k_1 = y_1/x_1$ — оператор — коэффициент усиления, или функция передачи первого усилительного звена; $k_2 = y_2/x_2$ — оператор — коэффициент усиления, или функция передачи второго пассивного звена,

Найдем $k = y/x$ для всего соединения:

$$x_1 = x \pm y_2 = x \pm k_2 y; \quad k_1 x_1 = y_1 = y; \quad y = k_1 (x \pm k_2 y). \quad (2.127)$$

Отсюда

$$k = y/x = k_1 / (1 \mp k_1 k_2). \quad (2.128)$$

Если на входе усилительного элемента величины x и $k_2 y$ складываются, то коэффициент усиления системы больше k_1 , и обратную связь назы-

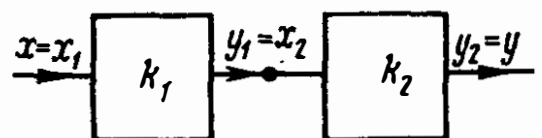


Рис. 2.60

вают положительной. В случае вычитания x и $k_2 y$ обратная связь отрицательна, коэффициент усиления системы меньше k_1 и зависит от него тем слабее, чем больше обратная связь.

При большом k_1 произведение $k_1 k_2$ превышает единицу и $k = 1/k_2$. Отрицательная обратная связь оказывает стабилизирующее действие, снижая зависимость k системы от случайных изменений. При положительной обратной связи и наличии усилительного элемента в цепи возможно неограниченное (в пределах линейности) нарастание сигнала — неустойчивость.

Как и при параллельном соединении звеньев, соединение с обратной связью можно реализовать различными соединениями четырехполюсников. Возможные способы получения соединения с обратной связью показаны на рис. 2.61, б.

Обратную связь широко используют для получения заданных стабильных характеристик усилителей (см. рис. 2.42).

В качестве примера рассмотрим усилитель с параллельной обратной связью по напряжению (рис. 2.62, а). Название обратной связи определяется подачей на вход усилителя части напряжения с его выхода. Это напряжение подключается параллельно напряжению источника, действующего на входе усилителя.

При параллельных соединениях удобно пользоваться проводимостями. Поэтому источник напряжения с э. д. с. E и внутренним сопротивлением R_r заменим источником тока $I = E/R_r$ с внутренней проводимостью $Y_r = 1/R_r$, а усилительный элемент — схемой замещения (см. рис. 2.27, б), в которой положим $Y_{12} = 0$. Получим эквивалентную схему усилительного каскада с обратной связью (рис. 2.62, б).

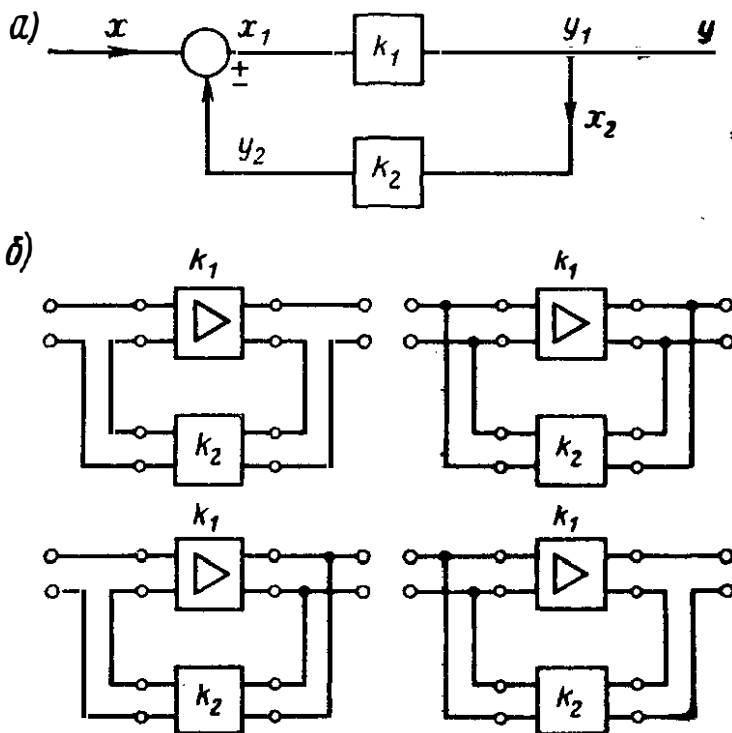


Рис. 2.61

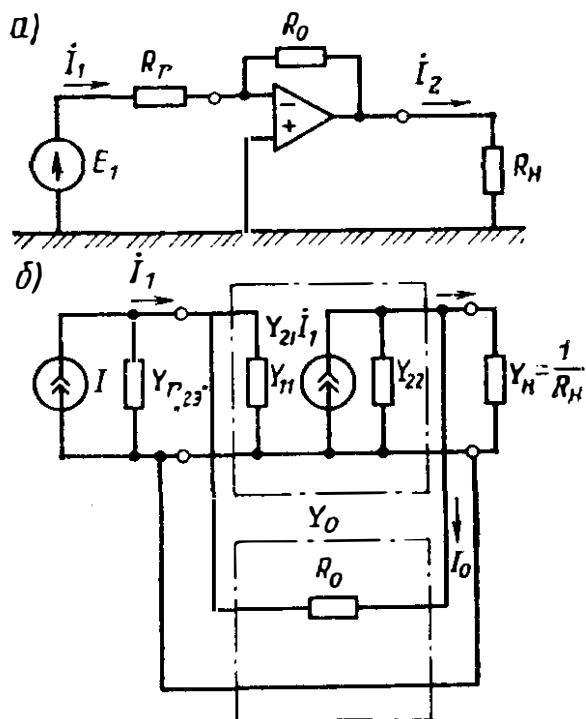


Рис. 2.62

В качестве k_1 примем отношение $\dot{U}_2/\dot{U}_1 = \dot{U}_2/(i/Y_r) = Y_r/Y_{\text{прив}}$, при $Y_{12} = 0$ получим:

$$k_1 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{Y_r}{Y_{\text{прив}}} = \frac{Y_r Y_{21}}{(Y_{11} + Y_r)(Y_{22} + Y_n)} \quad (2.129)$$

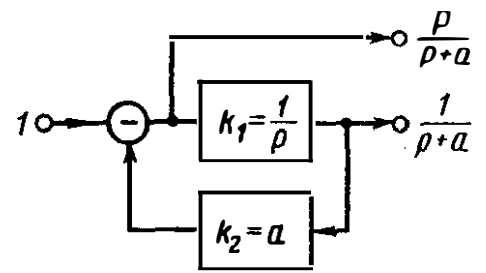


Рис. 2.63

За величину k_2 примем:

$$k_2 = \dot{U}_0/\dot{U}_2 = Y_0/Y_r; \quad Y_0 \ll Y_r. \quad (2.130)$$

Коэффициент передачи усилителя с обратной связью

$$k = \frac{k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{Y_r Y_{21}}{(Y_{11} + Y_r)(Y_{22} + Y_n) + Y_{21} Y_0} \quad (2.131)$$

При $k_1 \gg k_2$ произведение $k_1 k_2 > 1$ и

$$k = \frac{k_1}{1 + k_1 k_2} \cong \frac{1}{k_2} = \frac{Y_r}{Y_0} = \frac{R_0}{R_r}$$

Сравним с выражением (2.78).

В качестве другого примера рассмотрим соединение с обратной связью, первое звено которого есть интегратор $k_1 = 1/p$, а второе осуществляет умножение на постоянную $k_2 = a$ (рис. 2.63). В этом случае $k = k_1/(1 + k_1 k_2) = 1/(p + a)$.

Если сигнал снимать с входа первого звена, то $k' = p/(p + a)$. Связи между входным и выходным сигналами здесь подобны связям между напряжениями и токами в двухэлементных двухполюсниках rC и rL . Из этого следует, что, соединяя параллельно несколько цепей, подобных приведенной на рис. 2.63, получим каноническую схему, которой можно реализовать сколь угодно сложную рациональную зависимость $k(p)$.

Существенно то обстоятельство, что для получения разных зависимостей коэффициента передачи от частоты в цепях с элементами r, L, C используют реактивные элементы двух типов. Например, для получения зависимости

$$F_1(p) = \frac{1}{r + pL} = \frac{1/L}{(r/L) + p} = \frac{A}{p + a} = \frac{A}{p - p_1}$$

необходима индуктивность, а для получения зависимости

$$F_2(p) = \frac{1/rp}{p + \frac{1}{rC}} = \frac{A}{p + a} = \frac{Ap}{p - p_1}$$

нужна емкость.

Применяя соединения с обратной связью, обе зависимости можно получить по схеме (см. рис. 2.63), в которой для осуществления преобразования $1/p$ используют операционный усилитель с емкостью в цепи обратной связи.

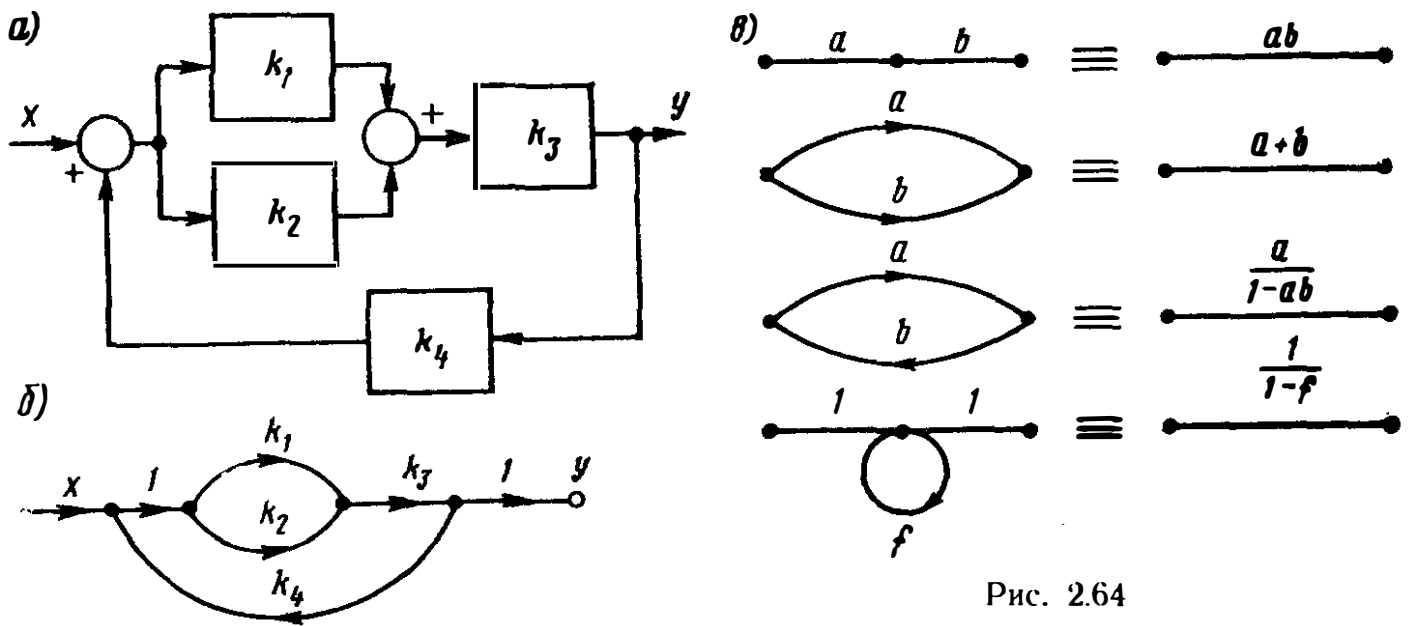


Рис. 2.64

Диаграммы прохождения сигналов. Системы связи, телеуправления, автоматического регулирования и др. обычно состоят из большого числа соединенных между собой различными способами более простых элементов — звеньев. Свойства таких соединений удобно определять составлением и упрощением сигнального графа. Рассмотрим схему (рис. 2.64, а). Ее граф, называемый также диаграммой прохождения сигналов, приведен на рис. 2.64, б. Вид графа полностью соответствует схеме. Передающие свойства системы исходя из соединения звеньев можно определить следующим образом:

передача прямой ветви $(k_1 + k_2) k_3 = k'_1$,
 всей системы $k = k'_1 / (1 - k'_1 k_4)$.

Эту же величину можно найти как передачу графа, если воспользоваться правилами элементарных преобразований (рис. 2.64, в). Первые два правила, относящиеся к определению передачи пути, образованному двумя последовательно проходимыми ветвями, и к параллельному соединению ветвей, применялись нами и ранее. Третье и четвертое правила, относящиеся к контурам обратной связи применительно к графам, формулируются впервые. Справедливость их вытекает из тождественности схем, приведенных на рис. 2.64, а и б, и правил соединения звеньев с обратной связью.

Звенья с многомерными входами и выходами. Обработываемые в современных системах управления и связи сигналы могут быть векторными. Преобразующая их система представляет собой звено с многомерными входами и выходами. Число входов может не совпадать с числом выходов. Простейшим примером такого устройства может служить операционный усилитель: у него два входа и один выход.

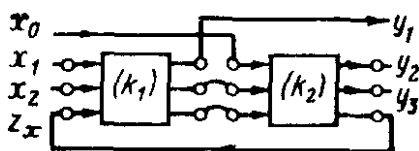


Рис. 2.65

Входы и выходы можно подразделить на соединяемые и несоединяемые (диагностические). Пример соединения звеньев такого типа иллюстрируется схемой, приведенной на рис. 2.65.

2.22. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ ПЕРЕДАЧИ ОБРАТИМЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНЫХ ЦЕПЕЙ

Условия передачи сигналов от генератора к приемнику через включенный между ними четырехполюсник вполне характеризуются частотной зависимостью одного из рабочих коэффициентов k_p , или соответствующей ему функции передачи.

Рабочие коэффициенты передачи отличаются от приведенного сопротивления множителями $R_n R_r$ или $\sqrt{R_n R_r}$, которые с полным основанием можно считать независимыми от частоты. Таким образом, свойства k_p или F как функции частоты вполне определяются соответствующими свойствами величины Z_{npnr} . Из формулы (2.118) видно, что как функция частоты или параметра p приведенное сопротивление представляет собой рациональную дробь, поскольку рациональными дробями являются Z_{11} , Z_{12} , Z_{22} .

Условия физической осуществимости четырехполюсной электрической цепи формулируют по-разному, в зависимости от используемой характеристики цепи: временной, частотной (или операторной) $F(\omega)$ или $k_p(\omega)$. Во временной трактовке они формулируются проще: сигнал на выходе цепи не должен появляться раньше сигнала на входе. Отсюда

$$G(t) = F^{-1} |F(\omega)| = 0 \quad \text{при } t < 0.$$

Это условие при использовании частотной характеристики приводит к требованию

$$\int_0^{\infty} \frac{|\ln F(\omega)|}{1 + \omega^2} d\omega < \infty.$$

Передаточная функция $F(\omega)$ физической осуществимой цепи на оси вещественных частот должна вести себя так, чтобы интеграл имел конечное значение. Из этого следует, что $|F(\omega)|$ не может уменьшаться с увеличением частоты слишком круто (не круче, чем $e^{-|\omega|}$).

Соответствующую заданной характеристике $|F(\omega)|$ фазовую характеристику вычисляют по амплитудной на основе связи между ними, которая следует из аналитичности функций, описывающих свойства четырехполюсных цепей, и определяется преобразованием Гильберта.

Если $F(\omega) = |F(\omega)| e^{-j\theta(\omega)}$,

$$\text{то } \ln |F(\omega)| = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(u)}{\omega - u} du = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{u\theta(u)}{u^2 - \omega^2} du;$$

$$\theta(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |F(u)|}{\omega - u} du = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega \ln |F(u)|}{u^2 - \omega^2} du.$$

При преобразовании интегралов учтена нечетная симметрия фазовой характеристики и четная амплитудной.

Цепи, для которых справедливы указанные выше соотношения имеется однозначная связь между $|F(\omega)|$ и $\theta(\omega)$, называют минимально-фазовыми. Минимально-фазовыми являются мостовые схемы, образованные из реактивных взаимнообратных сопротивлений, и цепочечные соединения, содержащие такие элементы.

Условия физической осуществимости операторной характеристики $F(p)$ формулируют так:

вещественная и мнимая составляющие функции передачи должны представлять собой соответственно четную и нечетную функции частоты;

функция передачи любой пассивной цепи должна иметь вещественные нули и полюсы или нули и полюсы, образующие сопряженные комплексные пары;

ни один из полюсов функции передачи не может находиться в правой полуплоскости, а полюсы, расположенные на мнимой оси плоскости p , должны быть простыми;

нули функции передачи могут быть в любой точке плоскости.

Если цепь характеризуется не функцией передачи $F(p) = U_2(p)/U_1(p)$ или аналогичными ей характеристиками, а рабочим коэффициентом передачи $k_p = 1/F$ или приведенным сопротивлением $Z_{прив} = 2\sqrt{R_1 R_2} k_p$, то условия физической осуществимости изменяются в связи с тем, что нули $F(p)$ есть полюсы k_p , и наоборот.

Требования физической осуществимости приведенного сопротивления (сопротивления передачи) или рабочего коэффициента передачи можно сформулировать так:

вещественная и мнимая составляющие должны представлять собой соответственно четную и нечетную функции частоты;

сопротивление передачи любой пассивной цепи должно иметь вещественные нули и полюсы, нули и полюсы, образующие сопряженные комплексные пары;

ни один из нулей сопротивления передачи не может находиться в правой полуплоскости p , а нули, расположенные на мнимой оси плоскости p , должны быть простые;

полюсы сопротивления передачи могут лежать в любой точке плоскости.

2.23. ПРИЕМЫ СИНТЕЗА ОБРАТИМЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ ПО ЗАДАННОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

Синтез четырехполосника по заданной функции передачи заключается в определении сопротивлений или проводимостей, образующих выбранную для реализации схему, в простейшем случае схемы Т, П или моста. Известные приемы решения этой задачи крайне разнообразны, зависят от специального назначения цепи и вида образующих ее элементов rC , LC или rLC . Некоторые из них изложены далее при изучении корректоров и фильтров.

В этом параграфе ограничимся рассмотрением приемов синтеза четырехполосников по реализуемой функции передачи для некоторых от-

носителем простых случаев. Как было показано, рабочие коэффициенты или функции передачи могут быть выражены через сопротивления передачи, а последние, в свою очередь, — по формулам (2.117), (2.118) через сопротивления холостого хода, или проводимости передачи, зависящие от проводимостей короткого замыкания.

Таким образом, способ представления функции передачи (через сопротивление или проводимость) определяет выбор подлежащих нахождению параметров четырехполюсника: сопротивления холостого хода или проводимости короткого замыкания. По сопротивлениям холостого хода легко строится схема Т, по проводимостям короткого замыкания — схема П. В обоих случаях легко может быть составлена мостовая схема.

В ряде случаев функции передачи и задача синтеза значительно упрощаются в зависимости от значений сопротивлений (проводимостей) генератора и нагрузки и правильного выбора функции передачи. Так, например, при $R_r = 0$ в соответствии с формулой (2.124) систему передачи выгодно характеризовать функцией

$$F_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{-Y_{21}}{Y_{22} + Y_H}.$$

Если еще и $Y_H = 0$ (холостой ход на выходе), то

$$F_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{-Y_{21}}{Y_{22}} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}}.$$

При $G_r = 0$ в соответствии с формулой (2.12)

$$F_I = \frac{i_2}{i_1} = \frac{Z_{21}}{Z_{22} + R_H}.$$

В случае $R_H = 0$ $F_I = Z_{21}/Z_{22} = Y_{21}/Y_{11}$.

Пусть функция передачи $F = Y_{21}/Y_{11}$ задана в виде $F = M(p)/N(p)$.

Умножим числитель и знаменатель дроби на многочлен $L(p)$:

$$F = \frac{M(p)L(p)}{N(p)L(p)}.$$

Очевидно, следует выбрать:

$$Y_{21} = M(p)/L(p) \text{ и } Y_{11} = L(p)/N(p), \text{ —}$$

это и является решением задачи синтеза цепи, если $L(p)$ выбрано надлежащим образом.

В тех случаях, когда синтезируемая цепь охарактеризована функцией передачи $F_U = -Y_{12}/(Y_{22} + Y_H)$, можно поступать так. Не снижая общности, можно полагать $Y_H = 1$ (это равносильно нормированию). Тогда $F_U = -Y_{21}/(1 + Y_{22})$.

Функция передачи $F(p) = M(p)/N(p)$ представляет собой рациональную дробь, которую разложением $N(p)$ на два слагаемых можно записать в виде

$$F_U(p) = \frac{M(p)}{N_1(p) + N_2(p)} = \frac{M(p)/N_1(p)}{1 + [N_2(p)/N_1(p)]}.$$

Очевидно, что можно выбрать следующие параметры: — $Y_{21} = M(p) / N_1(p)$; $Y_{22} = N_2(p) / N_1(p)$ и по ним реализовать схему. Однако для того чтобы задача решалась при разложении, следует учитывать условия реализации.

Аналогично решают задачи, если задана функция $F_I(p) = -Z_{21} / (Z_{22} + R_H)$.

Синтезируемые таким образом цепи могут быть частями более сложных необратимых цепей с усилителями, входы и выходы которых и создают условия $R_T \approx 0$, $R_H \approx \infty$. Минусы у Y_{12} и Z_{12} есть следствие направления тока и потому отбрасываются.

2.24. КАНОНИЧЕСКИЕ СХЕМЫ СОЕДИНЕНИЙ ИНТЕГРИРУЮЩИХ ЗВЕНЬЕВ С ЗАДАНЫМИ ПЕРЕДАТОЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

В § 2.23 рассмотрены приемы построения электрических цепей по заданным передаточным функциям. Предполагалось, что цепи строят по схемам Т, П или моста, а в качестве элементной базы используют индуктивности, конденсаторы и резисторы.

Цепь с определенными передаточными свойствами можно получить, используя в качестве элементной базы интегрирующие звенья, усилители и сумматоры. Пример такой схемы приведен на рис. 2.66. Интеграторы $1/p$ выполнены по схеме (см. рис. 2.43, а); квадраты, обозначенные a_i , представляют собой усилители с усилением a_i и могут быть выполнены по схемам (см. рис. 2.42, а или б); в качестве сумматоров использованы операционные усилители.

Рассмотрим связи между входными и выходными величинами сумматора. Легко видеть, что вход x и выход y удовлетворяют соотношениям:

$$x = (a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0) y;$$

$$y = \frac{1}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0} x; \quad (2.132)$$

$$k_1(p) = y/x = \frac{1}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Теперь рассмотрим схему, приведенную на рис. 2.67. Связь между x и z такая же, как между x и y (см. рис. 2.66):

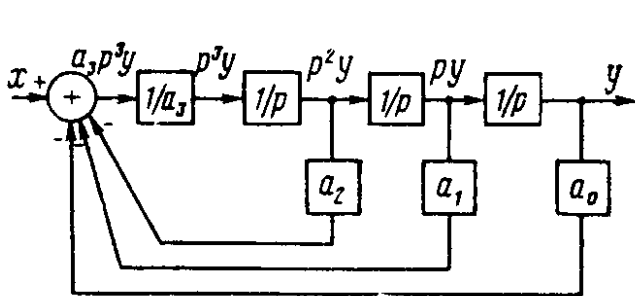


Рис. 2.66

$$z = \frac{1}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Но непосредственно из схемы следует, что

$$y = (b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p + b_0) z =$$

$$= \frac{b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0} \cdot x = k_2(p) x. \quad (2.133)$$

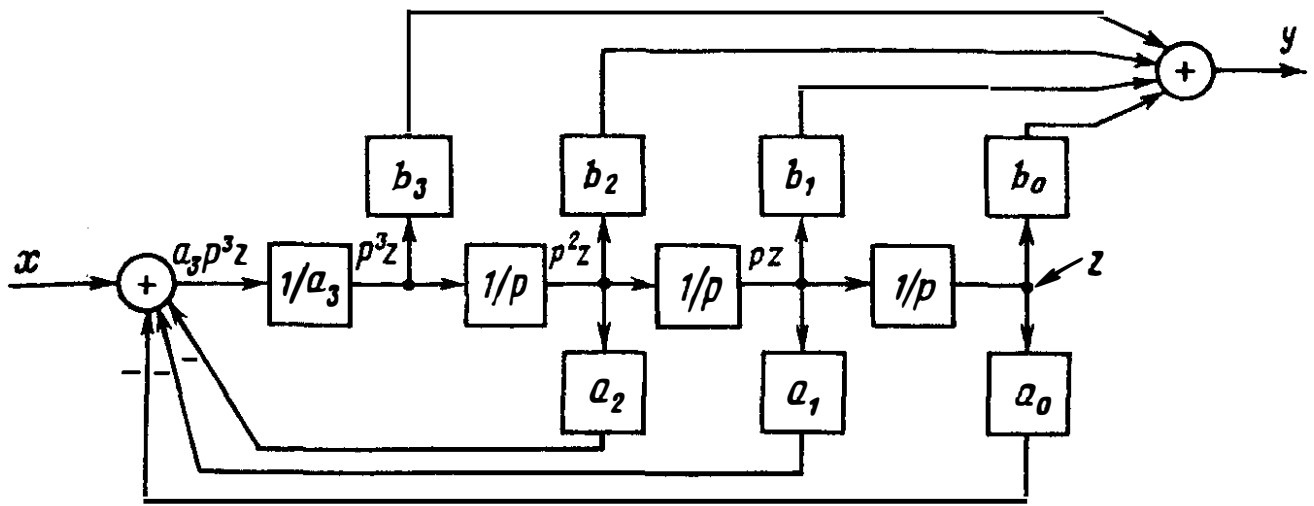


Рис. 2.67

Рассматриваемая схема каноническая. Она содержит минимально возможное число элементов используемого типа. Имеется четкая однозначная связь между схемой и соответствующей ей функцией передачи. При переходе от функции к схеме и наоборот никакие вычисления не требуются.

При изучении канонических схем двухполюсников было установлено, что разные канонические схемы получают различными преобразованиями исходной рациональной дроби $Z(p)$. Точно так же, преобразуя $k_2(p)$, можно получить другие эквивалентные канонические схемы передающих цепей. Положим для простоты $a_3 = 1$ (этого можно достичь, уменьшив все коэффициенты в a_3 раз). Перепишем выражение (2.133) в виде

$$(p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0) y = (b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p + b_0) x$$

и затем его преобразуем, собрав слагаемые, содержащие p в одинаковых степенях. Это дает:

$$(y - b_3 x) p^3 + (a_2 y - b_2 x) p^2 + (a_1 y - b_1 x) p + (a_0 y - b_0 x) = 0.$$

Разделив последнее выражение на p^3 и решив относительно y , получим:

$$y = \left[b_3 x + \frac{1}{p} (b_2 x - a_2 y) + \frac{1}{p^2} (b_1 x - a_1 y) + \frac{1}{p^3} (b_0 x - a_0 y) \right]. \quad (2.134)$$

Рассмотрим и сопоставим с выражением (2.134) каноническую схему для получения функции $k_2(p)$ второго вида (рис. 2.68).

Канонические схемы на интеграторах, так же как и схемы замещения цепей Т и П, могут быть использованы в двух направлениях: для моделирования существующих цепей с известными передаточными функциями и построения цепей с заданными передающими свойствами.

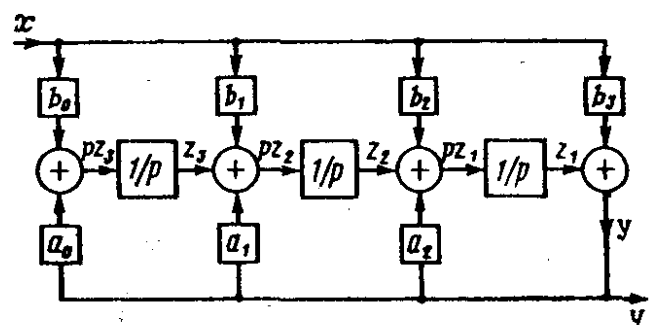


Рис. 2.68

2.25. РАЗВЕТВЛЕННАЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ КАК ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

Рассмотрим еще раз передаточную функцию:

$$k(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Оператор p — это символ дифференцирования по t . Цепь с передаточной функцией (2.133) удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^3}{dt^3} y + a_2 \frac{d^2}{dt^2} y + a_1 \frac{d}{dt} y + a_0 y = b_3 \frac{d^3}{dt^3} x + b_2 \frac{d^2}{dt^2} x + b_1 \frac{d}{dt} x + b_0 x.$$

Это уравнение позволяет рассматривать процессы в цепи при нулевых и ненулевых начальных условиях. Сложность решения уравнения такого типа быстро возрастает с увеличением его порядка. Поэтому выгодно уравнение высокого порядка заменить системой взаимосвязанных уравнений первого порядка. При этом в качестве переменных, число которых равно порядку исходного уравнения, рассматривают само переменное и его последовательные производные. Обозначим эти переменные Z_i (см. рис. 2.68). Используя вновь для обозначения d/dt оператор p , из схемы как уравнения равновесия для сумматоров получим:

$$\begin{aligned} Z_1 &= y - b_3 x; & Z_2 &= pZ_1 + a_2 y - b_2 x; \\ Z_3 &= pZ_2 + a_1 y - b_1 x; & 0 &= pZ_3 + a_0 y - b_0 x. \end{aligned} \quad (2.135)$$

В этих уравнениях

$$y = b_3 x + Z_1. \quad (2.136)$$

Подставим равенство (2.136) в уравнения (2.135) и решим их относительно производных:

$$\begin{aligned} pZ_1 &= -a_2 Z_1 + Z_2 + (b_2 - b_3 a_2) x; \\ pZ_2 &= -a_1 Z_2 + Z_3 + (b_1 - b_3 a_1) x; \\ pZ_3 &= -a_0 Z_3 + (b_0 - b_3 a_0) x. \end{aligned}$$

Введем вектор состояния цепи $z = (z_1 z_2 z_3)$, тогда

$$\dot{Z} = AZ + Bx,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -a_2 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_2 - b_3 a_2 \\ b_1 - b_3 a_1 \\ b_0 - b_3 a_0 \end{pmatrix}. \quad (2.137)$$

$$y = b_3 x + Z_1.$$

Переменные Z_1, Z_2, Z_3 определяют состояние цепи. Уравнение (2.137) называют дифференциальным уравнением состояния цепи. Его решение имеет вид:

$$\dot{Z}(t) = Z(t_0) e^{A(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bx(\tau) d\tau. \quad (2.138)$$

В выражении (2.138) в отличие от соотношения (1.4) A и B — матрицы и $t_0 \neq 0$.

Глава 3

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ (ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЛИНИИ)

3.1. ПАРАМЕТРЫ И УРАВНЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ УЕДИНЕННОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Электрические линии на железнодорожном транспорте. В телемеханике и связи на железнодорожном транспорте по сравнению с другими отраслями народного хозяйства широко используют электрические линии самых различных конструкций, которые работают в условиях взаимных влияний со стороны электротяги и линий электропередачи. Так, например, на участке с электрической тягой на переменном токе вдоль железнодорожного полотна расположены контактные провода и питающие их высоковольтные линии; рельсовые цепи, по которым проходит тяговый ток и которые используют также для целей железнодорожной телемеханики (автоблокировки и автоматической локомотивной сигнализации); высоковольтная линия автоблокировки; кабели связи; радиоволновод, обеспечивающий радиосвязь с электровозами, и др. Поэтому процессам, происходящим в электрических линиях, уделяют особое внимание, причем рассматривают процессы в уединенной и во взаимосвязанных линиях.

Для цепей воздушных и кабельных линий связи, высоковольтных линий, радиоантенн, полосковых линий в радиоустройствах, выполненных с использованием печатного монтажа, рельсовых цепей и др. характерно изменение тока в каждой точке цепи вследствие наличия полной проводимости, распределенной по ее длине. Этим электрические линии, являющиеся цепями с распределенными параметрами, отличаются от цепей, рассматривавшихся ранее, ветви которых предполагались цепями с сосредоточенными параметрами.

Электрические цепи с сосредоточенными и распределенными параметрами. Во многих практических задачах, связанных с расчетом электрических цепей, ток в которых обычно имеет малые частоты, источником энергии является один определенный элемент цепи, а по отношению к пассивным элементам можно с достаточной точностью допустить, что каждый из основных параметров цепи — сопротивление, индуктивность и емкость — сосредоточен в своем месте. Это значит, что электрическое и магнитное поля разделены пространственно (первое связано с конденсатором, второе — с катушкой). Схема такой цепи приведена на рис. 3.1, а, она правильно отражает свойства цепи при относительной малости паразитных параметров элементов цепи и емкости соединительных проводов. При удовлетворении этих условий цепь называют электрической цепью с сосредоточенными параметрами.

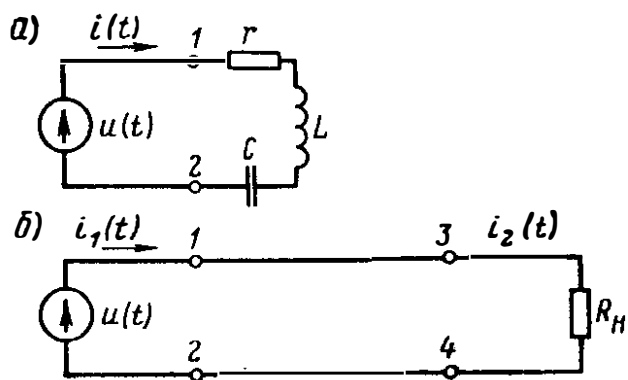


Рис. 3.1

Источник $u(t)$, поставляющий энергию в цепь, и расходующий ее пассивный элемент могут быть рассмотрены как элементы, входящие в состав данной цепи, или как внешние по отношению к ней. В простейших случаях резистор считают элементом цепи, а источник — внешним по отношению к ней. Цепь, схема которой приведена на рис. 3.1, а, состоит из двух двухполюсников: активного источника э.д.с. $u(t)$ и пассивного, содержащего r , L и C . Источник э.д.с. $u(t)$ отражает связь рассматриваемой цепи с внешней средой, посредством которой энергия из внешней среды поступает в цепь, а элемент с сопротивлением r отражает связь, посредством которой энергия из цепи уходит во внешнюю среду в виде тепла, механического движения и т. д.

При большой длине соединительных проводов, т. е. передаче электрической энергии, особенно высокочастотной, по линии, длина которой соизмерима с длиной волны электромагнитного колебания, нельзя не учитывать сопротивление, индуктивность и емкость, распределенные по всей ее длине. Электрическое и магнитное поля в этом случае распределены вдоль линии и пространственно совмещены. Такую линию называют электрической цепью с распределенными параметрами.

Для цепи с распределенными параметрами характерны неодинаковые токи в различных ее точках вследствие наличия токов смещения между отдельными частями цепи (а часто и токов проводимости из-за несовершенной изоляции). Рассматривая цепь, как обладающую распределенными параметрами, изучают процесс распространения электромагнитной энергии в ней.

Цепь с распределенными параметрами может включать в себя также распределенные источники напряжения или тока (рис. 3.1, б). Электрическая цепь, изображенная на этом рисунке, получает энергию от источника э.д.с. $u(t)$, подключенного к ней в точках 1 и 2. Поступающая в цепь энергия частично расходуется на нагревание ее проводов и изоляции, частично передается приемнику (нагрузке) с сопротивлением R_H , подключенному к ней в точках 3 и 4. Если источник и приемник считать внешними элементами по отношению к цепи, то последняя представляет собой четырехполюсную цепь, или четырехполюсник. Моделируя электрическую цепь составлением ее эквивалентной схемы как цепи с сосредоточенными или распределенными параметрами, мы определенным образом аппроксимируем свойства этой цепи и тем самым

Для рассматриваемой цепи характерны одинаковые значения токов во всех ее последовательно соединенных частях. Считая, что цепь имеет сосредоточенные параметры r , L , C , изучают только процессы накопления и преобразования электромагнитной энергии в ее элементах, пренебрегая процессами распространения электромагнитной энергии в окружающей среде.

в значительной степени предопределяем характер рассматриваемых процессов и результаты последующего анализа.

Поскольку до сих пор наиболее широко применяемой электрической линией является цепь, образованная двумя одинаковыми параллельными приводами, принято изображать цепи с распределенными параметрами электрической схемой (см. рис. 3.1, б).

Соотношения между напряжениями и токами, характеризующие процессы в такой цепи, являются общими для всех технических разновидностей электрических линий и применяются для расчетов линий всех конструкций в самых разнообразных отраслях электротехники.

При изучении процессов распространения электромагнитной энергии вдоль электрических цепей с распределенными параметрами сами цепи характеризуют их параметрами, а процессы в них — напряжениями и токами, которые зависят от двух переменных: времени и пространственной координаты.

Для получения исходных соотношений, определяющих процессы в цепях с распределенными параметрами (линиях), используют так называемые **п е р в и ч н ы е п а р а м е т р ы** цепи: сопротивление проводов R , Ом/км, их индуктивность L , Гн/км, проводимость изоляции G , 1/Ом·км, и емкость проводов C , Ф/км. Физически эти параметры представляют те же свойства цепи, что и в цепи с сосредоточенными параметрами.

Если значения первичных параметров линии остаются неизменными по всей ее длине, линию называют однородной.

Уравнения линии в установившемся режиме гармонического переменного тока. Уравнение равновесия напряжений цепи (см. рис. 3.1, а) в установившемся режиме переменного тока имеет вид:

$$r i(\omega) + j\omega L i(\omega) + \frac{1}{j\omega C} i(\omega) = \dot{U}(\omega). \quad (3.1)$$

Оно вполне определяет процессы в цепи, поскольку по частотной характеристике $Z(\omega) = r + j\omega L + 1/(j\omega C)$, пользуясь связями между характеристиками, можно получить сведения о поведении цепи при воздействиях любой формы.

Поэтому рассмотрим цепь с распределенными параметрами также в установившемся режиме переменного тока и определим для нее необходимые частотные характеристики. Проводимость G и емкость C , распределенные вдоль всей длины линии, вызывают утечку тока, который неодинаков в различных ее точках. Поэтому для расчета условий передачи энергии по линии нельзя применять уравнение цепи с сосредоточенными параметрами, выведенное в предположении, что ток остается неизменным вдоль всей неразветвленной цепи.

Однако если участок линии dx столь мал, что изменениями тока и напряжения вдоль него можно пренебречь (рис. 3.2, а), то для этого участка линии можно составить эквивалентную схему (рис. 3.2, б). Здесь Rdx — активное сопротивление участка линии; Ldx — индуктивность участка линии; Cdx — емкость между проводами; Gdx — проводимость изоляции между проводами на участке линии.

Эквивалентная схема только приближенно отображает свойства участка цепи с распределенными параметрами. В линии утечка тока происходит по всей длине участка, а эквивалентная схема отражает утечку тока только на его конце. Однако при интегрировании дифференциальных уравнений, устанавливающих связь между напряжениями и токами участка dx линии, получаются результаты, точно отображающие взаимозависимости между $\dot{U}(x)$ и $\dot{I}(x)$ в линии конечной длины.

Применяя закон Ома к эквивалентной схеме, найдем падение напряжения в проводах на участке dx :

$$-d\dot{U} = (R + j\omega L) dx \dot{i}.$$

Соответственно утечка тока

$$-d\dot{i} = (G + j\omega C) dx (\dot{U} + d\dot{U}).$$

Знак минус указывает на то, что приращения $d\dot{U}$ и $d\dot{i}$ отрицательны. Разделив $-d\dot{U}$ и $-d\dot{i}$ на dx и исключив во втором случае бесконечно малую величину второго порядка, получим

$$-\frac{d\dot{U}}{dx} = (R + j\omega L) \dot{i} = Z_{\text{пр}} \dot{i};$$

(3.2)

$$-\frac{d\dot{i}}{dx} = (G + j\omega C) \dot{U} = Y_{\text{из}} \dot{U}.$$

Это дифференциальные уравнения линии, которые характеризуют цепь с распределенными параметрами, так же как уравнение (3.1) — неразветвленную цепь с сосредоточенными параметрами.

Так же как уравнение (3.1) верно, независимо от конструкций, входящих в цепь катушек индуктивностей, конденсаторов и резисторов, уравнение (3.2) справедливо для всех конструкций однородных линий. Изменение конструкции линии приводит только к новым численным значениям параметров R , L , C и G .

Наиболее характерные конструкции линий и картины соответствующих им статических электрического и магнитного полей приведены на рис. 3.3. Во всех случаях часть пространства, охваченного электромагнитным процессом, ограничена поверхностями металлических проводников, форма которых определяет структуру соответствующих

полей и возможные направления их движения (вдоль линий). Каждая последующая конструкция линий может рассматриваться как видоизменение предшествующей.

Если нижний провод двухпроводной линии (рис. 3.3, а) разрезать по радиусу oa и развернуть, то получается однопроводная линия над проводящей плоскостью (рис. 3.3, б). Если проводящую плоскость одно-

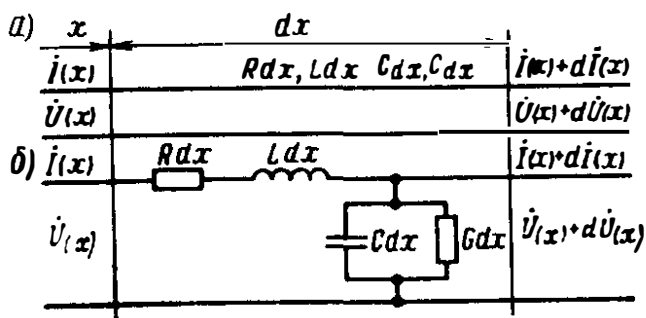


Рис. 3.2

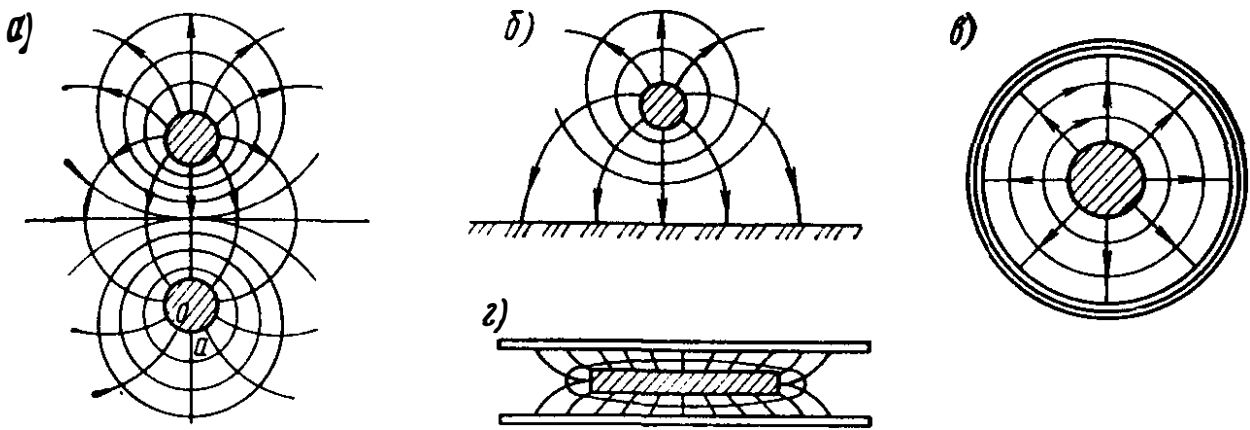


Рис. 3.3

проводной линии завернуть вокруг цилиндрического проводника, получается коаксиальный кабель (рис. 3.3, в). Сплюсвив последний и отбросив несущественные для процесса удаленные короткие стенки, приходим к полосковой линии (рис. 3.3, г). Совершенно очевидно, что рассмотренные деформации границ пространства не могут существенно влиять на физическую природу электромагнитных процессов. Во всех случаях они остаются процессами распространения электромагнитных полей вдоль металлических границ. Поэтому рассмотрение процесса в какой-либо одной из линий приводит к выводам, справедливым в основном и для всех других.

В простых случаях (например, для двух-, однопроводных и коаксиальных линий), когда распределение магнитного и электрического полей известно, первичные параметры можно вычислить с достаточной для практики точностью. В более сложных случаях, например, для рельсовых цепей, когда проводники-рельсы имеют сложное поперечное сечение, первичные параметры находят измерением. Проводимость изоляции для всех типов линий устанавливают опытным путем.

Решение уравнений линии. Для перехода к уравнению, содержащему одну функцию, продифференцируем первое уравнение (3.2) по x :

$$-\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = Z_{\text{пр}} \frac{dI}{dx}$$

и подставим сюда значение dI/dx из второго уравнения:

$$d^2 \dot{U}/dx^2 = Z_{\text{пр}} Y_{\text{из}} \dot{U}.$$

Обозначив $Z_{\text{пр}} Y_{\text{из}} = (R_{\text{из}} + j\omega L)(G + j\omega C) = \gamma^2$, получим:

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = \gamma^2 \dot{U} \quad \text{или} \quad \frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} - \gamma^2 \dot{U} = 0.$$

Аналогичное уравнение можно получить и для I . Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянным коэффициентом. Его общий интеграл

$$\dot{U}(x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} = A_1 e^{-\sqrt{Z_{\text{пр}} Y_{\text{из}}} x} + A_2 e^{\sqrt{Z_{\text{пр}} Y_{\text{из}}} x}, \quad (3.3)$$

где $\dot{U}(x)$, A_1 , A_2 — напряжения;
 $\gamma = \sqrt{Z_{\text{пр}} Y_{\text{из}}}$ — комплексный коэффициент, называемый коэффициентом распространения волны.

Соответствующее уравнение для тока можно получить, воспользовавшись исходным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$-\frac{d\dot{U}}{dx} = (R + j\omega L) i = Z_{\text{пр}} i; \quad (3.4)$$

откуда $i = \frac{-1}{(R + j\omega L)} \frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{-1}{Z_{\text{пр}}} \frac{d\dot{U}}{dx}$.

Подставляя в это выражение значения \dot{U} из формулы (3.3) и выполняя дифференцирование по x , получим:

$$i = \frac{\gamma}{Z_{\text{пр}}} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}).$$

Обозначим величину, имеющую размерность проводимости,

$$\frac{\gamma}{Z_{\text{пр}}} = \frac{\gamma}{R + j\omega L} = \sqrt{\frac{G + j\omega C}{R + j\omega L}} = \frac{1}{Z_{\text{в}}}.$$

Величину $Z_{\text{в}}$ называют волновым сопротивлением линии. Тогда решение системы дифференциальных уравнений (3.2) примет вид:

$$\dot{U}(x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}; \quad (3.5)$$

$$i(x) = \frac{A_1}{Z_{\text{в}}} e^{-\gamma x} - \frac{A_2}{Z_{\text{в}}} e^{\gamma x},$$

где $\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \sqrt{Z_{\text{пр}} Y_{\text{из}}}$; (3.6)

$$Z_{\text{в}} = \sqrt{(R + j\omega L)/(G + j\omega C)} = \sqrt{Z_{\text{пр}}/Y_{\text{из}}}.$$

Величины γ и $Z_{\text{в}}$ называют вторичными, или волновыми параметрами линии.

3.2. ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНИИ. ВОЛНОВЫЕ ПАРАМЕТРЫ

Падающая волна напряжения. Рассмотрим, что представляют собой физические процессы в линии, описываемые уравнениями (3.5). Пусть в них $x = 0$. Тогда напряжение в начале линии $\dot{U}(0) = A_1 + A_2$. Здесь A_1 и A_2 — составляющие напряжения в начале линии. Будем поэтому вместо A_1 писать $\dot{U}'(0)$ и вместо $A_2 = \dot{U}''(0)$.

Рассмотрим первое слагаемое первого уравнения (3.5):

$$\dot{U}'(x) = \dot{U}'(0) e^{-\gamma x}.$$

Полагая, что комплексный коэффициент γ состоит из действительной и мнимой частей:

$$\gamma = \alpha + j\beta, \quad (3.7)$$

получим

$$\dot{U}'(x) = e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}. \quad (3.8)$$

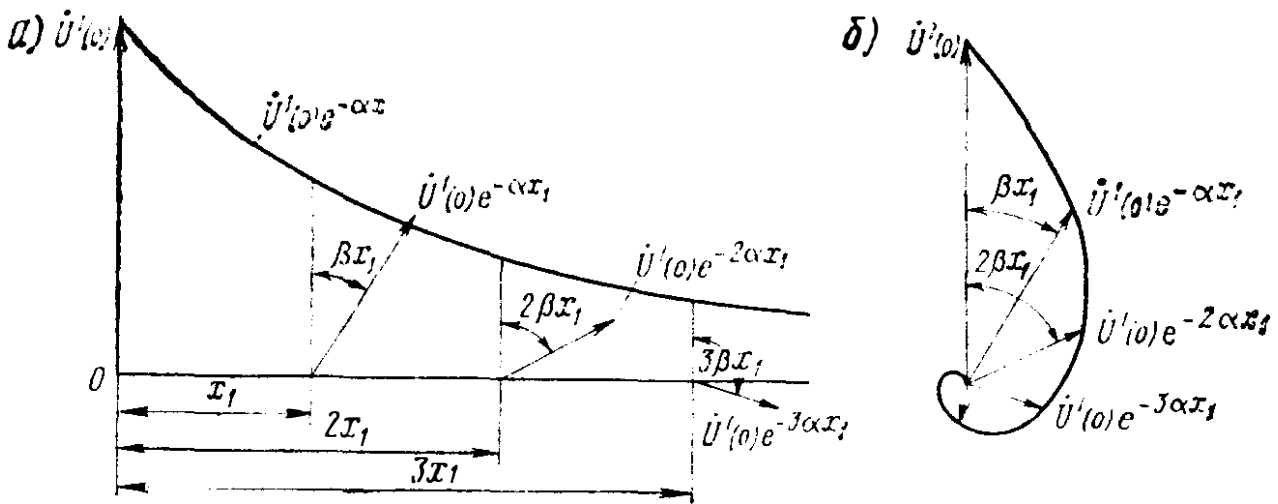


Рис. 3.4

Соответствующий этому выражению характер изменения вектора напряжения $\dot{U}'(x)$ вдоль линии графически показан на рис. 3,4, а и б. Из выражения (3.8) и его графического изображения следует, что вектор напряжения, имеющий в начале линии значение $\dot{U}'(0)$ с возрастанием x уменьшается по модулю и меняет свою фазу.

Мы пользовались до сих пор символическим методом, в котором зависимость величин от времени задается выражением $e^{j\omega t}$:

$$u(t) \doteq \dot{U} e^{j\omega t}.$$

Множитель $e^{j\omega t}$ ранее был опущен как общий. Теперь можно его учесть, чтобы одновременно с зависимостью напряжения и тока от координаты x рассмотреть также зависимость от времени t .

Тогда вместо выражения (3.8) имеем

$$\dot{U}'(x, t) = \dot{U}'(0) e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} e^{j\omega t} = \dot{U}'(0) e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)}. \quad (3.9)$$

На комплексной плоскости выражение (3.9) изображают вращающимся вектором с начальной фазой $-\beta x$. Проекция этого вектора на ось действительных величин плоскости комплексного переменного дает мгновенное значение косинусоидального напряжения.

Таким образом, мгновенное значение напряжения

$$u'(x, t) = \dot{U}'(0) e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x). \quad (3.10)$$

Для каждого момента $t = t_1$ уравнение (3.10) дает изменение мгновенного значения напряжения вдоль линии (рис. 3.5). В каждой точке линии $x = x_1$ мгновенное значение напряжения меняется по закону косинуса.

С увеличением t аргумент $\omega t - \beta x$ остается неизменным, если x также будет возрастать со скоростью $v = \omega/\beta$. Следовательно, двигаясь по линии со скоростью v , можно наблюдать мгновенное значение напряжения $u'(x, t)$, соответствующее одному и тому же фа-

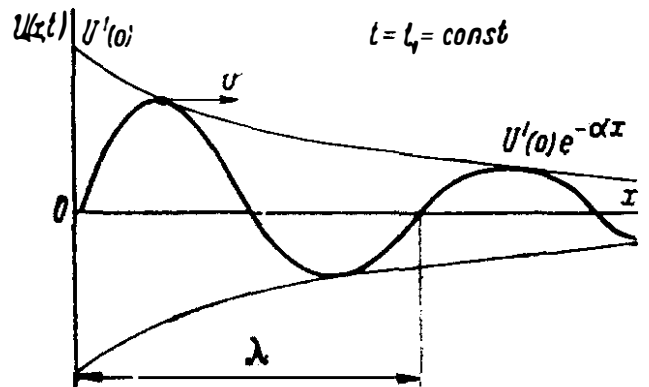


Рис. 3.5

зовому состоянию, например $\dot{U}'(0) e^{-\alpha x} \cos 0$. Скорость перемещения по линии каждого фазового состояния $v = \omega/\beta$ называют ф а з о в о й с к о р о с т ь ю. Для цепей воздушных линий с медными проводниками на частотах более 300 Гц фазовая скорость близка к скорости света в пустоте. Для цепей воздушных линий со стальными проводниками и для кабельных линий эта величина значительно ниже и в большой степени зависит от частоты тока, еще меньшие значения имеет она для рельсовых цепей.

Выражение (3.9) математически представляет собой волну, движущуюся от начала линии к ее концу. Эту волну называют п а д а ю щ е й. Уменьшение напряжения при движении вдоль линии объясняется выделением энергии в виде тепла вследствие активного сопротивления проводов и проводимости изоляции каждого элемента линии. Изменение фазы напряжения от точки к точке обусловлено запаздыванием колебательного процесса в точке x по сравнению с колебанием в начале линии, связанным с определенной скоростью движения.

Уменьшение вектора напряжения и изменение его фазы при движении волны вдоль линии определяют двумя частями комплексного километрического коэффициента распространения волны:

$$\gamma = \alpha + j\beta.$$

К и л о м е т р и ч е с к и й к о э ф ф и ц и е н т з а т у х а н и я α - действительная часть комплексного коэффициента распространения волны. Километрический коэффициент затухания показывает, как убывают векторы напряжения вдоль линии вследствие потерь энергии в проводах и изоляции линии.

Численное определение α можно получить из соотношения (3.9):

$$|\dot{U}'(x)| = |\dot{U}'(0)| e^{-\alpha x},$$

из этого выражения

$$e^{-\alpha x} = \left| \frac{\dot{U}'(x)}{\dot{U}'(0)} \right|$$

или

$$\alpha x = \ln \left| \frac{\dot{U}'(0)}{\dot{U}'(x)} \right|. \quad (3.11)$$

Таким образом, километрический коэффициент затухания измеряется натуральным логарифмом модуля отношения напряжений в начале и конце участка линии длиной 1 км. Формула (3.11) определяет затухание αx в единицах затухания, называемых неперами (Нп). Определение единицы затухания рассматривается далее.

С увеличением частоты затухание возрастает, так как растут сопротивление проводов вследствие поверхностного эффекта и диэлектрические потери в изоляции.

К и л о м е т р и ч е с к и й к о э ф ф и ц и е н т ф а з ы β — мнимая часть комплексного коэффициента распространения волны и представляет собой сдвиг фаз между векторами напряжения в начале и конце участка линии длиной 1 км; βx — угол между $\dot{U}'(0)$ и $\dot{U}'(x)$.

Разность фаз напряжения в двух точках линии, находящихся на расстоянии x друг от друга,

$$\beta x = \omega t_x,$$

где ωt_x — угол, на который поворачивается вектор $\dot{U}'(0)$ за время t_x :

t_x — время пробега волной расстояния x , после которого в точке x появляется напряжение $\dot{U}'(0) e^{-\alpha x}$.

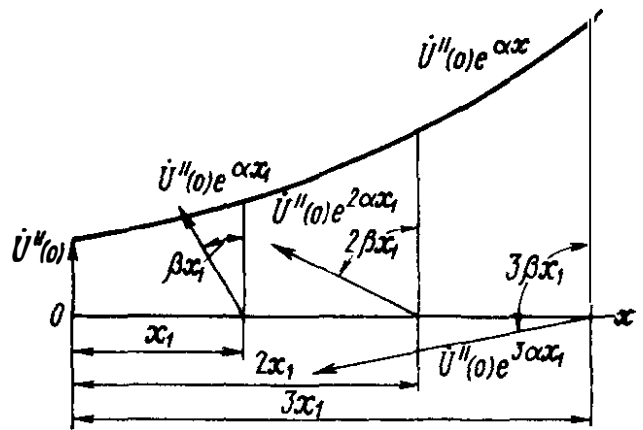


Рис. 3.6

Если по линии передаются токи с несколькими частотами, то их коэффициент β неодинаков и тогда для оценки запаздывания используют величину

$$t_x = \frac{d\beta(\omega)x}{d\omega}, \quad (3.12)$$

которую называют групповым временем прохождения.

Расстояние между точками линии, в которых фазы напряжения отличаются на угол 2π , называют длиной волны и обозначают символом λ .

Отраженная волна напряжения. Проанализируем второе слагаемое первого уравнения (3.5):

$$\dot{U}''(x) = \dot{U}''(0) e^{\gamma x} = \dot{U}''(0) e^{\alpha x} e^{j\beta x}. \quad (3.13)$$

Соответствующее изменение вектора напряжения вдоль линии показано на рис. 3.6.

При переходе к мгновенным значениям имеем:

$$u''(x, t) = \dot{U}''(0) e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x). \quad (3.14)$$

Здесь аргумент $(\omega t + \beta x)$ остается неизменным, если с увеличением t x уменьшается с той же скоростью, что и в случае падающей волны. $v = \omega/\beta$. Это свидетельствует о движении к началу линии.

Таким образом, уравнение (3.14) соответствует волне, движущейся от конца линии к началу и называемой отраженной. Падающая и отраженная волны вместе называются бегущими.

Напряжение в каждой точке линии [см. (3.5)] равно сумме напряжений падающей и отраженной волн:

$$\dot{U}(x) = \dot{U}'(x) + \dot{U}''(x) = \dot{U}_{\text{пад}}(x) + \dot{U}_{\text{отр}}(x). \quad (3.15)$$

Переходя к току, представляемому вектором $\dot{I}(x)$, перепишем второе уравнение (3.5) в виде

$$\dot{I}(x) = \frac{\dot{U}_{\text{пад}}(x)}{Z_{\text{в}}} - \frac{\dot{U}_{\text{отр}}(x)}{Z_{\text{в}}} = \dot{I}_{\text{пад}}(x) - \dot{I}_{\text{отр}}(x). \quad (3.16)$$

Здесь можно повторить все рассуждения, проведенные для напряжения. Следовательно, ток в каждой точке линии равен разности токов падающей и отраженной волн, так как ток отраженной волны направлен навстречу току падающей волны.

Волновое сопротивление линий. В падающей и отраженной волнах напряжение и ток связаны соотношением

$$\dot{U}_{\text{пад}}(x)/\dot{I}_{\text{пад}}(x) = \dot{U}_{\text{отр}}(x)/\dot{I}_{\text{отр}}(x) = Z_{\text{в}}. \quad (3.17)$$

Волновое сопротивление $Z_{\text{в}}$ определяет отношение напряжения к току в отдельной волне — падающей или отраженной — в любой точке однородной линии. Комплексную величину $Z_{\text{в}}$ принято представлять в показательной форме:

$$Z_{\text{в}} = |Z_{\text{в}}| e^{j\varphi_{\text{в}}}. \quad (3.18)$$

Угол $\varphi_{\text{в}}$ определяет сдвиг фаз между векторами \dot{U} и \dot{I} в каждой из волн — падающей или отраженной — в любой точке линии.

Волновое сопротивление $Z_{\text{в}}$ связывает напряжение и ток в бегущей по линии волне, но не определяет непосредственно потери в ней. Действительно, $Z_{\text{в}}$ вычисляют по формуле (3.6), которую можно записать в виде

$$Z_{\text{в}} = \sqrt{Z_{\text{лр}} Z_{\text{из}}},$$

где $Z_{\text{лр}}$ — сопротивление проводов линии длиной 1 км;
 $Z_{\text{из}}$ — сопротивление изоляции линии длиной 1 км.

Абсолютное значение $|Z_{\text{в}}|$ растет с увеличением сопротивления проводов линии. В этом случае рост $|Z_{\text{в}}|$ сопровождается возрастанием потерь. Значение $|Z_{\text{в}}|$ будет расти также с увеличением сопротивления изоляции линии. В этом случае рост $|Z_{\text{в}}|$ сопровождается уменьшением потерь в линии. В зависимости от частоты модуль сопротивления всех типов реальных линий связи уменьшается. Угол сдвига фаз между векторами напряжения и тока в бегущей волне $\varphi_{\text{в}}$ определяет характер мощности волны. Модуль волнового сопротивления рельсовых цепей с увеличением частоты растет. Это характерно для линии с потерями в изоляции. Если $\varphi_{\text{в}} = 0$, как это бывает в линиях без потерь, для которых при $R = 0$ и $G = 0$

$$Z_{\text{в}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (3.19)$$

то векторы напряжения и тока находятся в фазе и переносимая волной мощность чисто активна. В случае $\varphi_{\text{в}} \neq 0$ мощность, переносимая волной, содержит реактивную составляющую; в существующих линиях различной конструкции обычно емкостную. Таким образом, волновое сопротивление показывает характер переносимой волной мощности, а также относительную роль магнитного и электрического полей в этом переносе. Из выражения (3.19) для линии без потерь $\sqrt{L/C} = Z_{\text{в}} = \dot{U}_{\text{пад}}/\dot{I}_{\text{пад}}$.

Если теперь возвести левые и правые части в квадрат, то можно видеть, что $CU^2/2 = LI^2/2$, т. е. в бегущей волне энергии электрического

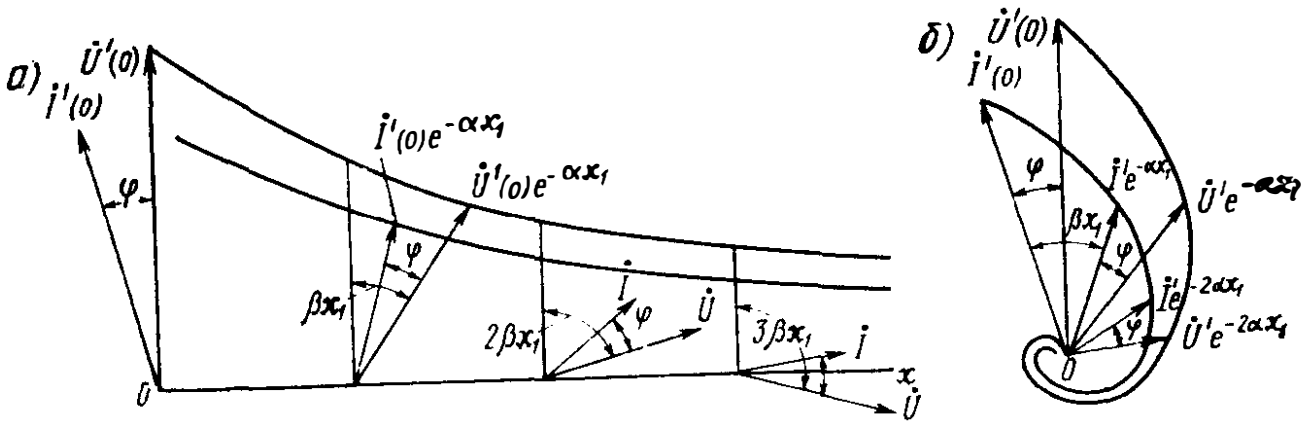


Рис. 3.7

и магнитного полей равны и в равной степени участвуют в транспортировке энергии вдоль линии.

Способы описания волновых процессов. Полная картина распределения векторов напряжения и тока при передаче энергии переменного тока по электрической цепи с распределенными параметрами и при наличии в линиях только падающей волны приведена на рис. 3.7, а, б. Этот рисунок иллюстрирует совместное изменение векторов \dot{U} и \dot{I} вдоль линий, рис. 3.8 — распределение по линии и изменение во времени мгновенных напряжений и токов в падающей волне.

Пользуясь символическим представлением \dot{U} и \dot{I} , получаем решение, не содержащее времени и определяющее только распределение напряжения и тока вдоль линии в установившемся режиме гармонического переменного тока в виде векторов.

Уравнения (3.5) определяют постоянное распределение амплитуд и фаз этих векторов вдоль линии. Получающиеся для каждой точки линии действующие значения и фазы результирующего вектора напряжения или тока можно найти измерением.

Для более полного объяснения распределения векторов напряжения и тока вдоль линии, а также механизма передачи энергии целесообразно переходить к мгновенным значениям напряжения и тока и рассматривать движущиеся вдоль линии падающие и отраженные волны напряжения и тока.

В установившемся режиме падающие и отраженные волны в отдельности наблюдать, проводя измерения, нельзя, так как в каждой точке линии напряжение равно сумме напряжений падающей и отраженной волн, а ток — разности токов этих волн.

В переходном режиме падающие и отраженные волны можно практически наблюдать в отдельности. Эта возможность использована, например, в импульсных приборах, предназначенных для обнаружения повреждений в линиях.

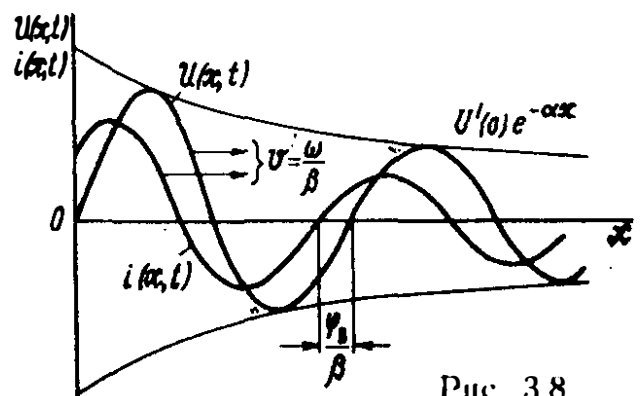


Рис. 3.8

Волновые процессы в электрических линиях можно рассматривать, характеризуя их зарядом и напряженностями электрического и магнитного полей. В качестве поясняющего примера рассмотрим волну в линии без потерь, возбужденную подключенным к ее началу источником постоянного напряжения. Движение электромагнитного поля вдоль линии в первый момент после подключения источника иллюстрируется рис. 3.9, а.

Скорость движения волны v определяется следующим рассуждением. Пусть q — заряд линии длиной 1 км, тогда ток в проводе $i = qv$. Следовательно,

$$v = i/q, \text{ но } q = C\dot{U}, \text{ а } \dot{U}/i = Z_B = \sqrt{L/C}.$$

Отсюда

$$v = i/q = \dot{U}/(C\dot{U}) = 1/\sqrt{LC}. \quad (3.20)$$

По истечении времени $t = l/v$ волна дойдет до конца линии, и если она разомкнута, то дальнейшее движение зарядов невозможно. На конце линии произойдет скопление зарядов, сопровождающееся увеличением напряженности электрического поля (рис. 3.9, б). Поскольку такое состояние долго существовать не может, начнется встречное движение зарядов. Это и есть отраженная волна, которая здесь несет обратно всю энергию, доставленную падающей волной. Нетрудно видеть (рис. 3.9, в), что наличие зарядов на проводах линии повышает напряжение между ними независимо от направления движения этих зарядов. Из этого следует, что напряжение между проводами линии есть сумма напряжений падающей и отраженной волн.

Ток в данной точке линии, естественно, зависит от направления движения зарядов. Встречное движение зарядов приводит к уменьшению тока, так как ток линии есть разность токов падающей и отраженной волн.

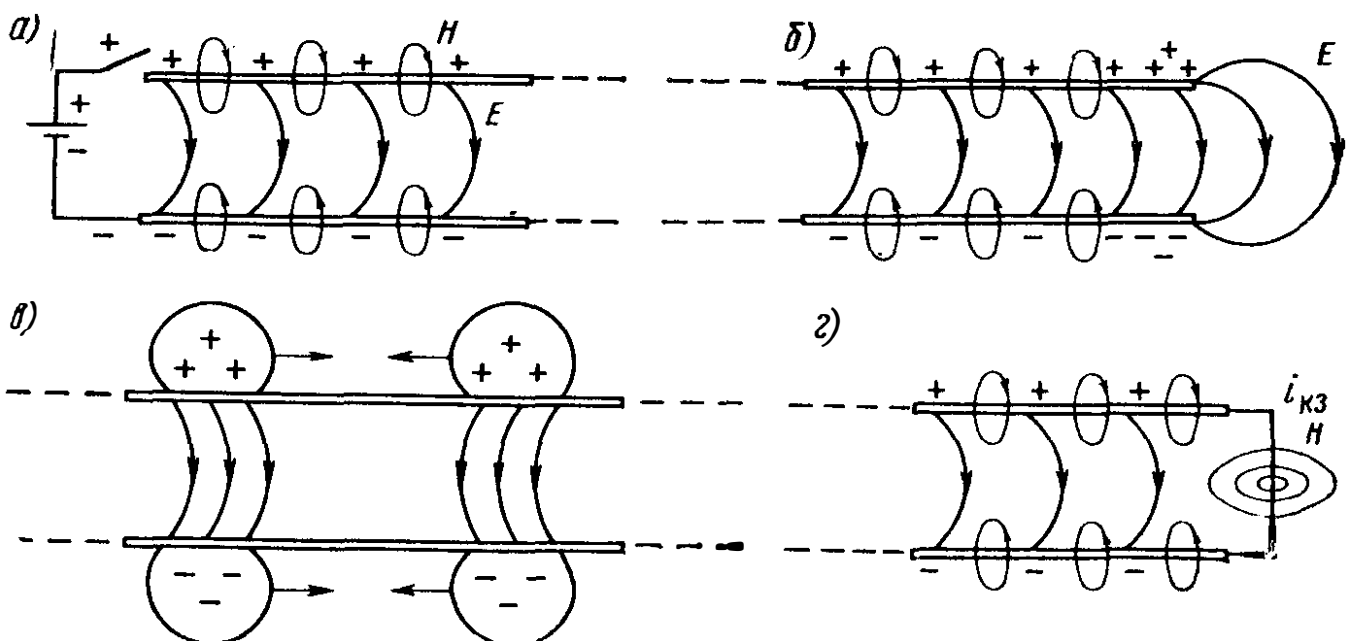


Рис. 3.9

Если бы провода линии на ее конце были замкнуты накоротко, то произошло бы увеличение напряженности магнитного поля и полное отражение (рис. 3.9, з).

Коэффициент отражения. Рассмотрим зависимость между векторами напряжения и тока отраженных и падающих волн на конце линии, для чего введем понятие отношения напряжения отраженной волны к напряжению падающей волны, называемое коэффициентом отражения:

$$\dot{U}_{отр}(l) / \dot{U}_{пад}(l) = \dot{i}_{отр}(l) / \dot{i}_{пад}(l) = \eta.$$

Для численного определения коэффициента отражения рассмотрим условия равновесия напряжений и токов в конце линии (рис. 3.10), где из-за удобства изображения показана только однопроводная линия. Все выводы будут справедливы для однородных линий всех конструкций. На рисунке условными обозначениями, напоминающими своими очертаниями гребень волны на поверхности воды, показаны падающий и отраженный волновые потоки.

В точке *Б*, где к линии подключен приемник с сопротивлением Z_H должны выполняться два условия:

напряжение в линии слева от точки *Б*, представляющее собой сумму напряжений падающей и отраженной волн, должно быть равно напряжению нагрузки справа от точки *Б*, определяемому падением напряжения на сопротивлении Z_H :

$$\dot{U}_{пад} + \dot{U}_{отр} = Z_H \dot{i}(l);$$

ток в линии слева от точки *Б*, представляющей собой разность токов падающей и отраженной волн, должен быть равен току нагрузки:

$$\dot{i}_{пад}(l) - \dot{i}_{отр}(l) = \dot{i}(l).$$

Представляя каждое напряжение как произведение тока и сопротивления и умножая уравнение для токов на Z_H , получим:

$$Z_B \dot{i}_{пад} + Z_B \dot{i}_{отр} = Z_H \dot{i}(l); \quad Z_H \dot{i}_{пад} - Z_H \dot{i}_{отр} = Z_H \dot{i}(l).$$

Вычитая из первого уравнения второе, найдем:

$$\frac{\dot{i}_{отр}}{\dot{i}_{пад}} = \frac{\dot{U}_{отр}}{\dot{U}_{пад}} = \frac{Z_H - Z_B}{Z_H + Z_B} = \eta. \quad (3.21)$$

Из последнего выражения видно, что коэффициент отражения равен нулю при равенстве сопротивления приемника на конце линии Z_H волновому сопротивлению линии Z_B . При этом отраженные волны в линии отсутствуют. Линию с нагрузкой $Z_H = Z_B$ называют *с о г л а с о в а н н о н а г р у ж е н н о й*, а эту нагрузку — *с о г л а с о в а н н о й*.

Отраженные волны являются следствием перераспределения энергии на конце линии в тех случаях, когда отношение напряжения к то-

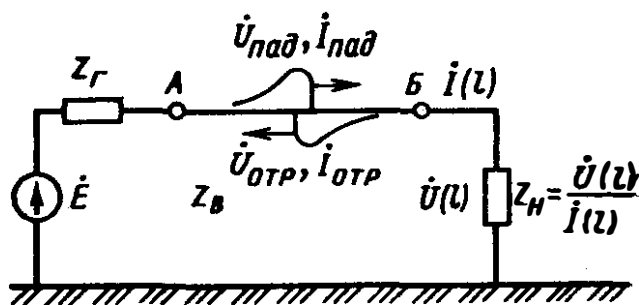


Рис. 3.10

ку в падающей волне, подошедшей к концу линии, не соответствует отношению напряжения к току, которое может существовать в нагрузке.

Рассмотрим численные значения коэффициентов отражения в трех случаях:

холостой ход линии: $Z_H = \infty, \eta = +1$. Коэффициент отражения равен единице. Амплитуды отраженных и падающих волн равны. Полное напряжение на конце линии равно удвоенному напряжению падающей волны. Полный ток равен нулю. Энергия из линии не потребляется;

короткое замыкание линии: $Z_H = 0, \eta = -1$. На конце линии полное напряжение равно нулю, полный ток — удвоенному току падающей волны. Энергия из линии, как и в первом случае, не потребляется, так как приемник фактически отсутствует;

линия замкнута на согласованную нагрузку: $Z_H = Z_B, \eta = 0$. Отраженных волн нет. Вся энергия, пришедшая к концу линии, потребляется нагрузкой. Это возможно только при равенстве отношений напряжения к току в волне и нагрузке.

Удвоенное напряжение на конце разомкнутой линии или удвоенный ток на конце короткозамкнутой линии по сравнению с напряжением или током в падающей волне в действительности появляется вследствие перехода энергии магнитного поля в энергию электрического поля (при холостом ходе) и наоборот (при коротком замыкании).

Коэффициент бегущей волны. Когда в линии имеются падающие и отраженные волны, полное напряжение $\dot{U}(x)$ в любой ее точке есть сумма напряжений падающей и отраженной волн:

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_{\text{пад}}(x) + \dot{U}_{\text{отр}}(x).$$

Поскольку фазы векторов напряжения волн при переходе от точки к точке вдоль линии принимают новые значения, векторное напряжение $\dot{U}(x)$ с изменением x будет меняться волнообразно.

В точках, где векторы $\dot{U}_{\text{пад}}$ и $\dot{U}_{\text{отр}}$ совпадают по фазе, $\dot{U}(x)$ максимально и

$$|\dot{U}(x)|_{\text{max}} = |\dot{U}_{\text{пад}}| + |\dot{U}_{\text{отр}}|.$$

В точках, в которых векторы $\dot{U}_{\text{пад}}$ и $\dot{U}_{\text{отр}}$ противоположны по фазам, $\dot{U}(x)$ минимально и

$$|\dot{U}(x)|_{\text{min}} = |\dot{U}_{\text{пад}}| - |\dot{U}_{\text{отр}}|.$$

Чем больше амплитуда отраженной волны, тем значительнее колебания напряжения. Если потери в линии малы и ими можно пренебречь и коэффициент отражения равен 1, то амплитуды отраженной и падающей волн равны: $|\dot{U}_{\text{отр}}| = |\dot{U}_{\text{пад}}|$ и $\dot{U}(x)$ изменяется от 0 до $2\dot{U}_{\text{пад}}(x)$. В этом случае в линии устранивается режим так называемых **с т о я ч и х** волн.

Для оценки сложившегося в линии режима в технике сверхвысоких частот используют коэффициент бегущей волны:

$$\vartheta = \frac{|\dot{U}|_{\text{min}}}{|\dot{U}|_{\text{max}}} = \frac{|\dot{U}_{\text{пад}}| - |\dot{U}_{\text{отр}}|}{|\dot{U}_{\text{пад}}| + |\dot{U}_{\text{отр}}|} = \frac{1 - |\eta|}{1 + |\eta|}. \quad (3.22)$$

Этот коэффициент равен единице, когда $\eta = 0$ и в линии имеется только бегущая волна. Равенство его нулю соответствует режиму стоячих волн.

3.3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ТОКОВ ВДОЛЬ ЛИНИИ

Проведенный в предшествующих главах физический анализ решений дифференциальных уравнений линии показал волновую природу процессов передачи электрической энергии по линиям. Опираясь на основные свойства волновых процессов, можно получить соотношения, связывающие полные напряжения и токи на входе линии, в произвольной точке и на ее конце.

Связь между напряжениями и токами на входе и выходе линии характеризует передающие свойства последней и позволяет определить напряжение и ток на входе линии, которые обеспечивают на ее выходе напряжение и ток, необходимые для работы приемника.

Связи между напряжениями и токами на концах линии и в произвольной точке используются при рассмотрении взаимных электромагнитных влияний между параллельно расположенными цепями. Рассмотрим рис. 3.11, на котором условно показаны падающие и отраженные волны и связи между ними. Мы знаем (и это показано на рисунке), что падающая волна в конце линии $\dot{U}_{\text{пад}}(l) = \dot{U}_{\text{пад}}(0)e^{-\gamma l}$, отраженная волна в конце линии $\dot{U}_{\text{отр}}(l) = \dot{U}_{\text{пад}}(l)\eta$, отраженная волна в начале линии $\dot{U}_{\text{отр}}(0) = \dot{U}_{\text{отр}}(l)e^{-\gamma l}$ и что полное напряжение в любой точке линии есть сумма напряжений падающей и отраженной волн.

Поэтому можно написать:

$$\dot{U}(0) = \dot{U}_{\text{п}}(0) + \dot{U}_{\text{о}}(0) = \dot{U}_{\text{п}}(l)e^{\gamma l} + \dot{U}_{\text{п}}(l)\eta e^{-\gamma l}; \quad (3.23)$$

Кроме того, $\dot{U}(l) = \dot{U}_{\text{п}}(l) + \dot{U}_{\text{о}}(l) = \dot{U}_{\text{п}}(l)(1 + \eta)$.

Здесь $\dot{U}_{\text{пад}} = \dot{U}_{\text{п}}$ и $\dot{U}_{\text{отр}} = \dot{U}_{\text{о}}$.

Отсюда

$$\dot{U}_{\text{п}}(l) = \dot{U}(l) \frac{1}{1 + \eta}. \quad (3.24)$$

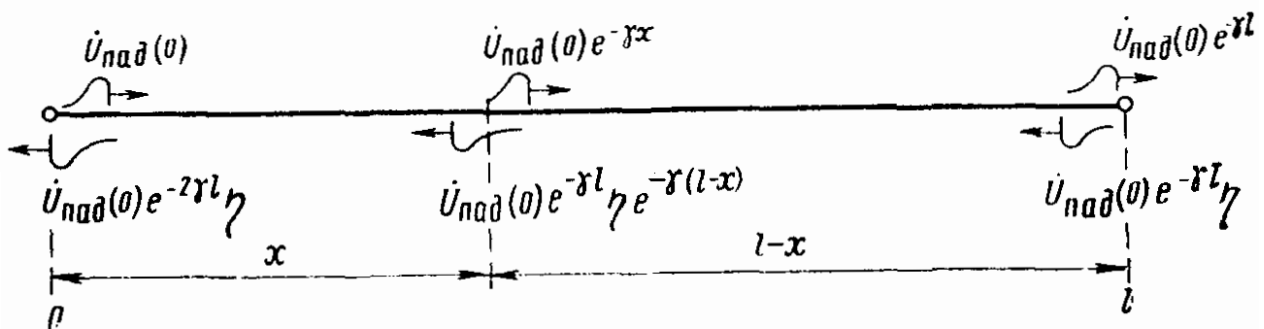


Рис. 3.11

Подставляя выражение (3.24) в формулу (3.23), получим:

$$\dot{U}(0) = \dot{U}(l) e^{\gamma l} \frac{1 + \eta e^{-2\gamma l}}{1 + \eta}; \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} i(0) &= \frac{1}{Z_{\text{в}}} (\dot{U}_{\text{п}}(0) - \dot{U}_{\text{о}}(0)) = \frac{\dot{U}(l)}{Z_{\text{в}}} e^{\gamma l} \frac{1 - \eta e^{-2\gamma l}}{1 + \eta} = \\ &= i(l) e^{\gamma l} \frac{1 - \eta e^{-2\gamma l}}{1 + \eta}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Выражения (3.25) и (3.26) определяют коэффициенты передачи по напряжению и току.

Условие работы передатчика характеризует входное сопротивление:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}(0)}{i(0)} = \frac{\dot{U}_{\text{п}}(0) + \dot{U}_{\text{о}}(0)}{i_{\text{п}}(0) - i_{\text{о}}(0)} = Z_{\text{в}} \frac{1 + \eta e^{-2\gamma l}}{1 - \eta e^{-2\gamma l}}. \quad (3.27)$$

Напряжение и ток в произвольной точке линии, находящейся на расстоянии x от ее начала и $(l - x)$ от конца, найдем аналогично:

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{U}_{\text{п}}(x) + \dot{U}_{\text{о}}(x) = \dot{U}_{\text{п}}(0) e^{-\gamma x} + \dot{U}_{\text{о}}(0) e^{\gamma x} = \dot{U}_{\text{п}}(0) e^{-\gamma x} + \\ &+ \dot{U}_{\text{п}}(0) e^{-\gamma x} \eta e^{-\gamma(l-x)} = \dot{U}(0) e^{-\gamma x} \frac{1 + \eta e^{-2\gamma(l-x)}}{1 + \eta e^{-2\gamma l}}; \quad (3.28) \\ i(x) &= \frac{\dot{U}(0)}{Z_{\text{в}}} e^{-\gamma x} \frac{1 - \eta e^{-2\gamma(l-x)}}{1 + \eta e^{-2\gamma l}}. \end{aligned}$$

При расчетах электромагнитных влияний линий друг на друга часто пользуются преобразованными выражениями (3.28). Рассмотрим способ преобразования на примере связи между $\dot{U}(x)$ и $\dot{U}(0)$:

$$\dot{U}(x) = \dot{U}(0) e^{-\gamma x} \frac{1 + \eta e^{-2\gamma(l-x)}}{1 + \eta e^{-2\gamma l}}.$$

Представим коэффициент отражения выражением $\eta = e^{\ln \eta}$, подставим это в формулу для $\dot{U}(x)$ и вынесем за скобки в числителе $e^{-\gamma l}$, $e^{\gamma x}$, $e^{\ln \sqrt{\eta}}$ и знаменателе $e^{-\gamma l}$, $e^{\ln \sqrt{\eta}}$. После сокращений получим:

$$\dot{U}(x) = \dot{U}(0) \frac{\text{ch}[\gamma(l-x) - \ln \sqrt{\eta}]}{\text{ch}[\gamma l - \ln \sqrt{\eta}]}. \quad (3.29)$$

Выражения (3.26) и (3.27) являются общими, охватывающими все многообразие возможных особенностей параметров и режимов работы линии. Во многих практически важных частных случаях они упрощаются. Рассмотрим эти случаи.

Согласованная линия. Довольно часто с известным приближением линии связи можно считать нагруженными согласованно. При этом $Z_{\text{п}} = Z_{\text{в}}$, $\eta = 0$. В линии нет отраженных волн, поэтому в соотношениях, определяющих связи между напряжениями и токами, пропадают

слагаемые, соответствующие этим волнам. Из выражений (3.25) и (3.26) получаем:

$$\dot{U}(0) = \dot{U}(l) e^{\gamma l}; \quad i(0) = i(l) e^{\gamma l}; \quad (3.30)$$

$$Z_{\text{вх}} = \dot{U}(0)/i(0) = \dot{U}(l)/i(l) = Z_{\text{в}}. \quad (3.31)$$

Электрически длинная линия. Линию называют электрически длинной, если $|\gamma l| \geq 2,3$ и $|e^{-2\gamma l}| \leq 0,01$. Физически это означает, что амплитуда напряжения отраженной волны в начале линии по меньшей мере в 100 раз меньше амплитуды напряжения падающей волны.

Пренебрегая в выражениях (3.25) и (3.26) слагаемым $\eta e^{-2\gamma l}$, получим:

$$\begin{aligned} \dot{U}(0) &= \dot{U}(l) \frac{1}{2} e^{\gamma l} \left(1 + \frac{Z_{\text{в}}}{Z_{\text{н}}} \right); \\ i(0) &= i(l) \frac{1}{2} e^{\gamma l} \left(1 + \frac{Z_{\text{н}}}{Z_{\text{в}}} \right); \\ S(0) &= S(l) e^{+2\gamma l} \frac{(Z_{\text{н}} + Z_{\text{в}})^2}{4Z_{\text{н}} Z_{\text{в}}}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

где $S(0)$ и $S(l)$ — мощности на входе и выходе линии.

Линии без потерь. Многие устройства — фидеры, питающие радиоантенны; сами радиоантенны; линии сильного тока при использовании их для передачи сигналов, а также кабели, применяемые при монтаже устройств СВЧ, — характеризуются весьма малыми потерями и сильно выраженными волновыми процессами. Если потери в линии настолько малы, что можно считать $R \ll \omega L$ и $G \ll \omega C$, то $\gamma = j\beta = j\omega \sqrt{LC}$, $\alpha = 0$, $Z_{\text{в}} = \sqrt{L/C}$.

Коэффициент распространения в этом случае оказывается чисто мнимой величиной. Подставляя $\gamma = j\beta$ в уравнения (3.25) и (3.26) и имея в виду, что в этом случае $e^{\gamma l} = e^{j\beta l}$, получим:

$$\dot{U}(0) = \dot{U}(l) e^{j\beta l} \frac{1 + \eta e^{-j2\beta l}}{1 + \eta}; \quad (3.33)$$

$$i(0) = \frac{\dot{U}(l)}{Z_{\text{в}}} e^{j\beta l} \frac{1 - \eta e^{-j2\beta l}}{1 + \eta}.$$

Уравнения (3.33) применимы для линий, у которых $R \ll \omega L$ и $G \ll \omega C$, а l соизмеримо с длиной волны λ .

Характерным для линий без потерь является чисто активное их волновое сопротивление, а фазовая скорость $v = \omega/\beta = 1/LC$ не зависит от частоты тока.

При согласованной нагрузке линии без потерь на сопротивление

$$R_{\text{н}} = Z_{\text{в}} = \sqrt{L/C}$$

напряжения и токи в линии связаны соотношениями:

$$\dot{U}(0) = \dot{U}(l) e^{j\beta l}; \quad i(0) = i(l) e^{j\beta l}. \quad (3.34)$$

Векторные напряжения и ток не изменяются вдоль линии. Вследствие того, что Z_B активно, напряжение и ток бегущей волны находятся в фазе и передаваемая волной мощность чисто активна. Линия потребляет от питающего ее генератора активную мощность, которую передает к выходу для питания приемника. Напряжение и ток вдоль линии меняются только по фазе на значение $\beta l = 2\pi f (l/v)$.

Совсем иначе происходят процессы в линии без потерь, если на конце ее нет приемника. Поскольку в самой линии потерь нет, энергия падающей волны при отсутствии приемника на конце израсходована быть не может и полностью возвращается в виде отраженной волны.

В установившемся режиме в линии с разомкнутыми или замкнутыми концами одновременно существуют два равных по значению потока энергии, движущихся во встречных направлениях. Энергия, воспринятая линией от генератора, через время $t = 2l/v$ возвращается обратно в генератор. Распределение напряжения и тока вдоль линии при этом определяется соотношениями:

при холостом ходе ($\eta = 1$) из выражений (3.25) и (3.26):

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{U}(l) \frac{e^{j\beta(l-x)} + e^{-j\beta(l-x)}}{2} = \dot{U}(l) \cos \beta(l-x); \\ \dot{I}(x) &= j \frac{\dot{U}(l)}{\sqrt{L/C}} \sin \beta(l-x); \end{aligned} \quad (3.35)$$

при коротком замыкании ($\eta = -1$):

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= j\dot{I}(l) Z_B \sin \beta(l-x); \\ \dot{I}(x) &= \dot{I}(l) \cos \beta(l-x). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Как следует из выражений (3.35) и (3.36), в этих режимах каждой точке линии соответствуют свои значения $\dot{U}(x)$ и $\dot{I}(x)$, при одних x они достигают максимума $\dot{U}(l)$ или $\dot{I}(l)$, при других — нуля. Эти выражения определяют режим стоячих волн в линии. Такой режим характерен для радиоантенн.

Со стороны входа линия ведет себя как реактивное сопротивление и значение его определяется как $\dot{U}(0)/\dot{I}(0) = jX_{вх}$. При холостом ходе это будет $j\sqrt{L/C} \operatorname{ctg} \beta l$; при коротком замыкании — $j\sqrt{L/C} \operatorname{tg} \beta l$.

При $\beta l = 2\pi/\lambda l = \pi/2$, что соответствует $l = \lambda/4$, входное сопротивление $Z_{вхкз} = \infty$, $Z_{вххх} = 0$. Входное сопротивление разомкнутого отрезка линии длиной $\lambda/4$ равно нулю. Эта величина четвертьволнового отрезка линии без потерь, замкнутого накоротко, бесконечно велика.

Не менее замечательные свойства имеет отрезок линии длиной $\lambda/4$, замкнутый на произвольное сопротивление R_H . При $l = \lambda/4$, $\beta l = \pi/2$, $e^{-j2\beta l} = e^{-j\pi} = -1$.

Подставив эти значения в уравнения (3.33), получим:

$$\dot{U}(0) = \dot{U}(l) e^{j\frac{\pi}{2}} \frac{1-\eta}{1+\eta}; \quad \dot{I}(0) = \frac{\dot{U}(l)}{Z_B} e^{j\frac{\pi}{2}}.$$

Отсюда

$$Z_{вх} = \dot{U}(0)/\dot{I}(0) = Z_B^2/R_H. \quad (3.37)$$

Таким образом, четвертьволновая линия без потерь может быть использована как трансформатор для согласования сопротивлений.

Для приложений существенны также частотные зависимости входных сопротивлений: $Z_{кз} = j\sqrt{L/C} \operatorname{tg} \beta l$ и $Z_{хх} = -j\sqrt{L/C} \operatorname{ctg} \beta l$. Так как для линии без потерь $\beta = \omega \sqrt{LC}$, то получаем:

$$Z_{кз} = j\sqrt{L/C} \operatorname{tg} t\omega$$

$$\text{и } Z_{хх} = -j\sqrt{L/C} \operatorname{ctg} t\omega,$$

где $t = l/v = l\sqrt{LC}$.

Частотные зависимости $Z_{кз}$ и $Z_{хх}$ линии без потерь подобны таковым реактивных двухполюсников (рис. 3.12).

Электрически короткая линия. Электрически короткой называют линию с малыми затуханием и фазовым сдвигом. В такой линии волновые процессы проявляются слабо и связи между напряжениями и токами на входе и выходе линии можно охарактеризовать, используя вместо волновых параметров $Z_{в}$ и γl первичные параметры линии $Z_{л} = Z_{пр}l$ и $Y_{л} = Y_{из}l$.

Признаком электрически короткой линии является такая малость величины γl , при которой выполняется соотношение $(\gamma l)^3/3! \ll \gamma l$.

При этом множители $e^{\gamma l}$ и $e^{-\gamma l}$ в уравнениях (3.25) и (3.26) можно заменить разложениями их в ряд, удержав только три первых слагаемых, и принять:

$$e^{\gamma l} = 1 + \gamma l + \frac{(\gamma l)^2}{2}; \quad e^{-\gamma l} = 1 - \gamma l + \frac{(\gamma l)^2}{2}.$$

Эта подстановка и дает уравнения электрически короткой линии.

Раскрыв также в уравнениях (3.25) и (3.26)

$$\eta = \frac{Z_{н} - Z_{в}}{Z_{н} + Z_{в}}; \quad \frac{1}{1 + \eta} = \left(\frac{1}{2} + \frac{Z_{в}}{2Z_{н}} \right); \quad \frac{\eta}{1 + \eta} = \left(\frac{1}{2} - \frac{Z_{в}}{2Z_{н}} \right),$$

получим:

$$\dot{U}(0) = \dot{U}(l) \left(e^{\gamma l} \frac{1}{1 + \eta} + e^{-\gamma l} \frac{\eta}{1 + \eta} \right) = \dot{U}(l) \left(1 + \frac{(\gamma l)^2}{2} \right) + j(l) \gamma l Z_{в};$$

(3.38)

$$i(0) = \dot{U}(l) \frac{\gamma l}{Z_{в}} + i(l) \left(1 + \frac{(\gamma l)^2}{2} \right).$$

Воспользуемся соотношениями (3.6). Из них следует, что

$$\gamma l Z_{в} = Z_{л}; \quad \gamma l / Z_{в} = Y_{л}; \quad (\gamma l)^2 / 2 = Z_{л} Y_{л} / 2.$$

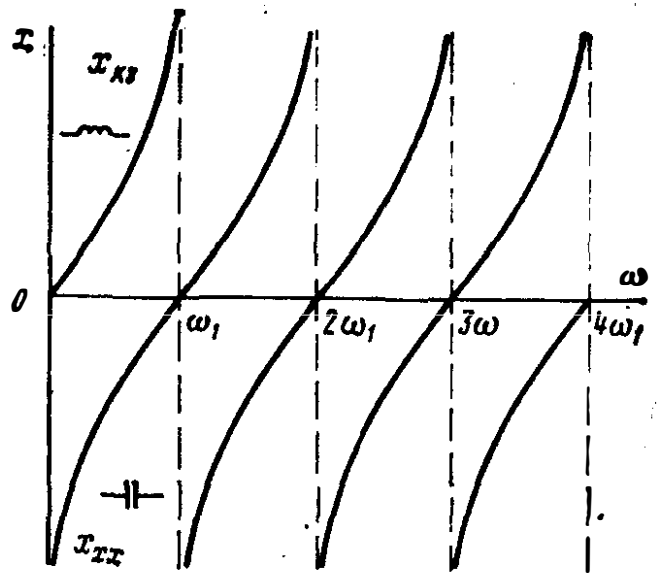


Рис. 3.12

Подставив эти значения в уравнения электрически короткой линии (3.38), получим:

$$\dot{U}(0) = \dot{U}(l) + \dot{I}(l) Z_{\text{л}} + \dot{U}(l) \frac{Z_{\text{л}} Y_{\text{л}}}{2};$$

(3.39)

$$\dot{I}(0) = \dot{I}(l) + \dot{U}(l) Y_{\text{л}} + \dot{I}(l) \frac{Z_{\text{л}} Y_{\text{л}}}{2}.$$

Эти уравнения, не содержащие волновых параметров, и используют для расчетов режимов электрически коротких линий.

Сравним уравнения (3.39) с уравнениями (2.57) и (2.58) симметричных схем замещения Т и П. Зависимость $\dot{U}(0)$ электрически короткой линии от $\dot{U}(l)$ и $\dot{I}(l)$ точно совпадает с аналогичной зависимостью симметричной схемы замещения П, в которой Z_1 и Z_2 заменены $Z_{\text{л}}$ и $1/Y_{\text{л}}$. Зависимость $\dot{I}(0)$ от $\dot{U}(l)$ и $\dot{I}(l)$ электрически короткой линии отличается от аналогичной зависимости для схемы П на величину $\dot{U}(l) \frac{Z_1}{4Z_2}$. Зависимость для $\dot{I}(0)$ электрически короткой линии точно совпадает с аналогичной зависимостью для симметричной схемы Т.

Это обстоятельство используют при расчетах коротких линий для замены их эквивалентными схемами замещения.

3.4. ОДНОРОДНАЯ УЕДИНЕННАЯ ЛИНИЯ КАК ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИК

Параметры линии как четырехполюсника. Любую пассивную линейную электрическую цепь с постоянными параметрами и четырьмя зажимами, используемую для передачи электрической энергии в качестве промежуточного звена, можно рассматривать как четырехполюсник. К числу таких цепей относят однородную уединенную электрическую линию.

Уравнения линии как четырехполюсника должны связывать четыре величины: $\dot{U}(0)$, $\dot{I}(0)$, $\dot{U}(l)$ и $\dot{I}(l)$. Для их получения вернемся к выражениям (3.25) и (3.26):

$$\dot{U}(0) = \dot{U}(l) e^{\gamma l} \frac{1 + \eta e^{-2\gamma l}}{1 + \eta};$$

$$\dot{I}(0) = \frac{\dot{U}(l)}{Z_{\text{в}}} e^{\gamma l} \frac{1 - \eta e^{-2\gamma l}}{1 + \eta}.$$

Преобразуем выражения (3.25) и (3.26), подставив в них значение $\eta = (Z_{\text{н}} - Z_{\text{в}}) / (Z_{\text{н}} + Z_{\text{в}})$ и заменяя $\dot{U}(l)/Z_{\text{н}}$ на $\dot{I}(l)$. Имея в виду, что

$$\frac{1}{1 + \eta} = \frac{1}{2} + \frac{Z_{\text{в}}}{2Z_{\text{н}}}; \quad \frac{\eta}{1 + \eta} = \frac{1}{2} - \frac{Z_{\text{в}}}{2Z_{\text{н}}},$$

получим

$$\begin{aligned} \dot{U}(0) &= \dot{U}(l) e^{\gamma l} \frac{1}{1+\eta} + \dot{U}(l) e^{-\gamma l} \frac{\eta}{1+\eta} = \dot{U}(l) \operatorname{ch} \gamma l + \dot{I}(l) Z_B \operatorname{sh} \gamma l; \\ \dot{I}(0) &= \frac{\dot{U}(l)}{Z_B} e^{\gamma l} \frac{1}{1+\eta} - \frac{\dot{U}(l)}{Z_B} \frac{\eta}{1+\eta} = \dot{U}(l) \frac{1}{Z_B} \operatorname{sh} \gamma l + \dot{I}(l) \operatorname{ch} \gamma l. \end{aligned}$$

Здесь величина $\dot{U}(l) \frac{\eta}{1+\eta} = \frac{1}{2} [\dot{U}(l) - Z_B \dot{I}(l)]$ представляет собой отраженную, а величина $\dot{U}(l) \frac{1}{1+\eta} = \frac{1}{2} [\dot{U}(l) + Z_B \dot{I}(l)]$ — падающую волны напряжения на выходе линии.

Обозначим $\dot{U}(0) = \dot{U}_0$, $\dot{I}(0) = \dot{I}_0$, $\dot{U}_1(l) = \dot{U}_1$, $\dot{I}(l) = \dot{I}_1$ и составим уравнения электрической линии и четырехполюсника:

$$\dot{U}_0 = \dot{U}_1 \operatorname{ch} \gamma l + \dot{I}_1 Z_B \operatorname{sh} \gamma l; \quad (3.40)$$

$$\dot{I}_0 = \dot{U}_1 \frac{1}{Z_B} \operatorname{sh} \gamma l + \dot{I}_1 \operatorname{ch} \gamma l;$$

$$\dot{U}_1 = A \dot{U}_2 + B \dot{I}_2; \quad (3.41)$$

$$\dot{I}_1 = C \dot{U}_2 + D \dot{I}_2.$$

Из сопоставления этих уравнений следует, что матрица параметров линии

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \gamma l & Z_B \operatorname{sh} \gamma l \\ \frac{1}{Z_B} \operatorname{sh} \gamma l & \operatorname{ch} \gamma l \end{pmatrix}.$$

Здесь, как и у каждого пассивного обратимого четырехполюсника, выполняется соотношение (2.48), выражающее свойства обратимости: $AD - BC = 1$, так как $\operatorname{ch}^2 \gamma l - \operatorname{sh}^2 \gamma l = 1$.

Линия как четырехполюсник симметрична, так как $A = D$.

Совершенно очевидно, что уравнения линии можно представить всеми формами уравнений четырехполюсника. Матрица проводимостей линии

$$(Y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{Z_B} \operatorname{cth} \gamma l & -\frac{1}{Z_B \operatorname{sh} \gamma l} \\ -\frac{1}{Z_B \operatorname{sh} \gamma l} & \frac{1}{Z_B} \operatorname{cth} \gamma l \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

а матрица сопротивлений

$$(Z) = \begin{pmatrix} Z_B \operatorname{cth} \gamma l & Z_B / \operatorname{sh} \gamma l \\ Z_B / \operatorname{sh} \gamma l & Z_B \operatorname{cth} \gamma l \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

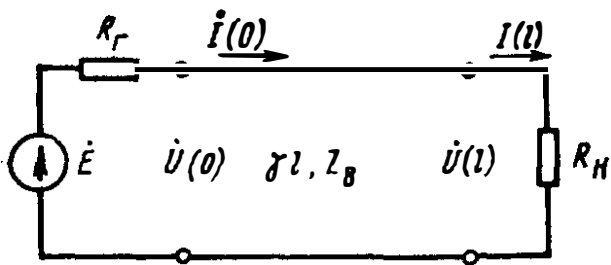


Рис. 3.13

ными параметрами A, B, C , а также матрицами проводимостей и сопротивлений.

Все эти способы взаимозаменяемы и в одинаковой степени могут характеризовать линию как систему передачи. Выбор того или иного из них зависит только от удобства его использования при решении конкретной задачи.

Линию как систему передачи сигналов наиболее удобно характеризовать волновыми параметрами: волновым сопротивлением Z_B и коэффициентом распространения γl (рис. 13.13). Волновое сопротивление показывает, как следует подобрать сопротивления генератора и приемника, чтобы в линии отсутствовали отраженные волны. Коэффициент распространения волны γl указывает на потери и фазовый сдвиг, возникающие при пробеге волны вдоль линии. Величины γl и Z_B вполне характеризуют передающие свойства линии при согласованной нагрузке.

В общем случае, рассматривая линию как четырехполюсник, условия передачи энергии от генератора к приемнику в схеме, приведенной на рис. 3.13, можно характеризовать входным сопротивлением, сопротивлением передачи или приведенным сопротивлением.

Из формул (2.11), (3.41) и (3.27) получаем:

$$Z_{BX} = \frac{AR_H + B}{CR_H + D} = Z_B \frac{R_H \operatorname{ch} \gamma l + Z_B \operatorname{sh} \gamma l}{R_H \operatorname{sh} \gamma l + Z_B \operatorname{ch} \gamma l} = Z_B \frac{1 + \eta e^{-2\gamma l}}{1 - \eta e^{-2\gamma l}}. \quad (3.44)$$

Выражение (3.44), как и аналогичные последующие, одинаково верно при активных R_H и комплексных Z_H сопротивлениях нагрузки.

В частных случаях при $R_H = 0$ (короткое замыкание) и $R_H = \infty$ (холостой ход) получим:

$$Z_{BX, R_H=0} = Z_{KЗ} = 1/Y_{11} = Z_B \operatorname{th} \gamma l; \quad (3.45)$$

$$Z_{BX, R_H=\infty} = Z_{ХХ} = Z_{11} = Z_B \operatorname{cth} \gamma l. \quad (3.46)$$

Сопротивление передачи и приведенное сопротивление линии:

$$Z_{\text{пер}} = Z_{BX} \frac{1}{F_1} = AR_H + B = R_H \operatorname{ch} \gamma l + Z_B \operatorname{sh} \gamma l = Z_B e^{\gamma l} \frac{1 + \eta e^{-2\gamma l}}{1 - \eta}; \quad (3.47)$$

$$Z_{\text{прив}} = \frac{Z_{BX} + R_G}{Z_{BX}} Z_{\text{пер}} = AR_H + DR_G + CR_G R_H + B = (R_G + R_H) \operatorname{ch} \gamma l + \left(Z_B + \frac{R_G R_H}{Z_B} \right) \operatorname{sh} \gamma l = e^{\gamma l} \frac{(R_G + Z_B) + (Z_B - R_G) \eta e^{-2\gamma l}}{1 - \eta}. \quad (3.48)$$

При $R_r = R_n = R$

$$Z_{\text{прив}} = (R + Z_B) e^{\gamma l} \frac{1 - \eta^2 e^{-2\gamma l}}{1 - \eta}. \quad (3.49)$$

Сопоставляя выражения (3.47) и (3.49), можно видеть, что наличие отраженных волн в линии в большей степени влияет на величину $Z_{\text{пер}}$ и в меньшей — на $Z_{\text{прив}}$, так как в последнем в числителе стоит η^2 .

Использование понятий $Z_{\text{пер}}$ и $Z_{\text{прив}}$ облегчает решение многих задач при определении напряжений и токов в линиях.

Определение параметров линии из опытов холостого хода и короткого замыкания. Параметры электрической линии, как и всякого четырехполюсника, могут быть установлены из опытов короткого замыкания и холостого хода. ТЛЭЦ позволяет получить новый вариант их определения, который может быть использован для вычисления параметров любых четырехполюсников.

Если в результате измерения входного сопротивления линии оказалось возможным определить $Z_{\text{кз}} = |Z_{\text{кз}}| e^{j\varphi_{\text{кз}}}$ и $Z_{\text{хх}} = |Z_{\text{хх}}| e^{j\varphi_{\text{хх}}}$, то все параметры линии можно рассчитать исходя из этих опытных данных.

Умножив и разделив выражение (3.45) на (3.46), получим:

$$Z_B = \sqrt{Z_{\text{кз}} Z_{\text{хх}}} = \sqrt{|Z_{\text{кз}}| |Z_{\text{хх}}|} e^{j \cdot 0,5 (\varphi_{\text{кз}} + \varphi_{\text{хх}})} = Z_B e^{j\varphi_B}; \quad (3.50)$$

$$\text{th } \gamma l = \sqrt{Z_{\text{кз}} / Z_{\text{хх}}} = T e^{j\varphi}, \quad (3.51)$$

где

$$T = \sqrt{|Z_{\text{кз}}| / |Z_{\text{хх}}|}; \quad \varphi_T = 0,5 (\varphi_{\text{кз}} - \varphi_{\text{хх}}).$$

Обычно значение γl находят по частям, пользуясь формулами:

$$e^{2\gamma l} = \frac{1 + T e^{j\varphi_T}}{1 - T e^{j\varphi_T}} = M e^{j\theta}; \quad (3.52)$$

$$\alpha l = \frac{1}{2} \ln M = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + T e^{j\varphi_T}}{1 - T e^{j\varphi_T}} \right|; \quad (3.53)$$

$$(\beta l)' = 0,5\theta.$$

Рассчитанное αl можно использовать сразу. При вычислении фазового угла βl возникает затруднение. Выражение (3.53) определяет его неоднозначно. Приближенное значение находят, сопоставляя длину линии с длиной волны. Километрический коэффициент фазы

$$\beta = \frac{(\beta l)' + k\pi}{l},$$

где k находят подбором.

Если известно волновое сопротивление линии Z_B и постоянная передачи $\gamma l = \alpha l + j\beta l$, то можно вычислить $Z_{\text{л}}$ и $Y_{\text{л}}$:

$$Z_{\text{л}} = (R + j\omega L) l = \gamma l Z_B, \quad (3.54)$$

в произведении $\gamma l Z_B$ действительная часть равна Rl , а мнимая — ωLl :

$$Y_{\text{л}} = (G + j\omega C) l = \gamma l / Z_B, \quad (3.55)$$

в отношении $\gamma l / Z_B$ действительная часть равна G , мнимая — ωCl .

Для пояснения способа выбора значения k рассмотрим численный пример на определение параметров линии по результатам измерений входных сопротивлений холостого хода и короткого замыкания. Пусть при измерении входного сопротивления двухпроводной цепи кабельной линии связи на частоте $f = 800$ Гц получено: $Z_{\text{кз}} = 383 \angle -4^\circ$ и $Z_{\text{хх}} = 627 \angle -78^\circ$. Знак \angle читается «с углом». Длина линии $l = 12$ км. По формуле (3.50) волновое сопротивление линии

$$Z_B = \sqrt{Z_{\text{кз}} Z_{\text{хх}}} = \sqrt{383 \angle -4^\circ \cdot 627 \angle -78^\circ} = 490 \angle -41^\circ.$$

Для определения комплексной постоянной передачи γl воспользуемся формулой (3.51):

$$\text{th } \gamma l = \sqrt{Z_{\text{кз}} / Z_{\text{хх}}} = \sqrt{383 \angle -4^\circ / 627 \angle -78^\circ} = 0,782 \angle 37^\circ.$$

Найдем αl и $(\beta l)'$ по формулам (3.52) и (3.53):

$$\alpha l = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + T e^{j\varphi_T}}{1 - T e^{j\varphi_T}} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + 0,782 e^{j \cdot 37^\circ}}{1 - 0,782 e^{j \cdot 37^\circ}} \right| = 0,521 \text{ Нп},$$

километрическое затухание $\alpha = 0,521 / 12 = 0,0434$ Нп/км, фазовый угол

$$(\beta l)' = 0,5\theta = 0,588 \text{ рад}.$$

Коэффициент k , необходимый для определения βl , выберем следующим образом. Примем фазовую скорость для цепи кабельной линии связи, равной примерно $2 \cdot 10^5$ км/с.

Длина волны равна произведению фазовой скорости и периода тока:

$$\lambda = v / f = 2 \cdot 10^5 / 8 \cdot 10^2 = 250 \text{ км}.$$

Из сравнения длины линии $l = 12$ км с длиной волны $\lambda = 250$ км следует, что по длине линии в рассматриваемом случае укладывается малая часть волны. Это значит, что угол βl должен иметь значение $\beta l \cong \cong 2\pi \frac{l}{\lambda} = 2\pi \frac{12}{250}$, и коэффициент k следует взять равным 0.

Найдем значение километрического фазового коэффициента:

$$\beta = \frac{(\beta l)' + 0}{l} = 0,049 \text{ рад/км}.$$

Следовательно,

$$\gamma = \alpha + j\beta = 0,043 + j0,049 = 0,065 \angle 48,73^\circ \text{ 1/км}.$$

Полное сопротивление проводов линии длиной 1 км можно вычислить по формуле (3.54):

$$Z_{\text{л}} = (R + j\omega L) = \gamma Z_B = 0,065 \angle 48,73^\circ \cdot 490 \angle -40,88^\circ = 31,94 \angle 7,85^\circ.$$

Разлагая произведение γZ_B на действительную и мнимую части, получим:

$$R + j\omega L = 31,64 + j4,36.$$

Определим полную проводимость между проводами линии длиной 1 км по формуле (3.55):

$$Y_{л} = (G + j\omega C) = \gamma / Z_{в} = 133 \cdot 10^{-6} \angle 89,61^{\circ} = (0,905 + j133) 10^{-6}.$$

Окончательно для первичных параметров линии получим:

$$R = 31,64 \text{ Ом/км}; \quad L = \frac{4,36}{\omega} = 0,87 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/км};$$

$$G = 0,905 \cdot 10^{-6} \text{ 1/Ом} \cdot \text{км}; \quad C = \frac{133 \cdot 10^{-6}}{\omega} = 26,5 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/км}.$$

При определении параметров линии измерением $Z_{кз}$ и $Z_{хх}$ по изложенному методу следует выбирать небольшие участки линии, для которых $\alpha l < 1,5 \div 2$ и $Z_{кз} \neq Z_{хх}$; в противном случае точное вычисление затухания линии по $\text{th } \gamma l$ затруднительно.

Схемы замещения и искусственные линии. На практике часто возникает задача построения четырехполюсных схем из элементов с сосредоточенными параметрами, условия передачи энергии через которые воспроизводили бы условия ее передачи по линии.

Схему, составляемую только для упрощения расчетов, обычно называют схемой замещения. Если же по схеме замещения собирают электрическую цепь для предварительных испытаний совместной работы каких-либо генераторов и приемников или для других целей, то эту цепь называют искусственной линией.

В обоих случаях следует определить параметры схемы замещения, удовлетворяющие условию эквивалентности. Найдем параметры симметричной схемы, эквивалентной заданному участку линии, рассматриваемой как четырехполюсник. На основании соотношений (3.41) и (2.59) выпишем параметры линии:

$$A_{л} = \text{ch } \gamma l; \quad B_{л} = Z_{в} \text{ sh } \gamma l; \quad C_{л} = \frac{1}{Z_{в}} \text{ sh } \gamma l$$

и схемы Т:

$$A_{Т} = \left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right); \quad B_{Т} = Z_1 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right); \quad C_{Т} = \frac{1}{Z_2}.$$

Приравнявая третичные параметры линии и схемы Т, получим:

$$1 + \frac{Z_1}{2Z_2} = \text{ch } \gamma l; \quad Z_1 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right) = Z_{в} \text{ sh } \gamma l; \quad \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{Z_{в}} \text{ sh } \gamma l.$$

Воспользуемся первым и третьим уравнениями, так как из трех уравнений только два являются независимыми, откуда найдем:

$$Z_2 = \frac{Z_{в}}{\text{sh } \gamma l}; \quad Z_1 = 2Z_{в} \frac{\text{ch } \gamma l - 1}{\text{sh } \gamma l}. \quad (3.56)$$

Уравнения (3.56) формально решают задачу. Схему замещения линии для токов одной частотой всегда можно составить. Однако надо иметь в виду, что волновое сопротивление линии $Z_{в}$ и постоянная передачи γ являются функциями частоты. Поэтому, чтобы схема на всех

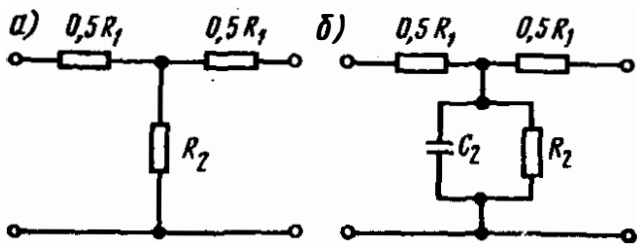


Рис. 3.14

частотах была эквивалентна линии, сопротивления Z_1 и Z_2 согласно выражениям (3.56) должны быть функциями частоты.

Построение сопротивлений, являющихся заданными функциями частоты, всегда бывает весьма сложным. Поэтому часто ограничиваются составлением схемы, приближенно эквивалентной линии на некоторой определенной частоте. Если выполнить схему из активных сопротивлений R_1 и R_2 (рис. 3.14, а), где

$$R_1 = |2Z_B| \frac{\operatorname{ch} \alpha l - 1}{\operatorname{sh} \alpha l}; \quad R_2 = \frac{|Z_B|}{\operatorname{sh} \alpha l}, \quad (3.57)$$

то она будет вносить затухание αl и соответствовать линии по модулю Z_B . В технике связи такие схемы замещения называют и с к у с с т в е н н ы м и л и н и я м и б е з и с к а ж е н и й (не воспроизводящими искажений сигналов), или у д л и н и т е л я м и.

Для получения приближенной эквивалентности линии в известном диапазоне частот применяют и с к у с с т в е н н ы е л и н и и с и с к а ж е н и я м и (рис. 3.14, б). Конденсатор в параллельной ветви обеспечивает свойственным линиям уменьшение волнового сопротивления и увеличение затухания с возрастанием частоты.

Формулами (3.56) можно воспользоваться для установления связи между сопротивлениями, входящими в схему Т, и первичными параметрами эквивалентной ей линии. Заменим в выражениях (3.56) функции $\operatorname{ch} \gamma l$ и $\operatorname{sh} \gamma l$ рядами по степеням γl и одновременно введем $Z_{\text{л}}$ и $Y_{\text{л}}$ [см. формулы (3.54) и (3.55)]. Тогда

$$\begin{aligned} Z_1 &= 2Z_B \frac{\operatorname{ch} \gamma l - 1}{\operatorname{sh} \gamma l} = 2Z_B \frac{(\gamma l)^2/2! + (\gamma l)^4/4! + \dots}{\gamma l + (\gamma l)^3/3! + \dots} = \\ &= Z_B \gamma l \frac{\gamma l + (\gamma l)^3/3 \cdot 4 + \dots}{\gamma l + (\gamma l)^3/2 \cdot 3 + \dots} = k_1 Z_{\text{л}}; \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$k_1 \approx 1 - (\gamma l)^2/12 = 1 - \frac{Z_{\text{л}} Y_{\text{л}}}{12};$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_2} = Y_2 &= \frac{1}{Z_B} \operatorname{sh} \gamma l = \frac{1}{Z_B} (\gamma l + (\gamma l)^3/3! + \dots) = \\ &= \frac{\gamma l}{Z_B} (1 + (\gamma l)^2/6 + \dots) = k_2 Y_{\text{л}}; \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$k_2 \approx 1 + (\gamma l)^2/6 = 1 + \frac{Z_{\text{л}} Y_{\text{л}}}{6}.$$

Таким образом, в схему Т, эквивалентную линии, должны входить сопротивления:

$$Z_1 = k_1 Z_{\text{л}} \text{ и } Z_2 = 1/(k_2 Y_{\text{л}}). \quad (3.60)$$

Сопротивление Z_1 меньше полного сопротивления проводов линии, а проводимость Y_2 больше полной ее проводимости. Чем меньше затухание линии, тем больше значения сопротивлений схемы замещения приближаются к значениям сопротивлений проводов и изоляции линии. Если постоянная передачи линии настолько мала, что величинами $(\gamma l)^2/6$ и $(\gamma l)^2/12$ по сравнению с единицей можно пренебречь, то коэффициенты k_1 и k_2 можно принять равными единице.

3.5. ВОЛНОВЫЕ МАТРИЦЫ ОДНОРОДНОЙ ЛИНИИ

Рассматривая линию как четырехполюсник и отображая ее свойства матрицами (A) , (Z) , (Y) , связывающими напряжения и токи на ее входе и выходе $\dot{U}_0, \dot{U}_l, \dot{I}_0, \dot{I}_l$, мы получили возможность строить эквивалентные схемы линии из сосредоточенных сопротивлений, и тем самым задачу о передаче энергии по линиям свести к расчету схемы замещения.

Однако основными переменными, характеризующими процессы передачи энергии в линиях, являются напряжения и токи падающих и отраженных волн $\dot{U}_{\text{пад}}, \dot{I}_{\text{пад}}, \dot{U}_{\text{отр}}, \dot{I}_{\text{отр}}$, и использование их во многих практических задачах облегчает решение последних.

Поскольку напряжение и ток всякой бегущей волны однозначно связаны друг с другом величиной Z_B и при $Z_B = 1$ численно равны друг другу, в качестве основных переменных удобно выбрать четыре величины — $\dot{U}_{\text{пад}0}, \dot{U}_{\text{отр}0}, \dot{U}_{\text{пад}l}, \dot{U}_{\text{отр}l}$ — и характеризовать линию набором коэффициентов, связывающих эти величины.

Рассмотрим матрицу (A) линии. Ее можно представить в виде произведения трех матриц:

$$\begin{pmatrix} \text{ch } \gamma l & Z_B \text{ sh } \gamma l \\ \frac{1}{Z_B} \text{ sh } \gamma l & \text{ch } \gamma l \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{Z_B} & -\frac{1}{Z_B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\gamma l} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & Z_B \\ 1 & -Z_B \end{pmatrix}. \quad (3.61)$$

В справедливости этого разложения легко убедиться, перемножая матрицы. Теперь уравнение линии можно представить в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_0 \\ \dot{I}_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{Z_B} & -\frac{1}{Z_B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\gamma l} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & Z_B \\ 1 & -Z_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_l \\ \dot{I}_l \end{pmatrix}. \quad (3.62)$$

Рассмотрим частные преобразования, осуществляемые каждой из трех матриц, входящих в выражение (3.62):

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & Z_B \\ 1 & -Z_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_l \\ \dot{I}_l \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{U}_l + Z_B \dot{I}_l \\ \dot{U}_l - Z_B \dot{I}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{U}_{\text{пад}l} \\ \dot{U}_{\text{отр}l} \end{pmatrix}.$$

Это преобразование переводит \dot{U}_l и \dot{I}_l в напряжения падающей и отраженной волн на конце линии [см. вывод соотношений (3.40)]:

$$\begin{pmatrix} e^{\gamma l} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma l} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{U}_{\text{пад}l} \\ \dot{U}_{\text{отр}l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{U}_{\text{пад}l} & e^{\gamma l} \\ \dot{U}_{\text{отр}l} & e^{-\gamma l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{U}_{\text{пад}0} \\ \dot{U}_{\text{отр}0} \end{pmatrix}. \quad (3.63)$$

Данное преобразование пересчитывает напряжения падающей и отраженной волн в конце линии в соответствующие напряжения в начале ее:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{Z_B} & -\frac{1}{Z_B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_{\text{пад } 0} \\ \dot{U}_{\text{отр } 0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{U}_{\text{пад } 0} + \dot{U}_{\text{отр } 0} \\ \frac{1}{Z_B} (\dot{U}_{\text{пад } 0} - \dot{U}_{\text{отр } 0}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{U}_0 \\ \dot{I}_0 \end{pmatrix}. \quad (3.64)$$

Это последнее преобразование напряжения падающей и отраженной волн в начале линии в полные напряжения и ток на ее входе.

Во многих случаях, в частности в технике СВЧ, напряжения падающих и отраженных волн могут быть измерены непосредственно. В таких случаях отпадает необходимость в переходах от полных напряжений и токов к напряжениям падающих и отраженных волн и обратно, и линию можно представить схемой, приведенной на рис. 3.15.

Связи между волнами на входе и выходе линии можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_{\text{пад } 0} \\ \dot{U}_{\text{отр } 0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{\text{пп}} & T_{\text{по}} \\ T_{\text{оп}} & T_{\text{оо}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_{\text{пад } l} \\ \dot{U}_{\text{отр } l} \end{pmatrix}. \quad (3.65)$$

В нематричной форме соотношение (3.65) дает два уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{\text{пад } 0} &= T_{\text{пп}} \dot{U}_{\text{пад } l} + T_{\text{по}} \dot{U}_{\text{отр } l}; \\ \dot{U}_{\text{отр } 0} &= T_{\text{оп}} \dot{U}_{\text{пад } l} + T_{\text{оо}} \dot{U}_{\text{отр } l}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Матрица, связывающая напряжения падающей и отраженной волн на входе линии с напряжениями падающей и отраженной волн на ее выходе, характеризует волновые свойства линии и называется в о л н о в о й м а т р и ц е й п е р е д а ч и. Обычно ее обозначают символом (T). Для однородной согласованной линии в соответствии с равенством (3.63) имеем:

$$(T) = \begin{pmatrix} e^{\gamma l} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{\text{пп}} & T_{\text{по}} \\ T_{\text{оп}} & T_{\text{оо}} \end{pmatrix}. \quad (3.67)$$

Как видно, для однородной согласованной линии не равны нулю только два параметра: $T_{\text{пп}} = \dot{U}_{\text{пад } 0} / \dot{U}_{\text{пад } l}$ — коэффициент передачи при согласовании на выходе и $T_{\text{оо}} = \dot{U}_{\text{отр } 0} / \dot{U}_{\text{отр } l}$ — величина, обратная коэффициенту передачи энергии от выхода к входу линии при согласовании на входе.

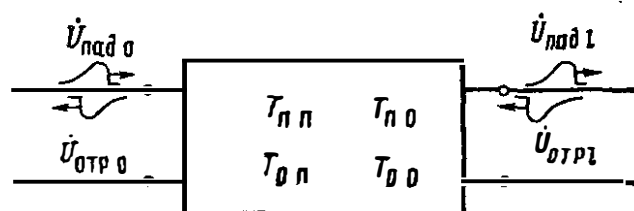


Рис. 3.15

В общем случае могут быть несогласованы вход и выход линии и внутри последней иметься вызывающие отражения неоднородности. В этом случае все параметры линии зависят от ее свойств и условий на ее входе и выходе.

Матрица (T) — матрица рабочих параметров линии. Часто применяют также волновую матрицу рассеяния:

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_{отр\ 0} \\ \dot{U}_{пад\ l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{оп} & S_{оо} \\ S_{пп} & S_{по} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_{пад\ 0} \\ \dot{U}_{отр\ l} \end{pmatrix}. \quad (3.68)$$

Соотношение (3.68) в нематричной форме:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{отр\ 0} &= S_{оп} \dot{U}_{пад\ 0} + S_{оо} \dot{U}_{отр\ l}; \\ \dot{U}_{пад\ l} &= S_{пп} \dot{U}_{пад\ 0} + S_{по} \dot{U}_{отр\ l}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Если на выходе линии приемник включен согласованно, то $\dot{U}_{отр\ l} = 0$. Отсюда параметр $S_{оп} = \dot{U}_{отр\ 0} / \dot{U}_{пад\ 0}$, при $\dot{U}_{отр\ l} = 0$ для однородной согласованно нагруженной на приемном конце линии $S_{оп}$ есть коэффициент отражения на входе, он не равен нулю при $Z_r \neq Z_B$. Второй параметр $S_{оо} = \dot{U}_{отр\ 0} / \dot{U}_{отр\ l}$ при $\dot{U}_{пад\ 0} = 0$ определяет условия передачи энергии от выхода к входу линии.

Параметр $S_{пп} = \dot{U}_{пад\ l} / \dot{U}_{пад\ 0}$ при $\dot{U}_{отр\ 0} = 0$ характеризует условие передачи энергии от входа линии к ее выходу. $S_{по} = \dot{U}_{пад\ l} / \dot{U}_{отр\ l}$ — коэффициент отражения на выходе линии при передаче энергии от ее выхода к входу.

Для однородной согласованно нагруженной с обоих концов линии матрица (S) имеет вид:

$$(S) = \begin{pmatrix} S_{оп} & S_{оо} \\ S_{пп} & S_{по} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\gamma l} \\ e^{-\gamma l} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.70)$$

Здесь не равны нулю только коэффициенты, определяющие условия передачи энергии.

В общем случае между элементами матриц (S) и (T) имеются соотношения:

$$T_{пп} = \frac{1}{S_{пп}}; \quad S_{оо} = \frac{T_{оп}}{T_{пп}}; \quad T_{оо} = S_{оо} - S_{оп} \frac{S_{по}}{S_{оо}}. \quad (3.71)$$

Из выражений (3.41), (3.61) и (3.67) следует также, что

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{Z_B} & -\frac{1}{Z_B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{пп} & T_{по} \\ T_{оп} & T_{оо} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & Z_B \\ 0 & -Z_B \end{pmatrix}. \quad (3.72)$$

Рассмотрим уравнение линии в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{U}_0 \\ \dot{I}_0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{Z_B} & -\frac{1}{Z_B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{Z_B} & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\gamma l} & 0 \\ e^{-\gamma l} & e^{-\gamma l} \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{Z_B}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{Z_B}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & Z_B \\ 1 & -Z_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_l \\ \dot{I}_l \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Матрица (A) линии представлена здесь в виде произведения пяти множителей. По сравнению с разложением (3.61) две дополнительные матрицы осуществляют нормирование волн напряжения умножением на $1/\sqrt{Z_B}$ и обратный переход к ненормированным волнам умножением на $\sqrt{Z_B}$.

Объединяя операцию перехода от напряжений и токов к напряжениям падающих и отраженных волн с операцией нормирования, разложение матрицы (A) (3.72) можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{Z_B} & \sqrt{Z_B} \\ \frac{1}{\sqrt{Z_B}} & -\frac{1}{\sqrt{Z_B}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{\Pi\Pi} & T_{\Pi O} \\ T_{O\Pi} & T_{OO} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{Z_B}} & \sqrt{Z_B} \\ \frac{1}{\sqrt{Z_B}} & -\sqrt{Z_B} \end{pmatrix}.$$

Здесь матрица (A) для однородной согласованной линии по-прежнему определяется соотношением (3.67).

Таким образом, пользуясь схемой, приведенной на рис. 3.15, и определением матрицы (T) (3.67), можно считать, если это удобно, значения падающих и отраженных волн напряжения нормированными.

3.6. ЛИНИЯ, ВОЗБУЖДАЕМАЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

Линия, возбуждаемая распределенной э. д. с. Мы рассматривали случаи возбуждения электромагнитного процесса в линии генератором, подключенным к ее входу. Это обычно бывает при использовании линии для передачи электрической энергии или сигналов управления и связи и если она является уединенной.

Однако все линии в большей или меньшей степени подвержены воздействию внешних электромагнитных полей, наводящих в них напряжения и токи. Двухпроводные цепи линий связи испытывают влияние электротяги, электромагнитных полей от радиостанций, со стороны других цепей той же линии связи. Во всех этих случаях внешние влияния не меняют условий работы цепи, им подверженной. Если при передаче по линиям электрической энергии большими напряжениями и токами такими влияниями полностью пренебрегают, то при передаче сигналов связи малыми напряжениями и токами с ними необходимо считаться. В связи с этим возникает необходимость рассмотрения линии, волновой процесс в которой непрерывно возбуждается внешними полями. Их действие можно заменить действием источников напряжения или тока, распределенными по длине линии.

Пусть под воздействием внешнего переменного магнитного поля, создаваемого другой влияющей цепью, в каждом элементе цепи связи наводится э. д. с. $E(x) dx$ (рис. 3.16). Зависимость $E(x)$ обуславливается изменением значения влияющего тока в соответствии с выражением (3.28) или расстояния между влияющей и рассматриваемой линиями. Указанная э. д. с. распределена по всей длине линии. Таким образом, линию, находящуюся под воздействием переменного магнитного поля,

можно представить как бы питаемой распределенным источником с плотностью напряжения $\dot{E}(x)$, В/км.

Э. д. с. $\dot{E}(x) dx$ в каждом элементе линии вызовет ток и возбудит в линии волновой процесс, для расчета которого следует решить дифференциальные уравнения линии с учетом внешнего на нее воздействия. Как и при изучении уединенной линии, составим эквивалентную схему малого участка линии, подверженной влиянию (рис. 3.16, сравним с рис. 3.2).

Уравнения для приращения напряжения и тока на этом участке:

$$-d\dot{U} = (R + j\omega L) dx \dot{I} + \dot{E}(x) dx; \quad -d\dot{I} = (G + j\omega C) dx \dot{U}.$$

При отсутствии источников на концах линии величины \dot{U} и \dot{I} вызваны здесь источниками, распределенными по ее длине. Разделив эти уравнения на dx , взяв в первом из них вторую производную по x и исключив $d\dot{I}/dx$, получим:

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} - \gamma^2 \dot{U} = \dot{E}'(x). \quad (3.73)$$

Это уравнение в отличие от уравнения (3.3) неоднородно. Общее решение его есть сумма общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнений. Частное решение неоднородного уравнения

$$\dot{U}(x) = \frac{1}{\gamma} \int \dot{E}'(x) \operatorname{sh} \gamma(x-u) du$$

характеризует волновые процессы, вызванные распределенными источниками.

Определение произвольных постоянных интегрирования приводит в рассматриваемом случае к громоздким выкладкам, поэтому воспользуемся волновыми свойствами однородной линии, ее свойствами как четырехполюсника и принципом наложения.

Принцип наложения позволяет утверждать, что, поскольку цепь линейна, элементарная э. д. с. $\dot{E}(x) dx = d\dot{E}(x)$ в каждом бесконечно малом элементе линии действует независимо и вызывает свою реакцию.

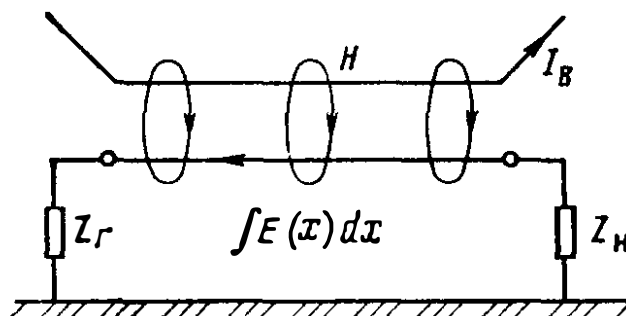


Рис. 3.16

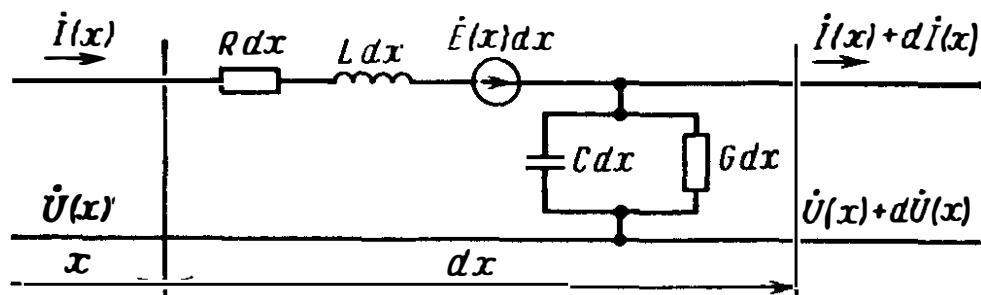


Рис. 3.17

Результат действия полной э. д. с. есть сумма результатов от действия всех $d\dot{E}(x)$.

Рассмотрим действие э. д. с. $d\dot{E}(x)$, находящейся в точке, удаленной на расстояние x от начала линии (рис. 3.18). В этой точке возникают две волны с напряжениями $0,5 d\dot{E}(x)$ и $-0,5 d\dot{E}(x)$, соответственно расходящиеся в стороны концов линии AB . Напряжение волны, падающей в точке A линии, равно $0,5 \dot{E}(x) e^{-\gamma x}$, а падающей в точке B — $-0,5 d\dot{E}(x) e^{-\gamma(l-x)}$.

Если в линии $d\dot{E}(x)$ действует э.д.с. $\dot{E}(x)$, распределенная по всей ее длине, то напряжение падающей волны:
в начале линии

$$\dot{U}_{\text{пад}}^*(0) = \frac{1}{2} \int_0^l d\dot{E}(x) e^{-\gamma x}; \quad (3.74)$$

в конце линии

$$\dot{U}_{\text{пад}}(l) = -\frac{1}{2} \int_0^l d\dot{E}(x) e^{-\gamma(l-x)}. \quad (3.75)$$

При согласованных нагрузках на концах линии величины $\dot{U}_{\text{пад}}(0)$ и $\dot{U}_{\text{пад}}(l)$ являются напряжениями на концах линии, а токи соответственно:

$$\dot{i}(0) = \dot{U}_{\text{пад}}(0)/Z_{\text{в}} \text{ и } \dot{i}(l) = \dot{U}_{\text{пад}}(l)/Z_{\text{в}}.$$

При несогласованных нагрузках на концах линии возникнут отраженные волны, которые наложатся на падающие здесь волны.

Напряжение суммарной волны, падающей:

на нагрузочное сопротивление $Z_{\text{л}}$, включенное в начале линии в точке A :

$$\dot{U}_{\text{пад}}(0) + \dot{U}_{\text{пад}}(l) \eta_l e^{-\gamma l} = \dot{U}_A; \quad (3.76)$$

на нагрузочное сопротивление $Z_{\text{н}}$, включенное в конце линии в точке B :

$$\dot{U}_{\text{пад}}(l) + \dot{U}_{\text{пад}}(0) \eta_0 e^{-\gamma l} = \dot{U}_B. \quad (3.77)$$

Определим ток, возникающий в сопротивлении $Z_{\text{н}}$. Для упрощения расчета суммарную волну напряжения \dot{U}_B , падающую на сопротивление $Z_{\text{н}}$, заменим эквивалентной ей по действию на сопротивление $Z_{\text{н}}$ падающей волной в точке A линии. Последняя должна иметь напряжение $\dot{U}_B e^{\gamma l}$.

Допустим далее, что волна с напряжением \dot{U}_B , падающая в точке B , вызывается не внутренними э. д. с. линии, а генератором с сопротивле-

* $\dot{U}_{\text{пад}}(0)$ в отличие от $\dot{U}_{\text{пад}}(0)$, рассмотренного в § 3.3, падает на вход линии изнутри.

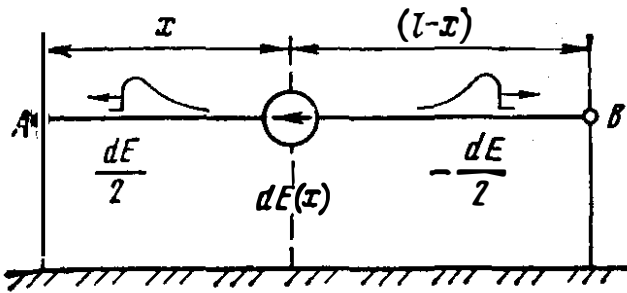


Рис. 3.18

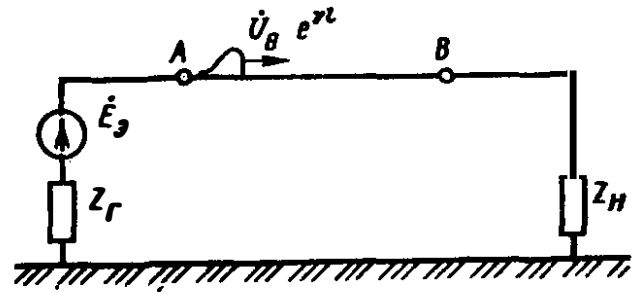


Рис. 3.19

нием Z_r и э. д. с. \dot{E}_0 , подключенными к входу А линии. В отношении действия на сопротивление Z_n существенно напряжение, а не причина возникновения волны. Таким образом, приходим к эквивалентной схеме линии (рис.3.19).

Для возбуждения такой волны э. д. с. генератора с внутренним сопротивлением Z_r должна быть:

$$\dot{E}_0 = \frac{1}{Z_B} \dot{U}_B e^{\gamma l} (Z_B + Z_r). \quad (3.78)$$

Ток в сопротивлении Z_n

$$i(l) = \frac{\dot{E}_0}{Z_{прив}} = \frac{\dot{U}_B e^{\gamma l} (Z_B + Z_r)}{Z_B Z_{прив}}. \quad (3.79)$$

Здесь $Z_{прив}$ определяется выражением (3.48), а \dot{U}_B — выражением (3.77). Подставляя его значение в формулу (3.79), получим

$$i(l) = \frac{1}{Z_B Z_{прив}} [\dot{U}_{пад}(l) e^{\gamma l} (Z_B + Z_r) + \dot{U}_{пад}(0) (Z_r - Z_B)]. \quad (3.80)$$

Аналогично можно получить выражение тока, проходящего через сопротивление Z_r на конце А линии.

Линия, возбуждаемая распределенным источником тока. Если цепь связи находится в переменном электрическом поле (рис. 3.20), то каждый элемент провода представляет собой как бы обкладку конденсатора и в нем индуцируются электрические заряды. Эти заряды, растекаясь по проводам, создают ток, значение которого в месте его возникновения зависит не от сопротивления цепи, а от значения вызвавшего его заряда. Таким образом, линию, находящуюся под воздействием переменного электрического поля, можно представить как бы питаемой распределенным источником тока, возбуждающим в линии волновой процесс,

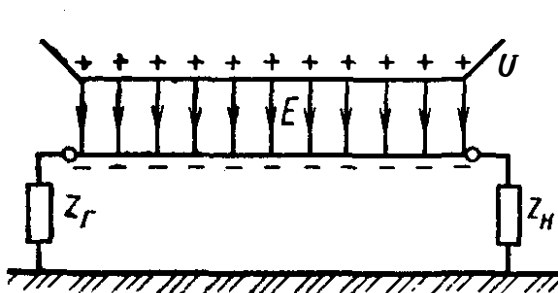


Рис. 3.20

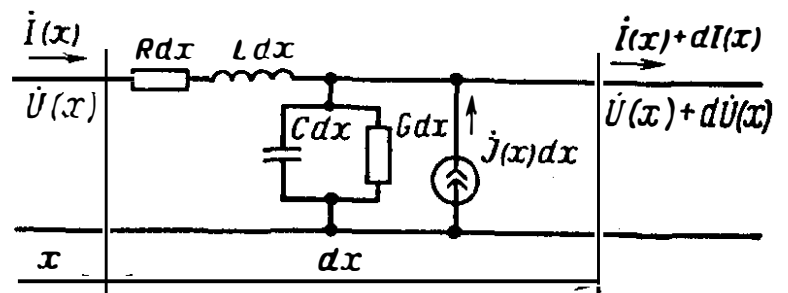


Рис. 3.21

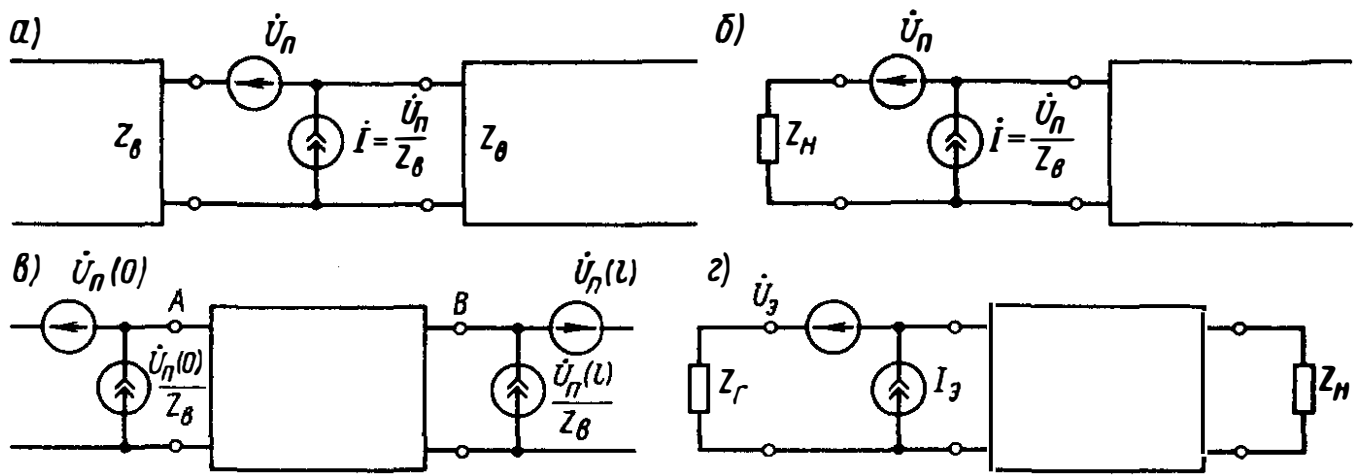


Рис. 3.22

проходящий аналогично таковому при действии распределенных источников э. д. с.

Эквивалентная схема бесконечно малого элемента линии приведена на рис. 3.21. Задача по определению возникающих на концах линии токов и напряжений и в этом случае может быть решена определением реакции от элементарного источника тока и интегрирования по длине линии. Здесь в отличие от рассмотренной задачи о линии с источником э. д. с. напряжение волн, расходящихся из точки приложения источника x , будет $0,5 dI(x)Z_B$, и обе волны напряжения будут одного знака. При наличии распределенных э. д. с. и токов действие тех и других суммируется в соответствии с принципом наложения. Все изложенное по отношению к линии вообще справедливо при решении практических задач по расчету подверженных внешним влияниям двух- и однопроводных цепей связи различных конструкций.

Эквивалентная схема линии с распределенными источниками. Действие распределенных по линии источников на нагрузки с сопротивлениями Z_r и Z_n , включенные на концах линии, вполне определяется волнами, падающими из линии на ее концы.

В случае распределенных э. д. с. напряжения этих волн $\dot{U}_{пад}(0)$ и $\dot{U}_{пад}(l)$ определяются выражениями (3.76) и (3.77). Это обстоятельство позволяет построить схему замещения линии с распределенными источниками как пассивной линии с генераторами соответствующих волн на ее концах.

Для составления схемы генератора бегущей волны заметим, что для этой волны обязательным является соотношение $\dot{U}_{пад} = Z_B \dot{I}_{пад}$. Это значит, что в указанную схему должен быть включен генератор с э. д. с. $\dot{E} = \dot{U}_{пад}$ и сопротивлением $Z_r = 0$ и генератор тока $\dot{I}_{пад} = \frac{1}{Z_B} \dot{U}_{пад}$ и $Y_r = 0$ (рис. 3.22, а).

Допустим, что с двух сторон образованного таким образом активного четырехполюсника включены сопротивления Z_n . Тогда в левом сопротивлении будет ток:

$$\dot{I}_{лев} = -\frac{\dot{U}_{пад}}{2Z_B} + \frac{1}{2} \frac{\dot{U}_{пад}}{Z_B} = \frac{\dot{U}_{пад}}{Z_B};$$

в правом сопротивлении

$$i_{\text{прав}} = -\frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{2Z_{\text{в}}} + \frac{1}{2} \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_{\text{в}}} = 0.$$

Как видно, имеет место необходимое одностороннее действие. Пусть теперь одно из сопротивлений $Z_{\text{н}} \neq Z_{\text{в}}$ (рис. 3.22, б), тогда

$$i_{\text{прав}} = -\frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_{\text{н}} + Z_{\text{в}}} + \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_{\text{в}}} \frac{Z_{\text{н}}}{Z_{\text{н}} + Z_{\text{в}}} = \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_{\text{в}}} \eta_{\text{п}},$$

т. е. при согласованной нагрузке $i_{\text{прав}} = 0$, при несогласованной $i_{\text{прав}} = \eta_{\text{п}} i_{\text{пад}}$.

Ток в сопротивлении $Z_{\text{н}}$

$$i_{\text{лев}} = \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_{\text{н}} + Z_{\text{в}}} + \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_{\text{в}}} \frac{Z_{\text{в}}}{Z_{\text{в}} + Z_{\text{н}}} = (1 - \eta_{\text{п}}) i_{\text{пад}}.$$

Токи, вызванные в сопротивлении $Z_{\text{н}}$ и в линии, полностью соответствуют создаваемой падающей волной с напряжением $\dot{U}_{\text{пад}}$. Используя рассмотренную схему замещения генератора волны, построим схему замещения линии (рис. 3.22, в). Она содержит независимые источники напряжения и тока и называется схемой активного автономного четырехполюсника.

Можно построить вариант схемы замещения, в которой все эквивалентные источники находятся с одной стороны пассивной линии. Так, если перенести источники с конца B схемы, приведенной на рис. 3.22, в, влево с одновременной заменой их эквивалентными, получим схему (рис. 3.22, г). Здесь

$$\begin{aligned} \dot{U}_{\text{э}} &= \dot{U}_{\text{пад}}(0) - \dot{U}_{\text{пад}}(l) e^{\gamma l}; \\ i_{\text{э}} &= \frac{1}{Z_{\text{в}}} [\dot{U}_{\text{пад}}(0) + \dot{U}_{\text{пад}}(l) e^{\gamma l}]. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Рассмотренные в этом разделе приемы с успехом применяются при расчете влияний между линиями.

3.7. НЕОДНОРОДНЫЕ ЛИНИИ

В радиотехнических и электронных устройствах другого назначения для формирования импульсов, согласования сопротивлений, в качестве элементов фильтров и для других целей широко применяют неоднородные линии. Параметры таких линий изменяются вдоль ее длины от точки к точке по какому-либо закону. Обычно это линии с весьма малыми потерями.

Для получения уравнений, приближенно описывающих процессы в неоднородных линиях, следует в уравнениях (3.2) пренебречь параметрами R и G и посчитать L и C зависящими от координаты x . Это дает

$$-\frac{d\dot{U}}{dx} = j\omega L(x) i; \quad -\frac{di}{dx} = j\omega C(x) \dot{U}. \quad (3.82)$$

Как и в случае однородной линии, перейдем к уравнению, содержащему одну неизвестную функцию \dot{U} . Для этого возьмем вторую производную по x от $-\frac{d\dot{U}}{dx}$:

$$-\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = j\omega L(x) \frac{d\dot{I}}{dx} + j\omega \frac{dL(x)}{dx} \dot{I}(x).$$

Исключим теперь \dot{I} и $d\dot{I}/dx$, подставив их значения из первого и второго уравнений (3.82):

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = j\omega L(x) C(x) \dot{U} + \frac{1}{L(x)} \frac{dL(x)}{dx} \frac{d\dot{U}}{dx}.$$

Последнее уравнение можно записать также в виде

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} - \gamma^2(x) \dot{U} = j\omega \frac{dL(x)}{dx} \dot{I}. \quad (3.83)$$

Сравнивая уравнение (3.83) с (3.3) и (3.73), можно процессы в неоднородной линии интерпретировать как волновые. Они, однако, отличаются от процессов в однородной линии. Во-первых, постоянная распространения $\gamma(x)$ (в линии без потерь фазовая скорость) зависит от x :

$$\gamma = j\omega \sqrt{L(x)C(x)} = j\beta(x); \quad v = \omega/\beta = 1/\sqrt{L(x)C(x)}. \quad (3.84)$$

Во-вторых, в каждой точке линии имеется как бы источник э. д. с., порождающий новые волны, накладывающиеся на бегущую по линии волну и деформирующие ее. Эта деформация изменяет отношение напряжения к току в волне при переходе от точки к точке и является следствием зависимости от x волнового сопротивления линии:

$$Z_{\text{в}} = \sqrt{L(x)/C(x)}. \quad (3.85)$$

Более конкретные результаты при описании процессов в неоднородных линиях можно получить, задавшись определенным законом изменения $L(x)$ и $C(x)$. В частности, если $L(x) = L_0 e^{kx}$ и $C(x) = C_0 e^{kx}$, линию называют **экспоненциальной**.

У экспоненциальной линии

$$Z_{\text{в}} = \sqrt{L(x)/C(x)} = \sqrt{L_0/C_0} e^{kx}; \quad v = 1/\sqrt{L_0 C_0}. \quad (3.86)$$

Скорость распространения волны вдоль экспоненциальной линии сохраняется постоянной. Отличие от процессов в однородной линии здесь сводится только к деформации волны из-за непрерывного отражения.

3.8. ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В НЕСИММЕТРИЧНОЙ ДВУХПРОВОДНОЙ ЛИНИИ

Практические задачи. В теории однородной уединенной линии предполагалось, что ток в обоих проводах линии один и тот же и линия не подвержена никаким внешним влияниям. В уединенной линии име-

ется одна цепь тока, и, таким образом, понятия «линия» и «цепь» тождественны.

Все соотношения, определяющие процессы в такой двухпроводной линии, называемой также с и м м е т р и ч н о й, полностью справедливы и для однопроводной линии.

В действительности, даже уединенные двухпроводные линии, а также рельсовые цепи не свободны от влияний земли (утечка тока в землю). Это положение усугубляется различием параметров самих проводов цепи.

Кроме того, в большинстве случаев цепи многопроводных линий располагают на общих с другими цепями того же, а иногда и другого типа опорах. Современные воздушные линии связи содержат до 40 проводов, влияющих друг на друга, а кабели связи — большое число жил, заключенных в общую оболочку; высоковольтно-сигнальные линии автоблокировки несут на общих опорах высоковольтные и сигнальные провода; линии электропередачи часто состоят из двух цепей; линии связи местами проходят вблизи линий электропередачи, на участках с электрической тягой — параллельно тяговому проводу дороги. Естественно, что в этих условиях неизбежно должно проявляться взаимное влияние линий.

Все это говорит о том, что при расчете различных устройств не всегда можно применять теорию однородной уединенной линии. Следует вопросы работы цепей с распределенными параметрами рассматривать в условиях взаимных влияний между ними. При применении мер по устранению взаимных влияний (скрещивание цепей воздушных линий связи, скручивание в группы жил симметричных кабелей, транспонирование проводов линий электропередачи, стремление к одинаковым параметрам симметричных цепей всех типов) во многих случаях можно для каждой отдельной цепи пользоваться уравнениями уединенной линии, что чрезвычайно упрощает расчеты условий передачи энергии.

Однако ряд практических задач [например, учет взаимного влияния разных линий друг на друга, использование для передачи энергии всей совокупности проводов линии (пучка), как при организации поездной радиосвязи и передаче высокочастотных сигналов по высоковольтным линиям электропередачи, учет влияния неоднородности проводов цепи, включая обрыв одного из них, на условия передачи по ней и др.] требует более строгого и точного анализа процессов, учитывающих взаимодействие всех проводов влияющих линий. Всю совокупность вычислений по общему решению этих задач из-за их громоздкости и сложности следует разделить на ряд более мелких.

Любая задача в области теории линий содержит три части:

вычисление первичных параметров проводов и цепей многопроводной линии, включая взаимные сопротивления и проводимости. Расчет собственных и взаимных сопротивлений и проводимостей проводов (или цепей) при наличии большого их числа с учетом близости земли или проводящей оболочки, конечной проводимости последних и наличия конструктивных неоднородностей оказывается во многих случаях также весьма сложным. Поэтому значения собственных и взаимных параметров часто устанавливают измерениями;

вычисление волновых параметров многопроводной линии;

выявление влияния несогласованности нагрузок на концах линии и определение рабочих условий передачи энергии.

При решении любой практической задачи следует определять собственные первичные параметры, а затем (при необходимости) учитывать волновой характер процессов в линии и состояние ее концов.

Уравнения однородной уединенной линии (3.2) отражают процессы в линиях определенной конструкции (см. рис. 3.3). Электромагнитные процессы в этих линиях определяются одним током и одним напряжением. В любой точке линии токи в обоих проводах одинаковы по значению и противоположны по направлению. Процессы в двухпроводной линии можно характеризовать одним напряжением и одним током только в том случае, если можно пренебречь присутствием вблизи проводов земли и или других проводящих поверхностей, например кабельных оболочек. Во многих практически важных случаях явления в линиях следует рассматривать с учетом близлежащих проводящих поверхностей.

Уравнения двухпроводной линии над проводящей поверхностью. Двухпроводная линия (рис. 3.23) образована двумя проводами, параметры которых в общем случае могут быть различны. Токи двух проводов этой линии из-за утечки части их в землю различны. Такие линии называют *н е с и м м е т р и ч н ы м и*.

Пусть первичные параметры однопроводных цепей, образованных каждым из проводов с возвратом тока по земле, соответственно будут: $R_1, L_1, C'_1, G'_1, R_2, L_2, C'_2, G'_2$.

Емкость и проводимость провода относительно земли зависят от того, как их измеряют: в присутствии или в отсутствии второго провода. Штрихи у величин C' и G' означают, что они измерены в присутствии второго провода или вычислены с учетом этого присутствия. Величины C' и G' называют частичными емкостями и проводимостями линии.

Кроме собственных первичных параметров, двухпроводную линию характеризуют *в з а и м н ы м и* п а р а м е т р а м и: $R_{12}, M_{12}, G'_{12}, C'_{12}$. Взаимное сопротивление R_{12} — общая часть сопротивления петель (контуров): первый провод — земля и второй провод — земля; M_{12} — взаимная индуктивность этих же петель; G'_{12}, C'_{12} — соответственно взаимные проводимость и емкость.

Схема замещения бесконечно малого элемента двухпроводной линии с учетом влияния земли приведена на рис. 3.24 (сравним с рис. 3.2).

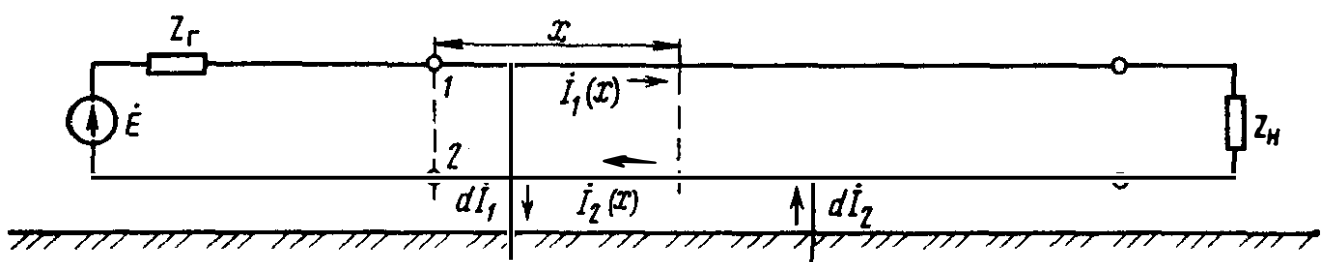


Рис. 3.23

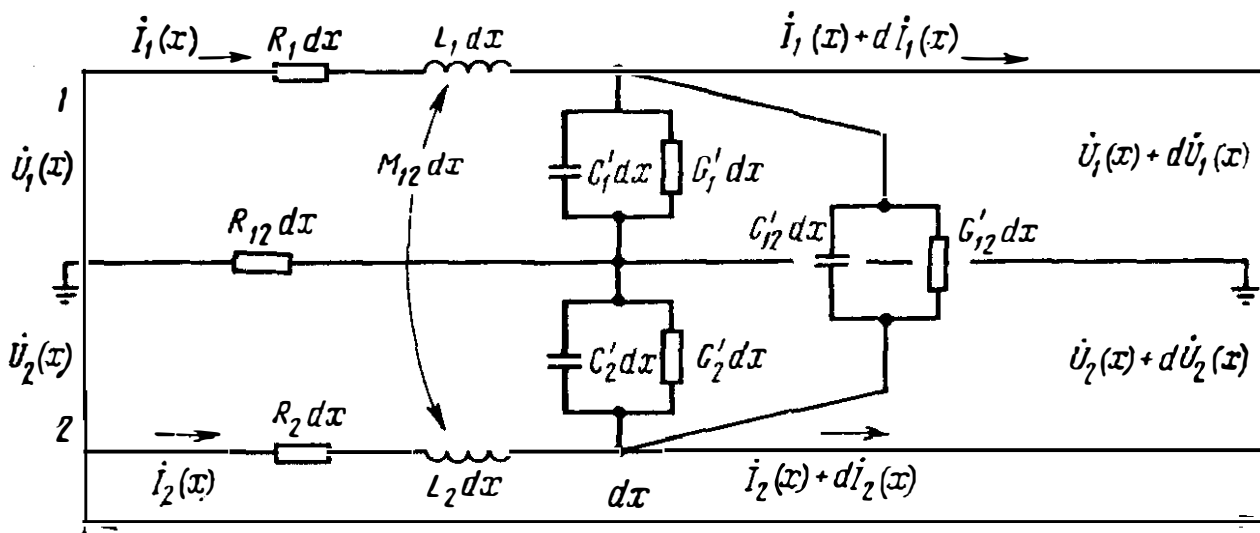


Рис. 3.24

Составим дифференциальные уравнения двухпроводной несимметричной линии, применяя законы Ома и Кирхгофа к эквивалентной схеме ее бесконечно малого элемента, как это было сделано ранее по отношению к симметричной или однопроводной линии.

Изменение напряжения на бесконечно малом участке первого провода складывается из падения напряжения на полном сопротивлении провода и напряжения, наведенного в этом элементе током второго провода;

$$-d\dot{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1) dx \dot{I}_1 + (R_{12} + j\omega M_{12}) dx \dot{I}_2, \quad (3.87)$$

аналогично для второго провода

$$-d\dot{U}_2 = (R_{12} + j\omega M_{12}) dx \dot{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2) dx \dot{I}_2.$$

Утечка тока с каждого провода в любом элементе линии происходит как в землю за счет напряжения провода относительно земли, так и на второй провод, если его напряжение относительно земли не равно напряжению рассматриваемого провода:

$$\begin{aligned} -d\dot{I}_1 &= (G'_1 + j\omega C'_1) dx \dot{U}_1 + (G'_{12} + j\omega C'_{12}) dx (\dot{U}_1 - \dot{U}_2) = \\ &= [G'_1 + G'_{12} + j\omega (C'_1 + C'_{12})] dx \dot{U}_1 + [- (G'_{12} + j\omega C'_{12})] dx \dot{U}_2; \\ -d\dot{I}_2 &= [- (G'_{12} + j\omega C'_{12})] dx \dot{U}_1 + [G'_2 + G'_{12} + j\omega (C'_2 + C'_{12})] dx \dot{U}_2. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} R_i + j\omega L_i &= Z_{ii}; & R_{ij} + j\omega M_{ij} &= Z_{ij}; \\ G'_i + G'_{ij} &= G'_{ii}; & C'_i + C'_{ij} &= C_{ii}; \\ G_{ii} + j\omega C_{ii} &= Y_{ii}; & -(G'_{ij} + j\omega C'_{ij}) &= Y_{ij}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

В принятых обозначениях уравнения двухпроводной линии будут:

$$\begin{aligned} -\frac{d\dot{U}_1}{dx} &= Z_{11} \dot{I}_1 + Z_{12} \dot{I}_2; & -\frac{d\dot{U}_2}{dx} &= Z_{21} \dot{I}_1 + Z_{22} \dot{I}_2; \\ -\frac{d\dot{I}_1}{dx} &= Y_{11} \dot{U}_1 + Y_{12} \dot{U}_2; & -\frac{d\dot{I}_2}{dx} &= Y_{21} \dot{I}_1 + Y_{22} \dot{I}_2. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Систему (3.89) можно записать в матричной форме:

$$-\frac{d(\dot{U})}{dx} = (Z_{\text{пр}})(\dot{i}); \quad -\frac{d(\dot{i})}{dx} = (Y_{\text{из}})(\dot{U}). \quad (3.90)$$

Эта система матричных уравнений соответствует системе уравнений однопроводной линии (3.2). Здесь, как и при переходе от неразветвленной цепи к разветвленной, характеристики проводов $Z_{\text{пр}}$ и $Y_{\text{из}}$ заменились матрицами:

$$(Z_{\text{пр}}) = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \text{ и } (Y_{\text{из}}) = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}.$$

Продифференцировав первое и второе уравнения системы (3.89) по x и заменив производные от токов по x их значениями, взятыми из третьего и четвертого уравнений, получим уравнение второго порядка, содержащее только напряжения

$$\frac{d^2(\dot{U})}{dx^2} = (Z_{\text{пр}})(Y_{\text{из}})(\dot{U}). \quad (3.91)$$

В нематричной форме уравнение (3.91) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \dot{U}_1}{dx^2} &= (Z_{11} Y_{11} + Z_{12} Y_{12}) \dot{U}_1 + (Z_{11} Y_{12} + Z_{12} Y_{22}) \dot{U}_2 = \gamma_{11}^2 \dot{U}_1 + \gamma_{12}^2 \dot{U}_2; \\ \frac{d^2 \dot{U}_2}{dx^2} &= (Z_{12} Y_{11} + Z_{22} Y_{12}) \dot{U}_1 + (Z_{12} Y_{12} + Z_{22} Y_{22}) \dot{U}_2 = \gamma_{21}^2 \dot{U}_1 + \gamma_{22}^2 \dot{U}_2. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Решение уравнений двухпроводной линии. Матричное уравнение (3.91) совершенно подобно уравнению (3.3) однопроводной линии. Использование матричной формы записи позволяет формально по аналогии между уравнениями сразу составить решение уравнения (3.91) и результаты, полученные для двухпроводной линии, распространить на линии с любым числом проводов.

Составим решение матричного уравнения (3.91) в виде выражений (3.5):

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= A_1 e^{-\sqrt{\gamma^2} x} + A_2 e^{\sqrt{\gamma^2} x}; \\ \dot{i}(x) &= \frac{1}{Z_B} (A_1 e^{-\sqrt{\gamma^2} x} - A_2 e^{\sqrt{\gamma^2} x}). \end{aligned} \quad (3.93)$$

В этих решениях \dot{U} , \dot{i} , A_1 , A_2 , γ^2 , Z_B — матрицы. Для перехода к нематричной форме решений прежде всего следует найти значения $\sqrt{\gamma^2}$ и $e^{\sqrt{\gamma^2} x}$. Последнее можно осуществить, пользуясь теоремой Сильвестра, для чего в свою очередь необходимо определить характеристические числа матрицы $\gamma^2 - k^2$, являющиеся корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} (\gamma_{11} - k^2) & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & (\gamma_{22} - k^2) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.94)$$

Уравнение (3.94) — биквадратное и имеет четыре попарно сопряженных корня $\pm k_{1,2}$.

Опуская довольно громоздкие промежуточные выкладки, выпишем окончательные решения:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1(x) &= (A_{111} e^{-k_1 x} + A_{112} e^{k_1 x}) + (A_{121} e^{-k_2 x} + A_{122} e^{k_2 x}); \\ \dot{U}_2(x) &= (A_{211} e^{-k_1 x} + A_{212} e^{k_1 x}) + (A_{221} e^{-k_2 x} + A_{222} e^{k_2 x}); \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} i_1(x) &= \frac{1}{Z_{B1}} (A_{111} e^{-k_1 x} - A_{112} e^{k_1 x}) + \frac{1}{Z_{B2}} (A_{121} e^{-k_2 x} - A_{122} e^{k_2 x}); \\ i_2(x) &= \frac{1}{Z_{B1}} (A_{211} e^{-k_1 x} - A_{212} e^{k_1 x}) + \frac{1}{Z_{B2}} (A_{221} e^{-k_2 x} - A_{222} e^{k_2 x}). \end{aligned}$$

Здесь

$$Z_{B1} = \frac{1}{k_1} (Z_{11} - \eta_1 Z_{12}); \quad Z_{B2} = \frac{1}{k_2} (Z_{22} - \eta_2 Z_{12}); \quad (3.96)$$

$$\eta_1 = \frac{\gamma_{12}^2}{\gamma_{11}^2 - k_2^2}; \quad \eta_2 = \frac{\gamma_{21}^2}{\gamma_{11}^2 - k_2^2}. \quad (3.97)$$

Значения коэффициентов γ_{ij} определены выражениями (3.92).

Из выражений (3.95) при сопоставлении их с выражениями (3.5) следует, что в двухпроводной линии могут быть два типа падающих и отраженных волн. Первый тип волн характеризуется километрическим коэффициентом распространения: $k_1 = \alpha_1 + j\beta_1$ и волновым сопротивлением Z_{B1} , а второй тип волн — соответственно величинами $k_2 = \alpha_2 + j\beta_2$ и Z_{B2} . Напряжения и токи обеих волн присутствуют в обоих проводах линии. В линии, состоящей из N проводов, в общем случае могут существовать N пар волн, характеризующихся N различными коэффициентами распространения и N различными волновыми сопротивлениями.

Постоянные интегрирования A_{ij1} есть амплитуды падающих, а A_{ji2} — отраженных волн напряжения. Как и в случае однопроводной линии, их определяют через напряжения и токи в начале или конце линии.

Схема замещения несимметричной двухпроводной линии. Если определить постоянные интегрирования через напряжения и токи проводов в начале линии $\dot{U}_1(0)$, $\dot{U}_2(0)$, $i_1(0)$ и $i_2(0)$, то для бесконечно длинной линии, в которой имеются только падающие волны, из уравнений (3.95) получим:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1(x) &= \frac{1}{2(1 - \eta_1 \eta_2)} \{ [\dot{U}_1(0) - \eta_1 \dot{U}_2(0)] + Z_{B1} [i_1(0) + \eta_2 i_2(0)] \} e^{-k_1 x} + \\ &+ \frac{\eta_1}{2(1 - \eta_1 \eta_2)} \{ [-\eta_2 \dot{U}_1(0) + \dot{U}_2(0)] + Z_{B2} [\eta_1 i_1(0) + i_2(0)] \} e^{-k_2 x}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Выражение для $\dot{U}_2(x)$ получается перестановкой индексов 1 и 2 у напряжений, токов и коэффициентов η .

В выражениях, определяющих отраженные волны, $(\dot{U} + Zi)$ заменяются на $(\dot{U} - Zi)$. Ток волны получается делением напряжения на соответствующие Z_B . Уравнения несимметричной линии впервые бы-

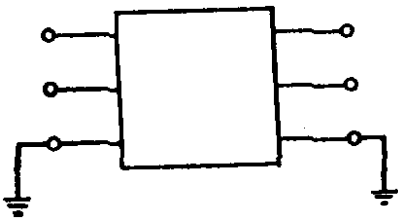


Рис. 3.25

ли получены В. И. Коваленковым. Двухпроводная линия над землей (или в экране), в которой рассматриваются напряжения каждого из проводов относительно земли (или экрана), является $2(2+1)$ -полюсником (рис. 3.25).

Уравнения двухпроводной линии как $2(2+1)$ -полюсника довольно громоздки.

Из уравнения (3.98) следует, что по простым законам, соответствующим законам преобразования напряжений и токов в уединенной однородной линии, изменяются линейные комбинации напряжений и токов проводов:

$$(\dot{U}_1 - \eta_1 \dot{U}_2); (\dot{I}_1 + \eta_2 \dot{I}_2); (-\eta_2 \dot{U}_1 + \dot{U}_2); (\eta_1 \dot{I}_1 + \dot{I}_2).$$

Преобразование напряжений и токов на входе линии в напряжения и токи на выходе можно представить как последовательность следующих преобразований:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1(l) &= \frac{1}{1 - \eta_1 \eta_2} [\dot{U}'(l) + \eta_1 \dot{U}''(l)], \\ \dot{I}_1(l) &= [\dot{I}'(l) - \eta_2 \dot{I}''(l)]; \\ \dot{U}_2(l) &= \frac{1}{1 - \eta_1 \eta_2} [\eta_2 \dot{U}'(l) + \dot{U}''(l)]; \\ \dot{I}_2(l) &= [-\eta_1 \dot{I}'(l) + \dot{I}''(l)]. \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}'(l) &= \dot{U}'(0) \operatorname{ch} k_1 l - \dot{I}(0) Z'_{B1} \operatorname{sh} k_1 l; \\ \dot{I}'(l) &= -\frac{1}{Z'_{B1}} \dot{U}'(0) \operatorname{sh} k_1 l + \dot{I}'(0) \operatorname{ch} k_1 l; \\ \dot{U}''(l) &= \dot{U}''(0) \operatorname{ch} k_2 l - \dot{I}''(0) Z'_{B2} \operatorname{sh} k_2 l; \\ \dot{I}''(l) &= -\frac{1}{Z'_{B2}} \dot{U}''(0) \operatorname{sh} k_2 l + \dot{I}''(0) \operatorname{ch} k_2 l. \end{aligned} \right\} (2) \quad (3.99)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}'(0) &= [\dot{U}_1(0) - \eta_1 \dot{U}_2(0)]; \\ \dot{I}'(0) &= \frac{1}{1 - \eta_1 \eta_2} [\dot{I}_1(0) + \eta_2 \dot{I}_2(0)]; \\ \dot{U}''(0) &= [-\eta_2 \dot{U}_1(0) + \dot{U}_2(0)]; \\ \dot{I}''(0) &= \frac{1}{1 - \eta_1 \eta_2} [\eta_1 \dot{I}_1(0) + \dot{I}_2(0)]. \end{aligned} \right\} (3)$$

$$Z'_{B1} = (1 - \eta_1 \eta_2) Z_{B1}; \quad (3.100)$$

$$Z'_{B2} = (1 - \eta_1 \eta_2) Z_{B2}. \quad (3.101)$$

Из соотношений (3.99), если их читать в порядке (3), (2), (1), следует, что приложенные к проводам в начале линии напряжения и токи $\dot{U}_1(0)$, $\dot{I}_1(0)$, $\dot{U}_2(0)$ и $\dot{I}_2(0)$ преобразуются в новые независимые переменные $\dot{U}'(0)$, $\dot{I}'(0)$, $\dot{U}''(0)$ и $\dot{I}''(0)$ в соответствии с формулами (3); эти новые независимые переменные передаются на выход линии по независи-

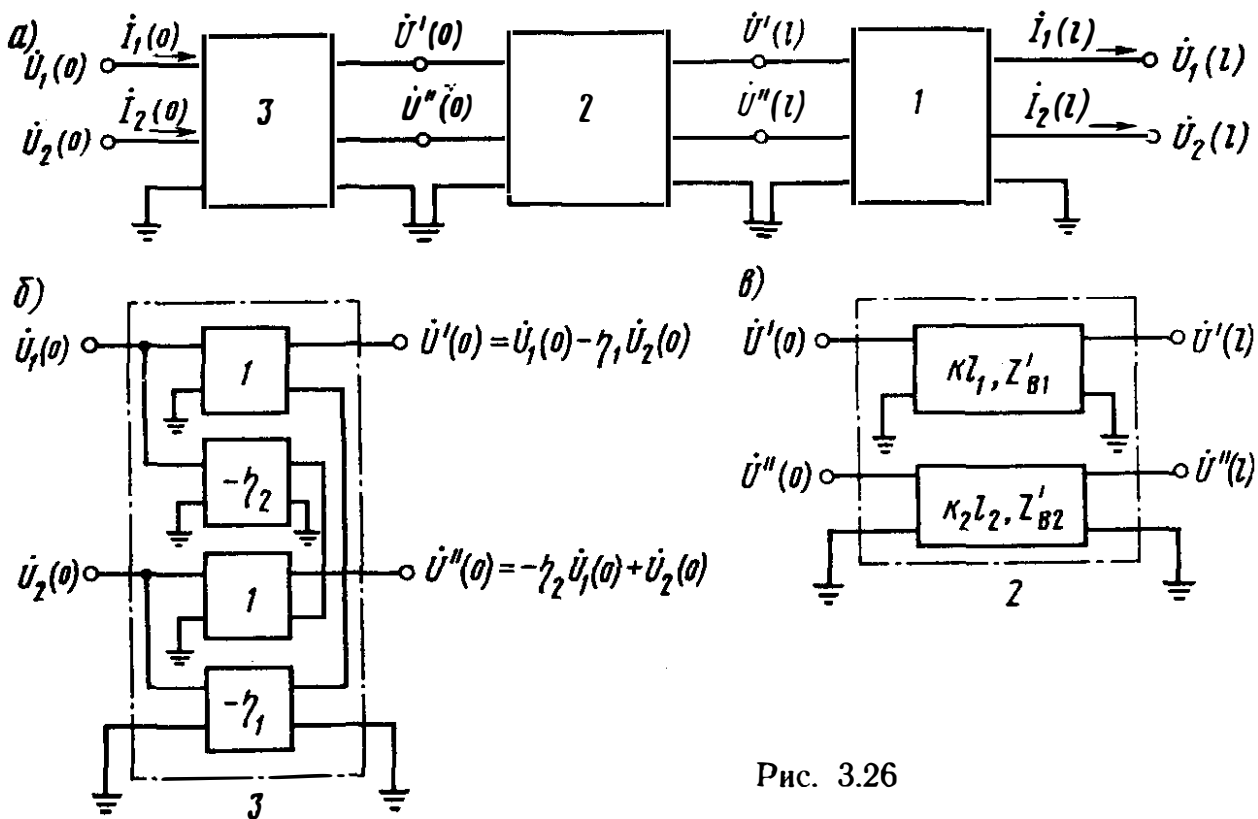


Рис. 3.26

мым трактам, характеризуемым постоянными передачи k_1 и k_2 и волновыми сопротивлениями Z'_{B1} и Z'_{B2} , превращаясь в величины $U'(l)$, $I'(l)$, $U''(l)$ и $I''(l)$ в соответствии с формулами (2); на выходе линии эти независимые переменные $U'(l)$, $U''(l)$, $I'(l)$ и $I''(l)$ вновь преобразуются в напряжения и токи проводов $U_1(l)$, $I_1(l)$, $U_2(l)$ и $I_2(l)$ в соответствии с формулами (1).

Схема замещения. В соответствии с выражениями (1), (2) и (3) соотношений (3.99) построена схема замещения двухпроводной линии над землей как 2 (2+1)-полюсника (рис. 3.26, а); структура 2 (2+1)-полюсников 1, 2, и 3 в свою очередь показана на рис. 3.26, б и в; 2(2+1)-полюсник 3 представляет собой соединение четырех трансформаторов с соответствующими коэффициентами трансформации; 2(2+1)-полюсник 2 есть два независимых четырехполюсника с общим заземлением; 2(2+1)-полюсник 1 — то же, что и 3, но включен в обратную сторону.

Таким образом, схема замещения несимметричной двухпроводной линии представляет собой схемы двух взаимосвязанных трактов передачи.

Симметричная двухпроводная линия над землей или в экране. Двухпроводную линию, провода которой расположены вблизи земли (проводящей поверхности) и имеют одинаковые параметры, называют симметричной.

В этом случае $Z_{11} = Z_{22}$, $Y_{11} = Y_{22}$, $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = -1$. Выражения, определяющие коэффициенты распространения волн и волновые сопротивления, упрощаются:

$$k_1 = \sqrt{(Z_{11} - Z_{12})(Y_{11} - Y_{12})}; \quad (3.102)$$

$$Z_{B1} = \sqrt{(Z_{11} - Z_{12}) / (Y_{11} - Y_{12})}. \quad (3.103)$$

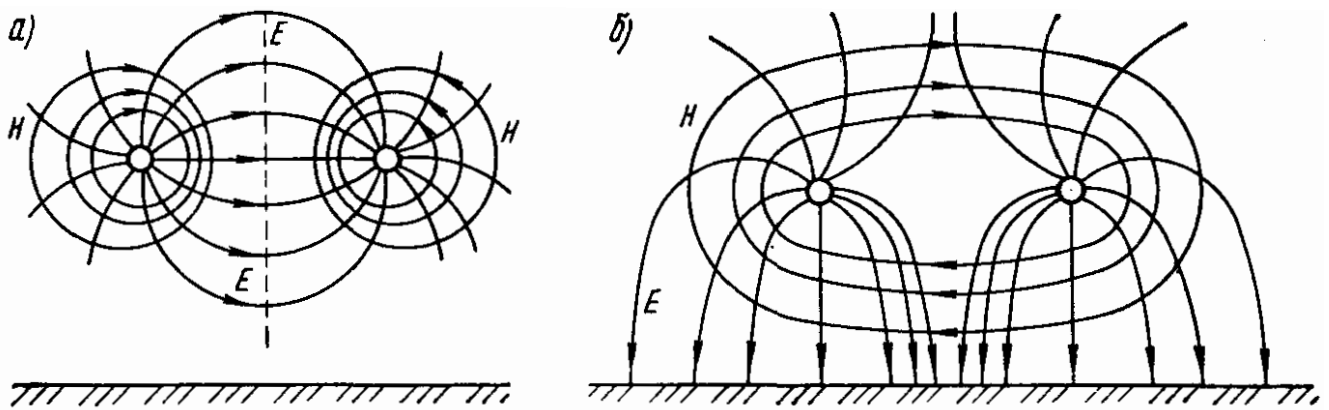


Рис. 3.27

Электрические и магнитные поля, соответствующие этому типу волн, связаны с проводами (фазами) линии. Сами волны поэтому принято называть **межпроводными** или **междуфазовыми** (рис. 3.27, а).

Сравнивая картину распределения векторов E и H с аналогичной картиной для уединенной двухпроводной линии (см. рис. 3.3, а), легко заметить, что это тот тип волн, которые существуют в уединенной линии. Эти волны вызваны симметричными напряжениями на входе линии. Для второго типа волн:

$$k_2 = \sqrt{(Z_{11} + Z_{12})(Y_{11} + Y_{12})}; \quad (3.104)$$

$$Z_{B2} = \sqrt{(Z_{11} + Z_{12}) / (Y_{11} + Y_{12})}. \quad (3.105)$$

Электрическое и магнитное поля, соответствующие этому типу волн, связаны с обоими проводами линии и землей (проводящей поверхностью) (рис. 3.27, б, сравним с рис. 3.3, б). Волны этого типа в случае воздушных линий принято называть **земляными**. Они появляются при приложении напряжения между обоими проводами линии и землей (проводящей поверхностью).

В общем случае, если не равны U_1 и U_2 или Z_{H1} и Z_{H2} , то в двухпроводной симметричной линии возникают волны обоих типов. Появление земляных волн в двухпроводных линиях связи крайне нежелательно, так как это ведет к увеличению взаимного влияния линий.

Так как междуфазовая и земляная волны в симметричной линии могут существовать одновременно и независимо друг от друга, их можно применять для одновременной передачи двух различных сигналов (рис. 3.28). Это свойство двухпроводных симметричных линий начали использовать в технике связи для одновременного телефонирования и телеграфирования задолго до разработки теории многопроводных линий. Тот же принцип реализован в рельсовых цепях на участках с электроотягой для отделения тягового тока от сигнального.

Напряжение в проводе электрически длинной двухпроводной симметричной линии, подвешенной над землей,

$$\begin{aligned} \dot{U}_1(x) = & \frac{1}{4} \{ [\dot{U}_1(0) - \dot{U}_2(0)] + Z_{B1} [\dot{i}_1(0) - \dot{i}_2(0)] \} e^{-k_1 x} + \\ & + \frac{1}{4} \{ [\dot{U}_1(0) + \dot{U}_2(0)] + Z_{B2} [\dot{i}_1(0) + \dot{i}_2(0)] \} e^{-k_2 x}. \end{aligned} \quad (3.106)$$

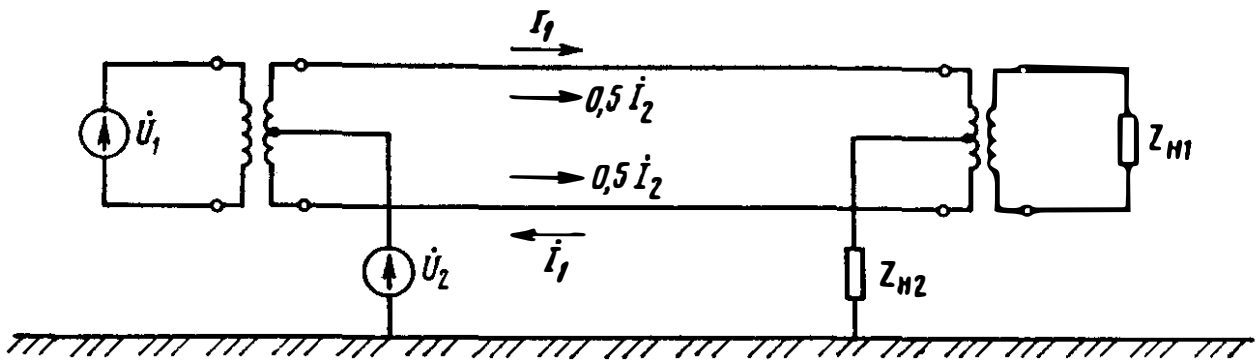


Рис. 3.28

Это выражение получено из формулы (3.98) подстановкой в нее значений $\eta_1 = 1$ и $\eta_2 = -1$.

Выражение для напряжения второго провода получается перестановкой индексов 1 и 2 у напряжений и токов выражения (3.106). В линии конечной длины амплитуды отраженных волн напряжения содержат разности $\{ \dot{U}(0) - ZI(0) \}$. Амплитуды токов во всех случаях отличаются от напряжений соответствующих волн множителем $1/Z_{Bi}$.

Если к двухпроводной симметричной линии приложены симметричные напряжения и нагрузки проводов одинаковы, то $\dot{U}_1 = -\dot{U}_2$ и $\dot{I}_1 = -\dot{I}_2$. При этом

$$\dot{U}_1 - \dot{U}_2 = 2\dot{U}_1; \quad \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 2\dot{I}_1; \quad \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 0; \quad \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 0. \quad (3.107)$$

Земляной волны в линии нет, так как ее амплитуда равна нулю. Из уравнения (3.98).

$$\dot{U}_1(x) = \frac{1}{2} [\dot{U}_1(0) + Z_{B1} \dot{I}_1(0)] e^{-k_1 x}. \quad (3.108)$$

Если $\dot{U}_1 = \dot{U}_2$ и $\dot{I}_1 = \dot{I}_2$, то междуфазовая волна отсутствует и имеется только земляная волна, при этом

$$\dot{U}_1(x) = \frac{1}{2} [\dot{U}_1(0) + Z_{B2} \dot{I}_1(0)] e^{-k_2 x}. \quad (3.109)$$

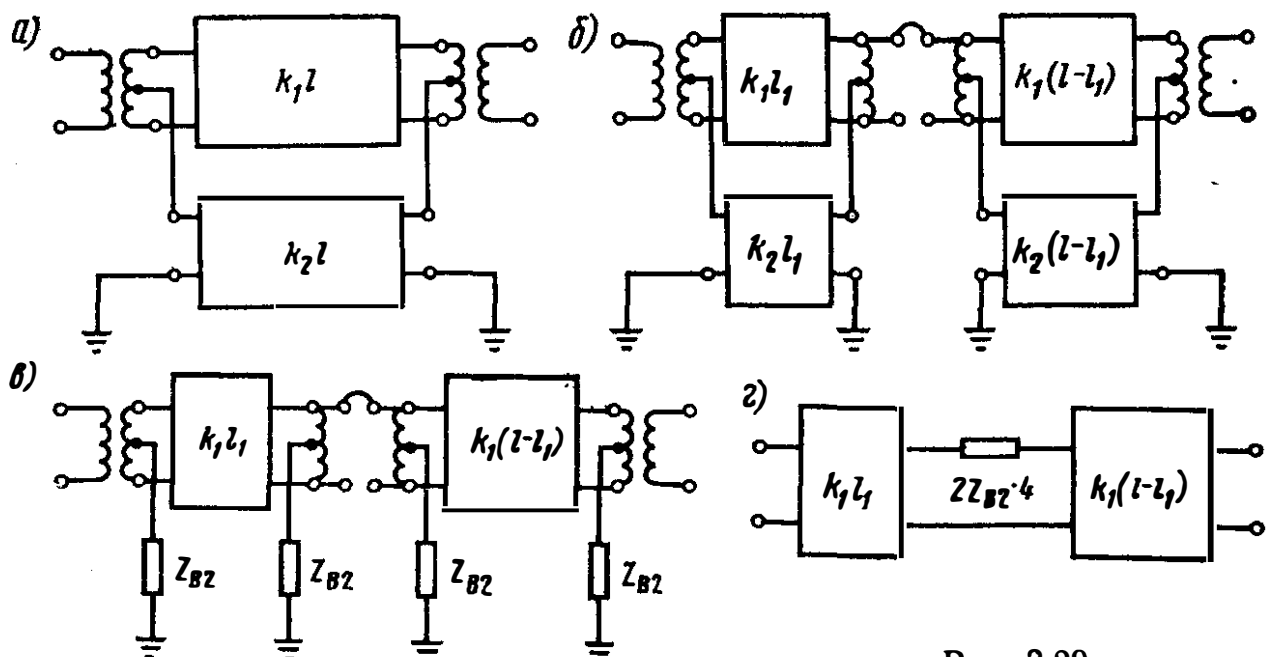


Рис. 3.29

Возможность существования волн второго типа в двухпроводной линии, расположенной над проводящей поверхностью земли, при обрыве одного из проводов линии не вызывает полного прекращения передачи энергии по ней.

Передача энергии в условиях обрыва одного провода. Если генератор и приемник включены между проводами двухпроводной цепи, а сама цепь уединена, то при обрыве одного из проводов передача энергии от генератора к приемнику прекращается полностью. При расположении цепи над землей или вблизи другой проводящей поверхности при обрыве одного из проводов передача энергии продолжается.

Для выяснения условий передачи энергии в этом случае удобно применить уравнения и схему замещения двухпроводной линии, рассмотренные выше. Допустим, что цепь симметричная, тогда ее схема замещения (см. рис. 3.26) при $\eta_1 = 1$ и $\eta_2 = -1$ преобразуется в схему, приведенную на рис. 3.28, которую можно составить иначе (рис. 3.29, а). Схема замещения линии с оборванным проводом приведена на рис. 3.29, б.

В большинстве практических случаев затухание тракта земляной волны $\operatorname{Re} k_2$ значительно больше затухания тракта межпроводной волны $\operatorname{Re} k_1$. Поэтому тракт земляной волны можно считать электрически длинным, передаваемой через него долей энергии можно пренебречь и заменить в схеме только входными сопротивлениями (рис. 3.29, в). Учитывая пересчет сопротивления автотрансформатором, получим эквивалентную схему передачи энергии по двухпроводной цепи (рис. 3.29, г). Последнюю схему можно применять для расчета условий передачи сигнала в аварийных случаях обрыва провода и расчета контрольного режима рельсовых цепей.

Глава 4

ЧАСТОТНЫЕ И ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦЕПЕЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

4.1. ВОЛНОВЫЕ ПАРАМЕТРЫ ЛИНИЙ ТЕЛЕМЕХАНИКИ И СВЯЗИ И ИХ ЧАСТОТНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ

Частотные характеристики волновых параметров линий. В устройствах железнодорожной телемеханики и связи широко применяют цепи с распределенными параметрами — проводные, кабельные и рельсовые линии.

В установившемся режиме гармонического переменного тока условия передачи электрической энергии по линии зависят от частоты тока. Это влияние проявляется в отклонении параметров R и L вследствие поверхностного эффекта и параметра G из-за изменения диэлектрических потерь. Сопротивление проводов или рельсов R и проводимость изоляции G с увеличением частоты тока растут, а индуктивность L уменьшается.

По линиям электропередачи передают электроэнергию с какой-нибудь одной частотой тока, по рельсовым цепям — с одной или несколькими фиксированными частотами тока в диапазоне от 25 до 500 Гц (в некоторых специальных видах рельсовых цепей используют и более высокие частоты); радиоантенны, питающие их фидеры и линии СВЧ работают в относительно узкой полосе частот.

По линиям проводной связи передают разнообразные сложные сигналы, содержащие токи с различными частотами. Сигналы, посылаемые по каждой линии связи, как правило, занимают совместно широкую полосу частот. По стальным цепям воздушных линий связи передают сигналы с частотами до 30 кГц, по цветным цепям — до 150 кГц, симметричным парам кабелей дальней связи — от 12 до 552 кГц и коаксиальным парам кабелей связи — от 60 кГц до 6 МГц и выше.

Условия передачи сигналов по линиям во многом зависят от их волновых параметров. Если цепь замкнута с обоих концов на согласованные сопротивления $Z_r = Z_n = Z_b$, то условия передачи полностью определяются выражениями (3.30):

$$\dot{U}(0) = \dot{U}(l) e^{\gamma l}; \quad \dot{i}(0) = \dot{i}(l) e^{\gamma l}; \quad \dot{U}(0)/\dot{i}(0) = \dot{U}(l)/\dot{i}(l) = Z_b,$$

т. е. значениями волновых параметров:

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta; \quad Z_b = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = |Z_b| e^{j\varphi_b} \quad (4.1)$$

Для расчета волновых параметров линий связи и установления зависимости их от частоты используют формулы (4.1), значения первичных параметров в которые подставляют с учетом зависимости их от частоты.

Общий характер изменения волновых параметров линий связи на примере цепи симметричного кабеля с жилами диаметром 1,2 мм иллюстрируется рис. 4.1, а и б и 4.2.

На рис. 4.1, а и б и рис. 4.2 приведены частотные зависимости соответственно километрического коэффициента затухания, фазовой скорости и модуля и аргумента волнового сопротивления. Так как провода существующих линий всех типов по конструктивным соображениям располагают по возможности близко друг к другу, то всегда выполняется неравенство $R/G > L/C$. Этим объясняется уменьшение модуля волнового сопротивления линий с увеличением частоты и отрицательный знак аргумента волнового сопротивления.

Поскольку емкость от частоты не зависит, а индуктивность уменьшается, изменение знака последнего неравенства с возрастанием частоты тока может произойти только вследствие изменения R и G в том случае, если увеличение проводимости изоляции G будет превышать рост сопротивления проводов R . При больших потерях в диэлектрике может быть $R/G < L/C$, и тогда угол волнового сопротивления будет положительным.

В рельсовых линиях емкостной составляющей проводимости изоляции можно пренебречь. С учетом этого их волновые параметры

$$Z_B = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G}}; \quad \gamma = \sqrt{(R + j\omega L)G}.$$

Поэтому аргумент волнового сопротивления рельсовых линий остается положительным во всем диапазоне частот. Модуль и аргумент Z_B , а также коэффициенты α и β рельсовой линии с увеличением частоты возрастают (рис. 4.3 и 4.4).

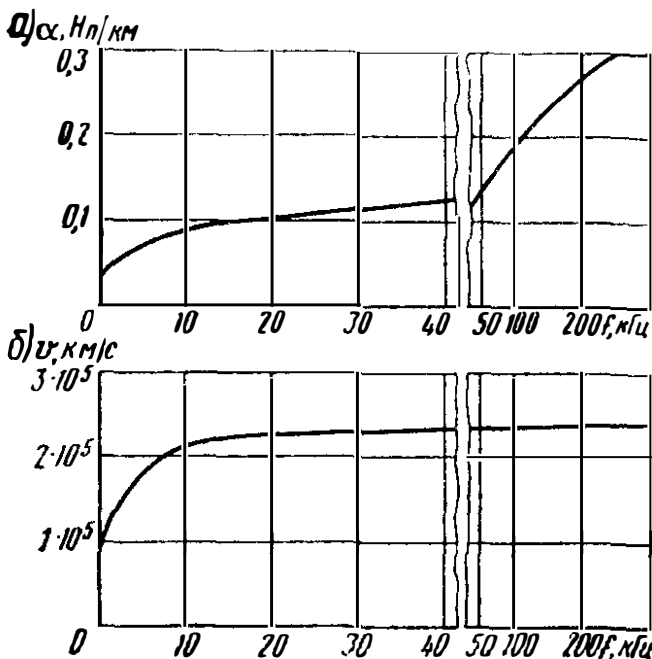


Рис. 4.1

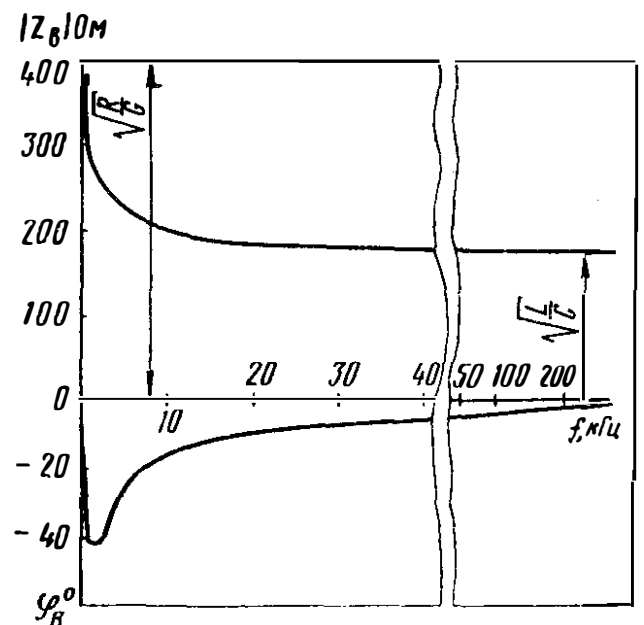


Рис. 4.2

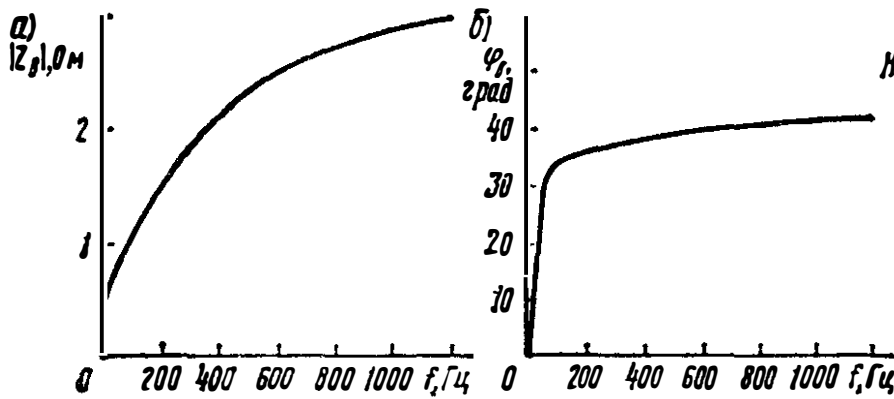


Рис. 4.3

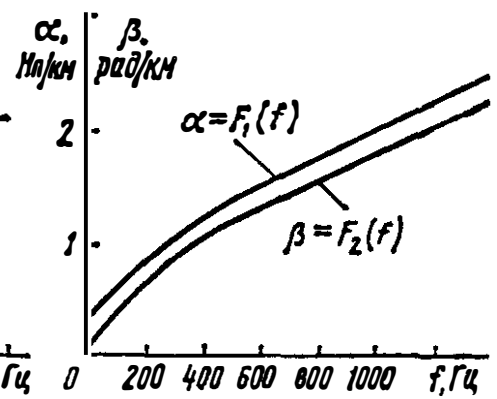


Рис. 4.4

Отличительной особенностью рельсовых линий является большая проводимость изоляции G (нормативное значение G для магистральных дорог равно 1 См/км). Поэтому рельсовые линии, несмотря на их относительно небольшую длину ($l \leq 2,6 \text{ км}$), относят к линиям с большими потерями, фазовая скорость распространения сигналов в которых значительно ниже скорости света и находится в пределах от 500 до 6500 км/с .

В общем случае аналитическое исследование частотных зависимостей волновых параметров линий связи и рельсовых линий затруднительно, и, как правило, используют их экспериментальные характеристики.

В отдельных случаях волновые параметры можно рассчитывать по более простым приближенным формулам. К таким случаям относятся:

1) вычисление параметров воздушных и кабельных цепей связи при условии, что $R \ll \omega L$ и $G \ll \omega C$. Здесь можно использовать приближенные формулы, полученные из равенств (4.1):

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{Z_B} + GZ_B \right); \quad (4.2)$$

$$\beta = \omega \sqrt{LC}; \quad (4.3)$$

$$Z_B = \sqrt{L/C}, \quad (4.4)$$

где α — километрический коэффициент затухания;
 β — километрический коэффициент фазы;
 Z_B — волновое сопротивление.

По формулам (4.2) — (4.4) следует рассчитывать параметры цветных цепей воздушных линий связи, работающих в диапазоне звуковых частот и выше, и параметры цепей симметричных кабелей при передаче по ним сигналов частотами порядка 50 кГц и выше;

2) вычисление параметров цепей симметричных кабелей связи, по которым передаются сигналы низкими частотами, когда $R \gg \omega L$ и $G \ll \omega C$. В этом случае

$$\gamma = \sqrt{j\omega RC}; \quad \alpha = \beta = \sqrt{\omega RC/2}; \quad Z_B = \sqrt{R/(j\omega C)};$$

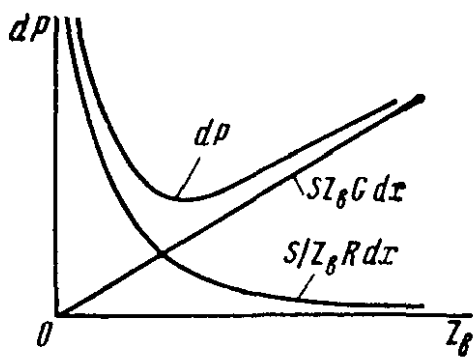


Рис. 4.5

3) вычисление параметров коаксиальных кабелей и высокочастотных параметров линий электропередачи, когда потери в изоляции значительно меньше потерь в проводах и имеет место сильный поверхностный эффект:

$$\alpha = \frac{R}{2Z_B} = \frac{RC}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \approx k\sqrt{f};$$

$$\beta = \omega\sqrt{LC} = \omega\sqrt{\mu\epsilon};$$

$$Z_B = \sqrt{L/C} = \sqrt{\mu\epsilon}/C;$$

4) вычисление параметров рельсовых линий при передаче по ним сигналов с относительно высокими частотами (выше 400 Гц), когда $R \ll \omega L$:

$$\gamma = \sqrt{j\omega LG}; \quad \alpha = \beta = \sqrt{\omega LG/2}; \quad Z_B = \sqrt{j\omega L/G}.$$

Следует подчеркнуть, что зависимости волнового сопротивления, затухания и фазовой скорости от частоты представляют собой крайне нежелательное явление, так как приводят к искажениям передаваемых по линиям сложных сигналов.

Условие минимума потерь в линии. Из соотношений (4.1) следует зависимость волновых параметров линии — километрического коэффициента затухания, километрического коэффициента фазы и волнового сопротивления — от ее первичных параметров. Выясним, какие должны быть значения индуктивности и емкости линии, чтобы при заданных активном сопротивлении R проводов и проводимости изоляции линии G километрическое затухание было наименьшим. Для этого определим мощность потерь в бесконечно малом элементе линии dx при прохождении по нему одиночной волны с напряжением \dot{U} и током I . Эти потери складываются из потерь в активном сопротивлении проводов $I^2 R$ и потерь, вызванных проводимостью изоляции, $U^2 G$.

Для участка dx первая часть потерь

$$I^2 R dx = \left| \frac{\dot{S}}{Z_B} \right| R dx,$$

где $\dot{S} = I^2 Z_B = \dot{U}^2 / Z_B$;

вторая часть потерь

$$\dot{U}^2 G dx = |\dot{S} Z_B| G dx.$$

Полная активная мощность потерь в элементе dx линии

$$dP = |\dot{S}| \left(\frac{R}{|Z_B|} + G |Z_B| \right) dx. \quad (4.5)$$

На рис. 4.5 приведена графическая иллюстрация выражения (4.5) как функции модуля волнового сопротивления. Мощность потерь как функции модуля волнового сопротивления имеет явно выраженный

минимум при потерях в сопротивлении, равных потерям, обусловленным проводимостью изоляции. Отсюда условие минимума потерь:

$$R/|Z_B| = G|Z_B|; \quad R/G = |Z_B|^2$$

или при

$$Z_B = \sqrt{L/C} \quad R/G = L/C.$$

Условие минимума потерь является в то же время и условием минимума затухания, так как затухание есть величина, характеризующая потери в логарифмическом масштабе.

Преобразовав формулу (4.1) и воспользовавшись условием минимума километрического затухания, получим

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \sqrt{RG} \left(1 + j \frac{\omega L}{R} \right),$$

отсюда затухание и километрический коэффициент фазы:

$$\alpha = \sqrt{RG}, \quad \beta = \omega \sqrt{LC}. \quad (4.6)$$

Согласно выражению (4.6) километрический коэффициент затухания α в данном случае зависит от частоты лишь косвенно, поскольку от нее зависит активное сопротивление проводов и проводимость изоляции.

Коэффициент фазы β при независимости индуктивности линии от частоты (что имеет место на высоких частотах) прямо пропорционален частоте; следовательно, фазовая скорость не является функцией частоты, как и в линиях без потерь. Соответствующий комплекс волнового сопротивления

$$z_B = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{R}{G}}$$

содержит только вещественную составляющую. Если первичные параметры линии удовлетворяют условию минимума потерь, то ее волновые параметры минимально зависят от частоты тока.

Для существующих типов воздушных и кабельных линий связи условие минимума затухания из-за конструктивных возможностей не выполняется. На кабельных линиях для уменьшения затухания иногда искусственно увеличивают индуктивность (пупинизация).

4.2. ЕДИНИЦЫ ЗАТУХАНИЯ И УРОВНИ СИГНАЛА

Единицы затухания. Если линия согласована и в ней имеются только падающие волны, то напряжения и токи в начале и конце линии связаны уравнениями (3.30), из которых следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\dot{U}(0)}{\dot{U}(l)} &= \frac{\dot{i}(0)}{\dot{i}(l)} = e^{\gamma l}; \quad \gamma l = \alpha l + j\beta l = \ln \left(\left| \frac{\dot{U}(0)}{\dot{U}(l)} \right| e^{j\beta l} \right) = \\ &= \ln \left(\left| \frac{\dot{i}(0)}{\dot{i}(l)} \right| e^{j\beta l} \right) = \ln \left| \frac{\dot{U}(0)}{\dot{U}(l)} \right| + j\beta l. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Приравнивая в формуле (4.7) действительные части, найдем, что

$$\alpha l = \ln \left| \frac{\dot{U}(0)}{\dot{U}(l)} \right| = \ln \left| \frac{i(0)}{i(l)} \right|. \quad (4.8)$$

Величину αl называют собственным затуханием линии. Эту величину можно выразить через мощности в начале линии $\dot{S}(0)$ и конце ее $\dot{S}(l)$:

$$\alpha l = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}(0)}{\dot{S}(l)} \right|.$$

Затухание в линии можно также рассчитать по системе десятичных логарифмов. В этом случае собственное затухание линии

$$\alpha l = \lg \left| \frac{\dot{S}(0)}{\dot{S}(l)} \right| = 2 \lg \left| \frac{\dot{U}(0)}{\dot{U}(l)} \right| = 2 \lg \left| \frac{i(0)}{i(l)} \right|. \quad (4.9)$$

Затухание в цепях автоматики, телемеханики и связи измеряют и рассчитывают в специальных единицах: децибелах (дБ), белах (Б) и неперах (Нп). Основной единицей затухания является децибел. Децибел — это затухание, при котором отношение мощности на входе линии к мощности на выходе ее равно 1,26. Собственное затухание линии в децибелах определяют по следующим формулам:

$$\alpha l = 10 \lg \left| \frac{\dot{S}(0)}{\dot{S}(l)} \right| = 20 \lg \left| \frac{\dot{U}(0)}{\dot{U}(l)} \right| = 20 \lg \left| \frac{i(0)}{i(l)} \right|.$$

Бел — это затухание, при котором мощность в начале линии больше мощности в конце ее в 10 раз. 1 Б в 10 раз превышает 1 дБ. Затухание в белах рассчитывают по формуле (4.9). Если отношение напряжений и токов на входе линии к этим же параметрам на ее выходе $e = 2,718$, то говорят о затухании 1 Нп. Затухание в неперах определяют по формулам (4.7) и (4.8).

Между децибелами и неперами существуют следующие соотношения: 1 дБ = 0,115 Нп, 1 Нп = 8,68 дБ.

Уровни напряжения, тока и мощности. Логарифмические единицы — бел, децибел и непер — вполне определяют отношение двух напряжений, двух токов или двух мощностей. Если задать определенные значения тока и мощности, то всякие другие значения этих величин можно измерить в логарифмических единицах относительно заданных. При этом число логарифмических единиц, показывающих, во сколько раз одна величина больше другой заданной, называют уровнем измеряемой величины. Уровни напряжений, токов и мощностей широко применяют в технике связи, и, в частности, это очень удобно при измерении затуханий. Если, например, задано напряжение 1 В, то уровень напряжения 2,718 В равен +1 Нп по отношению к 1 В, так как $\ln \frac{2,718}{1} = +1$. Уровень напряжения 0,1 В (0,1/1) равен — 20 дБ по отношению к напряжению 1 В, так как $20 \lg = -20$.

В приведенных примерах величины $+1$ Нп и -20 дБ называют относительными уровнями напряжений $2,718$ и $0,1$ В относительно напряжения 1 В. При использовании относительных уровней следует задавать величину, относительно которой идет отсчет. Понятие относительного уровня применимо к любой величине.

В технике многоканальной телефонной связи мощность 1 мВт, напряжение $0,775$ В и ток $1,29$ мА приняты за мощность, напряжение и ток нулевого уровня. Эти величины получаются в случае выделения мощности 1 мВт на сопротивлении 600 Ом.

Результат измерения мощности, напряжения или тока в логарифмических единицах по отношению к величинам нулевого уровня называют абсолютным уровнем измеряемых величин. Например, мощности 1 Вт соответствует абсолютный уровень мощности $+3,45$ Нп, так как $\frac{1}{2} \ln \frac{1000}{1} = +3,45$. Напряжение $7,75$ В имеет абсолютный уровень $+20$ дБ или $2,3$ Нп, так как $20 \lg \frac{7,75}{0,775} = +20$.

Если уровни измеряемых значений мощности, тока или напряжения больше значений соответствующих заданным для сравнения величинам, то абсолютный уровень этих величин положителен, в противном случае отрицателен.

Общие выражения для абсолютных уровней:
в неперах

$$\rho_U = \ln \frac{U}{0,775};$$

$$\rho_I = \ln \frac{I}{1,29 \cdot 10^{-3}};$$

$$\rho_S = \ln \frac{S}{1 \cdot 10^{-3}};$$

в децибелах

$$\rho_U = 20 \lg \frac{U}{0,775};$$

$$\rho_I = 20 \lg \frac{I}{1,29 \cdot 10^{-3}};$$

$$\rho_S = 10 \lg \frac{S}{1 \cdot 10^{-3}}.$$

Если напряжения и токи в начале и конце согласованной линии измеряют в уровнях, то собственное затухание линии, дБ,

$$\alpha l = \rho(0) - \rho(l) = 20 \lg \frac{U(0)}{0,775} - 20 \lg \frac{U(l)}{0,775} = 20 \lg \frac{U(0)}{U(l)}.$$

Уровень напряжения измеряют вольтметром, шкала которого градуирована в неперах или децибелах.

В несогласованных цепях связи при определении затухания возникает необходимость в расчете разности уровней мощности на входе и выходе цепи:

$$\rho_S(0) - \rho_S(l) = 10 \lg \frac{S(0)}{S(l)}.$$

Если учесть, что

$$S(0) = U^2(0)/Z_{вх}, \quad \text{а} \quad S(l) = U^2(l)/Z_{н},$$

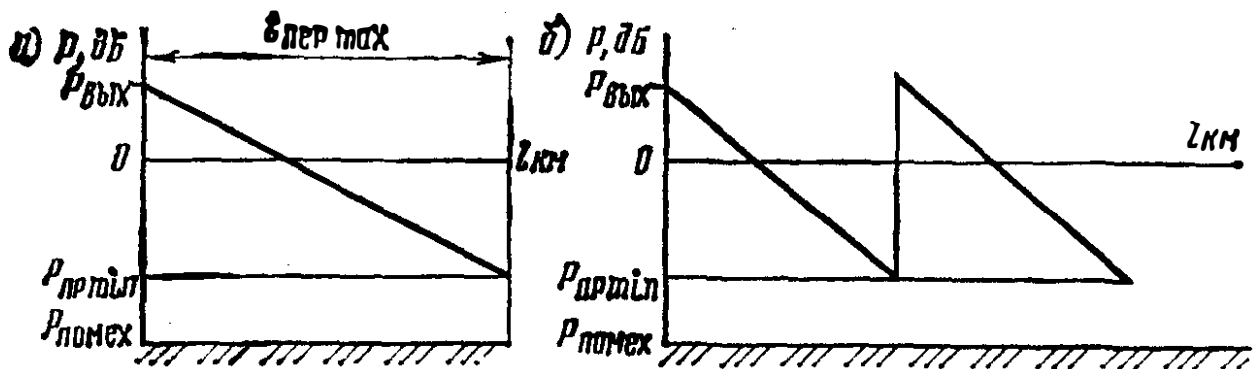


Рис. 4.6

где $Z_{вх}$ и $Z_{н}$ — соответственно входное сопротивление линии и сопротивление нагрузки, то

$$\rho_S(0) - \rho_S(l) = 10 \lg \frac{U^2(0)}{U^2(l)} \frac{Z_{н}}{Z_{вх}} = \left[20 \lg \frac{U(0)}{U(l)} + 20 \lg \sqrt{\frac{Z_{н}}{Z_{вх}}} \right].$$

Характеристика условий передачи узкополосного сигнала по однородной согласованной линии. Диаграмма уровня. Передача сигналов по линиям связи представляет собой случайный процесс, который с достаточной точностью можно считать стационарным и характеризовать спектром мощности.

Если по линии передаются сигналы, частотный спектр которых занимает относительно узкую полосу, в которой параметры линии на всех частотах остаются практически неизменными, то вместо передачи реального сигнала можно рассматривать передачу установившегося синусоидального напряжения (или тока) средней частоты.

Форма сигналов при передаче их по линиям связи меняется вследствие самого прохождения по линии и наложения на них посторонних напряжений и токов — помех. Передаваемые по линии синусоидальные напряжения и токи остаются синусоидальными и подвергаются затуханию, сдвигу фазы и воздействию помех.

Изменение мощности узкополосного (одночастотного) сигнала вдоль линии вследствие затухания и соотношение его с помехами отображают обычно диаграммой уровня. Характерный вид диаграммы уровня для линии без усилителей приведен на рис. 4.6, а, а для линии с усилителем — на рис. 4.6, б. Здесь $\rho_{вых}$ — выходной уровень. Его устанавливают обычно для различных систем передачи сигналов в пределах от +1,74 дБ (+0,2 Нп) до 17,4 дБ (+2 Нп), в отдельных случаях до 40 дБ (+4,6 Нп), что определяется в основном двумя соображениями: стремлением ограничить мощность выходных устройств передатчиков и уменьшить влияние на соседние цепи. $\rho_{пр\ min}$ — минимально допустимый уровень приема. Его значение определяется необходимым превышением уровня полезного сигнала над уровнем помех, при котором обеспечивается прием необходимой информации.

Необходимое превышение уровня сигнала над уровнем помех зависит от свойств приемника (его способности отличать сигнал от помехи) и вида помех. Помехи обычно подразделяют на шумы и переходные сигналы. В линиях, по которым передаются сиг-

налы с относительно низкими частотами (20—100 кГц), шумы являются следствием влияний со стороны различных промышленных и энергетических установок.

В линиях, сигналы в которых имеют более высокие частоты, уровень шумов значительно ниже и определяется тепловыми процессами в проводниках и элементах аппаратуры. Переходные сигналы есть следствие влияния параллельно идущих цепей такого же назначения. Шумы, обусловленные внешними влияниями, могут быть снижены экранированием цепей линии, а переходные сигналы — уменьшением связи между цепями.

Для каждой системы передачи сигналов задаваемой величиной является разность $\rho_{\text{вых}} - \rho_{\text{пр min}} = a$, определяющая допустимое затухание передачи. Эта величина зависит от диаметра проводов цепи и других ее конструктивных особенностей. По отношению $a/\alpha = l$ судят о дальности передачи сигналов данной частотой.

Если передаются сигналы несколькими частотами, то диаграмму уровня строят для наивысшей из них.

4.3. ПЕРЕДАЧА ПО ЛИНИИ ШИРОКОПОЛОСНЫХ СИГНАЛОВ. ИСКАЖЕНИЯ СИГНАЛОВ

Условия передачи сигнала, спектр которого занимает относительно узкую полосу частот, достаточно точно определяются условиями передачи одной средней частоты. Если же спектр сигнала занимает широкую полосу частот, в которой параметры линии α , β и $Z_{\text{в}}$ заметно изменяются, следует рассматривать условия передачи всех или наиболее важных частотных составляющих сигналов.

Для упрощения передаваемый сигнал удобно предположить периодическим. В этом случае его можно представить рядом Фурье. Сигнал в комплексной форме ряда Фурье

$$\dot{U}_0(t) = \sum_n \dot{U}_{\text{он}} e^{jn\omega_0 t}; \quad \omega_0 = 2\pi/T,$$

где $\dot{U}_{\text{он}}$ — амплитуда n -й гармоники напряжения сигнала, приложенного в начале линии, представленная вектором на комплексной плоскости.

Ток на входе линии также можно выразить суммой гармонических составляющих:

$$i_0(t) = \sum_n \frac{\dot{U}_{\text{он}}}{Z_{\text{вх}}(n\omega_0)} e^{jn\omega_0 t}.$$

Периодическую функцию при несущественных фазах частотных составляющих удобно изображать спектральной диаграммой (рис. 4.7). Последняя дает наглядное представление о распределении амплитуд гармоник по спектру частот. Спектральная диаграмма периодической функции заданной частоты содержит дискретные частотные составляющие, равно отстоящие по оси частот друг от друга на частоту основного колебания.

Для каждой пары величин $\dot{U}_{он}$ и $\dot{I}_{он} = \dot{U}_{он}/Z_{вх}(n\omega_0)$, являющихся гармоническими установившимися напряжением и током, напряжение и ток на выходе согласованной линии:

$$\dot{U}_{ин} = \dot{U}_{он} e^{-\gamma l}; \quad \dot{I}_{ин} = \dot{I}_{он} e^{-\gamma l},$$

где γ вычисляют на частоте $(n\omega_0)$.

Полные напряжения и ток в конце линии также можно представить суммой гармонических составляющих теми же частотами:

$$\dot{U}_i(t) = \sum_n \dot{U}_{ин} e^{jn\omega_0 t};$$

$$\dot{I}_i(t) = \sum_n \dot{I}_{ин} e^{jn\omega_0 t},$$

где $\dot{U}_{ин}$ — амплитуда гармоники напряжения сигнала на выходе линии;
 $\dot{I}_{ин}$ — амплитуда гармоники тока на выходе линии.

Напряжение и ток как функции времени:

$$u_i(t) = \text{Re } \dot{U}_i(t); \quad i_i(t) = \text{Re } \dot{I}_i(t).$$

Изложенный метод расчета условий передачи периодических сигналов позволяет полностью учесть свойства линии, но весьма громоздок из-за необходимости учитывать большое число гармоник.

В ряде случаев, например при изучении условий телефонной передачи, реальный сигнал аппроксимируется набором нескольких некротных составляющих. Для отображения речи используют, например, совокупность частот 300, 400, 600, 800, 1000, 1200, 1400, 1600, 2000, 2400 Гц. В таком случае условия передачи речи также изучают рассмотрением передачи различных ее составляющих.

Рассмотрим в качестве примера передачу по линии импульсных сигналов. Допустим, что импульсы посылаются непрерывно, так что процесс можно считать периодическим. Тогда напряжение сигнала $u(t)$ можно представить суммой гармонических составляющих (рис. 4.8). Следовательно, в этом случае вместо передачи по линии прерывистого напряжения (рис. 4.9, а) можно рассматривать передачу по ней суммы синусоидальных напряжений и постоянного тока (рис. 4.9, б).

Составляющие сигнала с разными частотами $0, \omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0$ и т. д. при передаче по линии ослабляются различно, получают неодинаковые фазовые сдвиги, а в случае несогласованной нагрузки — и отражения. Вследствие этого изменяются соотношения между амплитудами и фазами составляющих

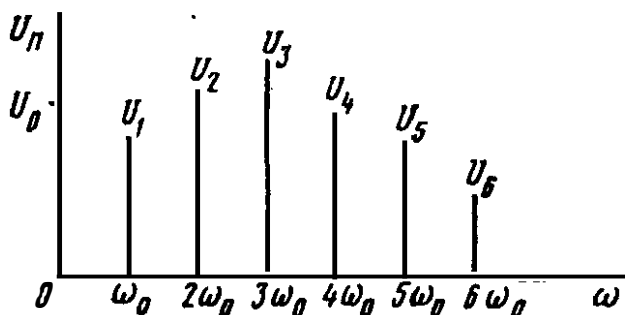


Рис. 4.7

сигнала в конце и начале линии. Поэтому при суммировании напряжения с частотами $0, \omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0$ и т. д. сигнал в конце линии отличается по форме от исходного.

Отличие формы временных зависимостей напряжений на выходе линии и ее входе есть искажение сигнала при передаче. Изменения в

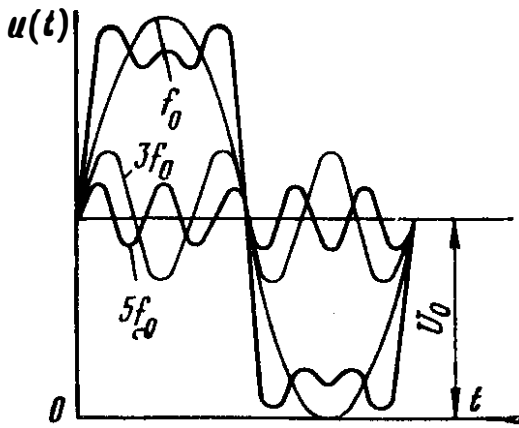


Рис. 4.8

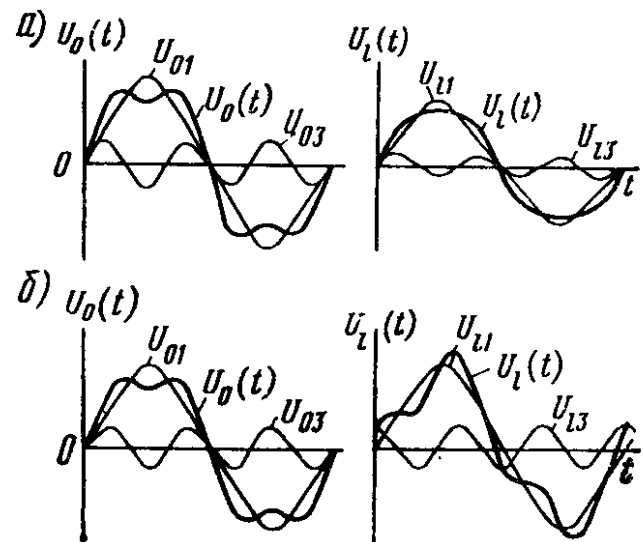


Рис. 4.10

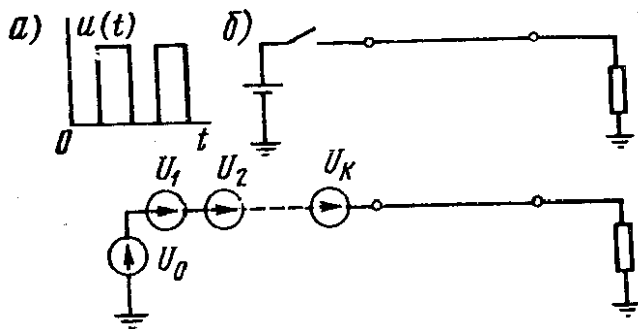


Рис. 4.9

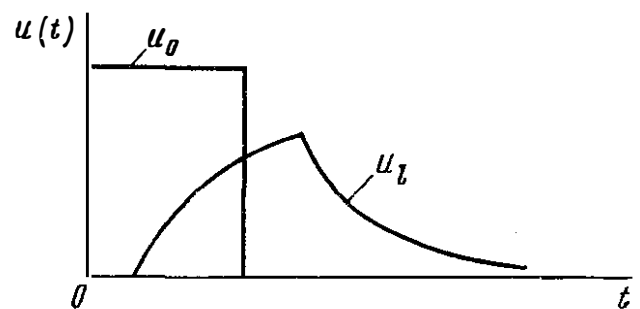


Рис. 4.11

форме сигнала, вызванные искажениями в линии для рассматриваемого случая передачи, показаны на рис. 4.10.

Различают искажения амплитудно- и фазочастотные. Амплитудно-частотными называют искажения, вызванные зависимостью затухания линий от частоты, приводящей к неодинаковому затуханию разных частотных составляющих (рис. 4.10, а). Фазочастотными называют искажения, связанные с зависимостью фазовой скорости от частоты, и, следовательно, с неодинаковым временем прохождения различных частотных составляющих сигнала (рис. 4.10, б). При передаче сигналов по цепям проводных линий связи одновременно присутствуют и накладываются друг на друга оба вида искажений. Общий характер искажения одиночного импульса, переданного по цепи кабельной линии связи, показан на рис. 4.11. Изменение формы импульса при передаче по линиям рассматривается подробнее в следующем параграфе.

Для неискаженной передачи по линии сигналов сложной формы необходимо, чтобы затухание линии, фазовая скорость, волновое сопротивление и сопротивление нагрузки не зависели от частоты. Фазовая скорость не зависит от частоты в линиях, километрический фазовый сдвиг которых прямо пропорционален частоте. В этом случае время прохождения $\tau_3 = d(\beta l)/d\omega$ для всех частотных составляющих оди-

наково. Практически этим условиям достаточно удовлетворяют параметры цветных цепей воздушных линий связи на высоких частотах ($f > 1000$ Гц) и параметры цепей широкополосных коаксиальных кабелей связи. Воздушные линии связи со стальными проводами и симметричные кабели связи вносят значительно большие амплитудно- и фазочастотные искажения.

Различные системы связи неодинаково относятся к искажениям сигналов. Так, например, ухо человека нечувствительно к фазочастотным искажениям звуковых колебаний и определяет смысловое содержание звукового колебания в основном по спектральному составу. Изменение амплитуд отдельных частотных составляющих звуковых колебаний ведет к новому смысловому содержанию речи. Поэтому при проектировании устройств телефонной связи принимают меры для возможного уменьшения амплитудно-частотных искажений. Отсутствие указанных искажений обеспечивает сохранение спектрального состава сигнала, но не формы кривой $u_0(t)$.

Рассмотренные нами искажения называют **линейными**. Они происходят в цепях, напряжения и токи в которых пропорциональны друг другу. В таких цепях, как мы видим, возможно различное изменение амплитуд и фаз частотных составляющих сигнала, но не могут появиться новые составляющие. Последние, кроме всего прочего, возможны в нелинейных цепях. Такие искажения называют **нелинейными**.

Для устранения линейных амплитудно- и фазочастотных искажений сигналов или уменьшения их до допустимого значения в тракт передачи цепочечно включают специальные четырехполюсные цепи — амплитудные и фазовые корректоры. Устройство и расчет последних рассматриваются далее.

4.4. ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОРОДНОЙ ЛИНИИ СВЯЗИ

В ряде случаев сигнал, передаваемый по линии, удобно изображать отдельными импульсами или интегралом наложения. Поскольку в линейных цепях импульс может быть заменен двумя единичными напряжениями противоположных знаков, включенных со сдвигом по времени (см. рис. 1.15), то достаточно рассмотреть передачу по линии единичного напряжения. Зная характер нарастания $u_l(t)$ и $i_l(t)$ при воздействии единичного напряжения на вход линии, можно судить об условиях передачи импульсных и других сигналов. Хотя при этом форма сигнала на входе максимально упрощена, задача остается еще весьма сложной и следует ввести упрощающие предположения относительно свойств линии. Во многих практически важных случаях, когда линия может считаться электрически короткой, расчет можно проводить по схеме замещения. В других случаях необходимое решение можно получить, если считать, что линия не имеет утечки тока ($G = 0$) и параметры R и L не зависят от его частоты. Эти допущения практически оправдываются при передаче сигналов, занимающих относительно узкую полосу в области низких частот.

При этих предположениях для согласованной линии из выражения (4.1) получаем:

$$Z_B = \sqrt{\frac{R + pL}{pC}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{p} \sqrt{p^2 + 2ap};$$

$$\gamma = \sqrt{(R + pL)pC} = \frac{1}{v} \sqrt{p^2 + 2ap},$$

где $v = 1/\sqrt{LC}$; $a = R/(2L)$.

Изображение напряжения на входе будет $U(p) = U_0 \frac{1}{p}$, а тока

$$i(p) = \frac{U_0}{pZ_B(p)} = \frac{U_0 \sqrt{C/L}}{\sqrt{p^2 + 2ap}}.$$

По табл. 1.1 операционных соотношений найдем:

$$\frac{1}{\sqrt{p^2 + 2ap}} \doteq e^{-at} J_0(jat).$$

Тогда

$$i_0(t) = U_0 \sqrt{C/L} e^{-\frac{R}{2L}t} J_0\left(j \frac{R}{2L}t\right). \quad (4.10)$$

Изображение тока на выходе

$$i_l(p) = \frac{U_0}{pZ_B} e^{-\gamma l} = \frac{U_0 \sqrt{C/L}}{\sqrt{p^2 + 2ap}} e^{-\frac{l}{v} \sqrt{p^2 + 2ap}}.$$

По табл. 1.1

$$\frac{1}{\sqrt{p^2 + 2ap}} e^{-\tau_0 \sqrt{p^2 + 2ap}} \doteq e^{-at} J_0(ja \sqrt{t^2 - \tau_0^2}); \quad t > \tau_0 = \frac{l}{v}.$$

Следовательно,

$$i_l(t) = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\frac{R}{2L}t} J_0\left(j \frac{R}{2L} \sqrt{t^2 - \frac{l^2}{v^2}}\right); \quad t > \frac{l}{v}. \quad (4.11)$$

Как видно, ток в конце линии изменяется по тому же закону, что и в начале ее, однако в конце линии он появляется только по прошествии времени $\tau_0 = l/v$, необходимого на прохождение волной расстояния l .

Формулы (4.10) и (4.11) отображают процессы, происходящие в линиях, весьма приближенно, так как они получены в предположении, что $R_r = 0$, $G = 0$, а параметры R и L приняты не зависящими от p , т. е. от частоты, что можно считать справедливым только в узком диапазоне частот. Формула (4.11) дает для линий различных длины и затухания неодинаковый характер нарастания тока (рис. 4.12, а). В различных точках реальных линий благодаря появляющемуся искаже-

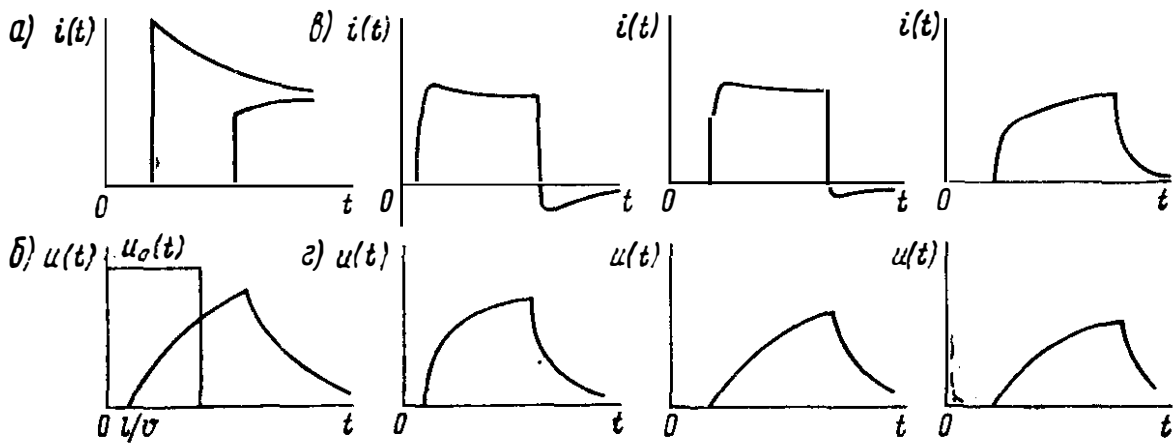


Рис. 4.12

нию формы волны ток возникает не толчком [см. выражение (4.11)], а нарастает плавно.

Если постоянное напряжение включается и выключается через короткие интервалы времени, то получающиеся импульсы содержат значительное число частотных составляющих и предположение о независимости параметров линии от частоты делается практически неприемлемым. В этом случае необходимое решение можно получить подходящей аппроксимацией частотных зависимостей волновых параметров линии.

Частотные зависимости волновых параметров цепей воздушных и кабельных линий связи при $Z_B = \sqrt{L/C}$ в ряде случаев достаточно точно аппроксимируются выражениями:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha \sqrt{\omega}; \quad \beta = \frac{\omega}{v} + \alpha \sqrt{\omega}.$$

С этими выражениями частотных зависимостей α и β , справедливых при незначительных потерях в изоляции, и в предположении, что $R = k\sqrt{f}$, имеем:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \alpha_0 + \alpha \sqrt{\omega} + j \frac{\omega}{v} + j\alpha \sqrt{\omega};$$

$$\gamma(p) = \alpha_0 + \alpha \sqrt{p/j} + (p/v) + \alpha \sqrt{j p} = \alpha_0 + (p/v) + \sqrt{2} \alpha \sqrt{p},$$

так как

$$\alpha \sqrt{p/j} + \alpha \sqrt{j p} = \alpha \sqrt{p} \left(\frac{1}{\sqrt{j}} + \sqrt{j} \right) = \alpha \sqrt{p} \sqrt{2}.$$

Для согласованной линии при напряжении на входе U_0/p :

$$U_l(p) = \frac{1}{p} U_0 e^{-\gamma l} = \frac{1}{p} U_0 e^{-\left(\alpha_0 + \frac{p}{v} + \sqrt{2} \alpha \sqrt{p}\right) l};$$

$$F(p) = \frac{U_l(p)}{U_0(p)} = \frac{1}{p} e^{-\alpha_0 l} e^{-\frac{p}{v} l} e^{-\sqrt{2} \alpha \sqrt{p} l}.$$

Найдем

$$L^{-1} [F(p)].$$

На основании свойств L -преобразований первый множитель в выражении $F(p)$ выносится за знак преобразования как не зависящий от p . Второй множитель на основании теоремы о сдвиге дает сдвиг по оси t на l/v , что соответствует запаздыванию сигнала.

Третий множитель имеет табличный оригинал (см. табл. 1.1):

$$\frac{1}{p} e^{-\lambda \sqrt{p}} = 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\lambda}{2 \sqrt{t}} \right).$$

Таким образом, окончательное решение будет:

$$H(t) = \frac{U_l(t)}{U_0(t)} = e^{-\alpha_0 l} \left(1 - \operatorname{erf} \frac{\alpha l}{\sqrt{2} \sqrt{t - \frac{l}{v}}} \right). \quad (4.12)$$

Для функции $\operatorname{erf}(z) = \Phi(z)$, называемой интегралом вероятности, составлены специальные таблицы.

Решение (4.12), как и (4.11), предполагает согласованность нагрузки линии, т. е. такую же, как у Z_B , зависимость сопротивления приемника от параметра p (частоты). Практически неточность согласования наиболее проявляется в области относительно низких частот, в которой изменение волнового сопротивления в зависимости от частоты происходит наиболее резко. Поэтому для получения более верной зависимости по формуле (4.12) в качестве $\alpha_0 l$ в последнюю следует подставлять затухание цепи, измеренное на постоянном токе, независимо от того, какое значение α_0 было использовано при аппроксимации α . Это значит, что в формулу (4.26) вместо множителя $e^{-\alpha_0 l}$ следует подставлять отношение $R_n / (R_l + R_n)$, где R_n — сопротивление нагрузки, а R_l — сопротивление проводов линии.

Характер изменения напряжения на согласованном с линией приемнике при включении и выключении напряжения на входе линии, рассчитанное по формуле (4.12), иллюстрируется рис. 4.12, б. На этом рисунке напряжение на входе линии $u_0(t)$ показано таким, каким его практически вырабатывает генератор, нагруженный на активное не зависящее от частоты сопротивление. При подключении к генератору линии, входное сопротивление которой зависит от частоты (на низких частотах оно больше), форма импульса на входе изменяется тем в большей степени, чем выше внутреннее сопротивление генератора (меньше его мощность), причем формы импульсов напряжения и тока искажаются по-разному. В импульсе напряжения составляющие низких частот подчеркиваются, в импульсе тока подавляются.

Практически наблюдаемые формы импульсов напряжения, передаваемых по кабелю, иллюстрируются рис. 4.12, в. Здесь ряд осциллограмм показывает изменение формы импульса напряжения от входа к середине линии и ее концу. На рис. 4.12, г показано изменение формы импульса тока. Если сопротивление приемника активно, то формы импульсов напряжения и тока на выходе линии совпадают.

4.5. РАБОЧИЕ ПАРАМЕТРЫ ПЕРЕДАЧИ ОДНОРОДНОЙ ЛИНИИ СВЯЗИ

Волновые параметры линии (волновое сопротивление, собственное затухание и фазовый сдвиг) определяют условия передачи сигналов по линии, если последняя замкнута на согласованную нагрузку и в ней отсутствуют отраженные волны. При несогласованной нагрузке в линии в общем случае имеют место отраженные волны, возрастают потери, а отношение напряжения к току уже не определяется величиной $Z_{\text{в}}$. Условия передачи сигналов по несогласованно нагруженной линии определяются уравнениями (3.25), (3.26), которые значительно сложнее уравнений (3.30) согласованной линии. Для расчета условий передачи по линиям и рельсовым цепям сильного тока, когда вычисления необходимо провести для одной частоты, можно пользоваться уравнениями (3.25), (3.26) или их разновидностями.

При расчете по этим уравнениям условий передачи сигналов по линии связи потребовались бы те же громоздкие вычисления для ряда частот. Для упрощения расчетов вводят рабочие параметры передачи линии и рассматривают зависимость их от частоты. К наиболее часто используемым рабочим параметрам линии связи относят ее входное сопротивление и рабочую постоянную передачи.

Входное сопротивление линии измеряют отношением полного напряжения на ее входе к полному току:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}(0)}{\dot{i}(0)} = \frac{\dot{U}_{\text{пад}} + \dot{U}_{\text{отр}}}{\dot{i}_{\text{пад}} - \dot{i}_{\text{отр}}} = Z_{\text{в}} \frac{1 + \eta e^{-2\gamma l}}{1 - \eta e^{-2\gamma l}}. \quad (4.13)$$

Входное сопротивление определяет нагрузку, создаваемую линией питающему ее генератору. Это важнейшая характеристика работы генератора.

Входное сопротивление согласованной линии

$$Z_{\text{вх}} = \dot{U}(0) / \dot{i}(0) = Z_{\text{в}} = \dot{U}_{\text{пад}} / \dot{i}_{\text{пад}}$$

равно волновому, так как в этой линии есть только падающие волны и нет отраженных, $\eta = 0$.

Входное сопротивление электрически длинной линии

$$Z_{\text{вх}} = \dot{U}(0) / \dot{i}(0) = Z_{\text{в}} = \dot{U}_{\text{пад}} / \dot{i}_{\text{пад}}.$$

Эта величина равна волновому сопротивлению линии, так как в данном случае в начале линии нет отраженных волн $|e^{-2\gamma l}| \rightarrow 0$, а в падающей волне отношение напряжения к току неизменно по всей длине линии и равно волновому сопротивлению.

Входное сопротивление линии в общем случае сложно и зависит от многих факторов: параметров линии $Z_{\text{в}}$ и γ , в свою очередь зависящих от частоты тока, длины линии l и сопротивления нагрузки $Z_{\text{н}}$, входящего в формуле (4.13) в коэффициент отражения. Рассмотрим сначала некоторые частные случаи.

Короткое замыкание на конце линии:

$$Z_H = 0; \quad \eta = \frac{Z_H - Z_B}{Z_H + Z_B} = -1;$$

$$Z_{BX} = Z_{K3} = Z_B \frac{1 - e^{-2\gamma l}}{1 + e^{-2\gamma l}} =$$

$$= Z_B \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}} = Z_B \operatorname{th} \gamma l. \quad (4.14)$$

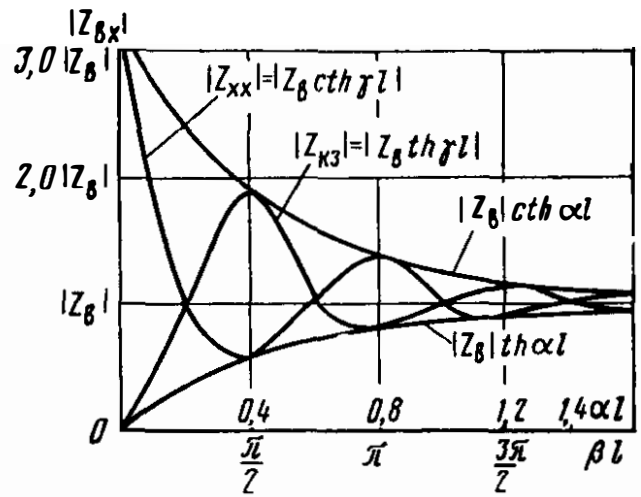


Рис. 4.13

При холостом ходе на конце линии, когда $Z_H = \infty$; $\eta = \frac{Z_H - Z_B}{Z_H + Z_B} = 1$;

$$Z_{BX} = Z_{XX} = Z_B \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}} = Z_B \operatorname{cth} \gamma l. \quad (4.15)$$

Характер изменения модуля входного сопротивления линии для двух предельных значений Z_H при изменении длины линии, вызывающем изменение аргумента γl , показан на рис. 4.13, где αl и βl условно отложены на одной и той же оси. Аналогична и частотная зависимость Z_{BX} . Следует, однако, иметь в виду, что $|Z_B|$ с увеличением частоты уменьшается.

В общем случае конечного Z_H

$$Z_{BX} = Z_B \frac{1 + \eta e^{-2\gamma l}}{1 - \eta e^{-2\gamma l}}.$$

Подставим в эту формулу выражение $\eta = \frac{Z_H - Z_B}{Z_H + Z_B}$ и преобразуем его:

$$Z_{BX} = Z_B \frac{Z_H (e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}) + Z_B (e^{\gamma l} - e^{-\gamma l})}{Z_H (e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}) + Z_B (e^{\gamma l} + e^{-\gamma l})}.$$

Разделим далее числитель и знаменатель дроби на $Z_B (e^{\gamma l} + e^{-\gamma l})$:

$$Z_{BX} = Z_B \frac{(Z_H/Z_B) + \operatorname{th} \gamma l}{1 + (Z_H/Z_B) \operatorname{th} \gamma l}.$$

Обозначая отношение $Z_H/Z_B = \operatorname{th} n$ и имея в виду формулу $\operatorname{th} (x + y) = \operatorname{th} x + \operatorname{th} y (1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y)$, получим

$$Z_{BX} = Z_B \operatorname{th} (\gamma l + n).$$

Входное сопротивление нагруженной, но не согласованной линии изменяется по тому же закону, что и входное сопротивление короткозамкнутой или разомкнутой линии, но в меньших пределах. График изменения входного сопротивления нагруженной линии приближается к графику Z_{K3} , если $Z_H < Z_B$, и к графику Z_{XX} , если $Z_H > Z_B$.

Сложное и весьма нежелательное волнообразное изменение входного сопротивления в зависимости от длины линии и частоты объясняется наличием в линии падающих и отраженных волн. Если фазы напряжений падающей и отраженной волн на входе линии совпадают, то получается максимум полного напряжения и соответственно максимум входного сопротивления. При другой длине линии на ее входе могут совпадать фазы токов. Тогда получается максимум полного тока и минимум входного сопротивления. Фазы напряжений и токов могут совпадать не только на входе, а и в других различных точках линии, так как в падающей волне $\dot{U}_{\text{пад}}$ и $\dot{I}_{\text{пад}}$ сдвинуты по фазе на угол $\varphi_{\text{Р}}$, а в отраженной волне — на угол $\varphi_{\text{В}} + 180^\circ$. Ток отраженной волны вычитается из тока падающей волны, напряжения же складываются.

В коротких линиях (при малых значениях собственного затухания αl) амплитуды отраженных волн на входе линии соизмеримы с амплитудами падающих волн, и поэтому в результате их суммирования в зависимости от фазовых соотношений получаются резко отличные полные значения напряжения и тока.

В длинных линиях (т. е. при больших значениях αl) амплитуды отраженных волн на входе линии малы по сравнению с амплитудами падающих волн и незначительно влияют на полные значения напряжения и тока. Этим объясняется то обстоятельство, что с увеличением l границы изменений входного сопротивления сужаются.

Если не учитывать волновых процессов в линии и подойти к оценке сопротивления линии с точки зрения ТЛЭЦ с сосредоточенными параметрами, то можно было бы предположить, что сопротивление между входными зажимами линии растет с увеличением ее длины. В действительности (см. рис. 4.13) с возрастанием длины линии ее входное сопротивление то растет, то снижается в зависимости от фазовых соотношений напряжений и токов падающих и отраженных волн.

Наиболее ярко волновой характер процессов в линии проявляется при рассмотрении входного сопротивления линии с малыми потерями, длина которой $l = \lambda/4$, где λ — длина волны. В этом случае при разомкнутых выходных зажимах линии

$$Z_{\text{xx}} = Z_{\text{В}} \operatorname{cth} \gamma l = Z_{\text{В}} \operatorname{cth} j\beta l = -j \sqrt{L/C} \operatorname{ctg} \beta l = -j \sqrt{L/C} \operatorname{ctg} \omega \frac{l}{v};$$

при $l = \lambda/4$, $\beta l = \pi/2$, $Z_{\text{xx}} = -j \sqrt{L/C} \operatorname{ctg} (\pi/2) = 0$.

Этот результат означает, что на входе линии падающие и отраженные волны одинаковы по амплитудам. Фазовые их соотношения таковы, что напряжения взаимно уничтожаются, а токи складываются. Таким образом, в линии при отсутствии напряжения на входе проходит ток.

При замкнутых накоротко выходных зажимах этой линии ее входное сопротивление

$$Z_{\text{кз}} = Z_{\text{В}} \operatorname{th} \gamma l = Z_{\text{В}} \operatorname{th} j\beta l = j \sqrt{L/C} \operatorname{tg} \beta l = j \sqrt{L/C} \operatorname{tg} \omega \frac{l}{v};$$

при $l = \lambda/4$, $\beta l = \pi/2$, $Z_{\text{кз}} = j \sqrt{L/C} \operatorname{tg} \pi/2 = \infty$.

В этом случае в начале линии токи падающей и отраженной волн взаимно уничтожаются и полный ток на входе линии равен нулю, несмотря на наличие напряжения.

Входное сопротивление короткозамкнутой или разомкнутой линии без потерь чисто реактивно и с изменением частоты при $\beta l = \omega \sqrt{LC}l = \pi/2$ обращается соответственно в ∞ или 0. Таким образом, четверть-волновые отрезки линии подобны резонансным контурам.

Эти свойства входного сопротивления линии находят практическое применение в технике связи. Так, например, короткие отрезки линий с малыми потерями, имеющие на высоких частотах в режимах короткого замыкания и холостого хода чисто реактивные сопротивления, используют в фильтрах.

В рельсовых линиях вследствие высокой проводимости изоляции затухание велико и даже на низких частотах (50—75 Гц) их следует относить к линиям с большими потерями. Поэтому волновой характер процессов в рельсовых линиях, в частности изменение входных сопротивлений, выражен в меньшей степени, чем в линиях связи.

Иногда резонансные свойства входных сопротивлений линии ведут к нежелательным явлениям. Если напряжение в линиях электропередачи или тяговых проводах электрифицированных железных дорог содержит гармоники, то при совпадении частот отдельных из них с резонансными частотами входных сопротивлений амплитуды этих гармоник резко возрастают.

Часто применяют схему передачи сигналов из многих пунктов с источником тока на приемном конце (рис. 4.14). Замыкание ключа на одном из пунктов меняет режим работы линии с холостого хода на режим короткого замыкания и соответственно входное сопротивление линии в пункте приема. В результате изменения последнего параметра через обмотку реле К, принимающего сигналы, начинает проходить другой ток. Параметры такой линии рассчитывают по формулам (4.14) и (4.15).

При передаче сигналов по рассматриваемой схеме можно столкнуться с крайне неприятным проявлением волновых процессов в линиях. Действительно, из графиков (см. рис. 4.13) видно, что замыкание ключа, расположенного от приемного реле на расстоянии четверти или половины волны, резко меняет входное сопротивление линии и ток в реле. Если это расстояние составляет одну восьмую или три восьмых длины волны, то замыкание ключа на условия работы реле не сказывается.

Рабочая постоянная передача линии, как всякого симметричного четырехполюсника, определяется выражением

$$g_{\text{раб}} = \ln \frac{Z_{\text{прив}}}{2 \sqrt{Z_{\Gamma} Z_{\text{н}}}} = a_{\text{раб}} + j b_{\text{раб}},$$

где $a_{\text{раб}}$ — рабочее затухание линии;
 $b_{\text{раб}}$ — рабочий фазовый коэффициент.

Собственное затухание линии характеризует отношение напряжений или токов в начале и конце согласованно нагруженной линии. Если линия не согласована с нагрузкой, то часть электрической энер-

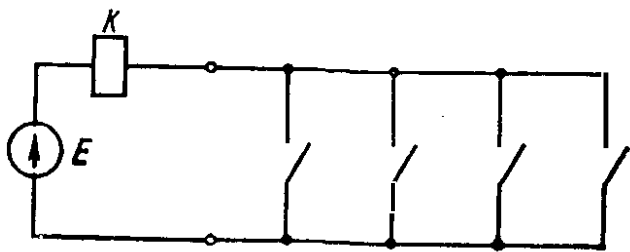


Рис. 4.14

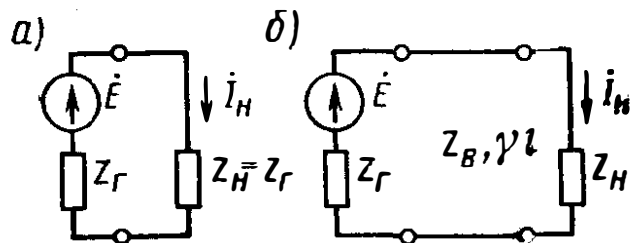


Рис. 4.15

гии, подходящей к ее концу, отражается и возвращается к генератору, частично рассеиваясь вдоль линии. Для отраженной волны нагрузкой линии является сопротивление подключенного к ней генератора.

Многократный пробег волн вдоль линии с несогласованными нагрузками на обоих концах приводит к дополнительному рассеиванию энергии, т. е. к дополнительному затуханию. В теории телефонной передачи потери мощности в линии принято характеризовать *рабочим затуханием* линии. Эту характеристику с успехом можно применить и при оценке условий передачи телемеханических сигналов:

$$a_{\text{раб}} = \ln \left| \frac{Z_{\text{прив}}}{2 \sqrt{Z_r Z_H}} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_l} \right|, \quad (4.16)$$

где $\dot{S}_0 = i_H^2 Z_H = \frac{E^2}{4Z_r}$ — мощность, которая может быть получена от генератора сопротивлением R_r , развивающего э. д. с. E , на непосредственно подключенном и согласованном с ним приемнике (рис. 4.15, а);

$\dot{S}_l = i_H^2 Z_H$ — мощность, поступающая к приемнику с сопротивлением Z_H через систему передачи (рис. 4.15, б).

Рассмотрение мощностей при оценке условий передачи сигналов по несогласованной линии обусловлено тем обстоятельством, что при наличии помех в линии и использовании помехоустойчивых методов приема успех борьбы с помехами определяется отношением мощности сигнала к мощности помехи, которое должно быть как можно больше.

В волновой трактовке \dot{S}_0 — мощность волны, падающей на вход линии; \dot{S}_l — мощность волны, выходящей из линии и поглощаемой приемником.

Как следует из выражения (4.16), рабочее затухание линии измеряется половиной натурального логарифма модуля отношения мощности, которую отдал бы генератор согласованному с ним приемнику, к мощности, которую он отдает приемнику с сопротивлением Z_H через систему передачи с параметрам Z_B и γl .

Рабочее затухание является характеристикой не только линии, но и всей системы передачи: генератор — линия — приемник. Его вычисление заменяет собой расчет условий передачи по уравнениям линии.

Для расчета рабочего затухания по формуле (4.16) при заданных E , Z_r , γl , Z_B , Z_H найдем i_H . Рассмотрим распространение тока по несогласованной линии (рис. 4.16). Представим себе, что в некоторый мо-

мент к линии с волновым сопротивлением Z_B подключают генератор с сопротивлением Z_r и э. д. с. \dot{E} . В этот момент в линии возникает падающая волна тока $\dot{I}_{пад}$. Так как в этот момент в линии отраженных волн еще нет, то и входное сопротивление равно волновому.

Ток падающей волны $\dot{I}_{пад} = \dot{E} / (Z_r + Z_B)$.

К концу линии волна тока приходит затухшей с измененной фазой. Ее амплитуда и фаза

$$\dot{I}_{пад} e^{-\gamma l} = \frac{\dot{E}}{Z_r + Z_B} e^{-\gamma l}.$$

Если линия замкнута на несогласованную нагрузку ($Z_H \neq Z_B$), то в конце линии возникает отраженная волна тока:

$$\dot{I}_{отр} = \dot{I}_{пад} e^{-\gamma l} \eta_l,$$

где $\eta_l = \frac{Z_H - Z_B}{Z_H + Z_B}$ — коэффициент отражения в конце линии.

Ток в нагрузке при этом равен разности токов падающей и отраженной волн:

$$\dot{I}_{нагр} = \dot{I}_{пад} e^{-\gamma l} (1 - \eta_l).$$

Отраженная волна тока $\dot{I}_{пад} e^{-\gamma l} \eta_l$ распространяется по линии от ее конца к началу. Вследствие наличия затухания и фазового сдвига в начале линии отраженная волна тока

$$\dot{I}_{пад} e^{-2\gamma l} \eta_l.$$

Как отмечалось, нагрузочным сопротивлением для отраженной волны, пришедшей на вход линии, является сопротивление генератора. Если последнее не равно волновому сопротивлению линии ($Z_r \neq Z_B$), то на входе линии также происходит отражение. Пусть коэффициент отражения на входе линии $\eta_0 = \frac{Z_r - Z_B}{Z_r + Z_B}$, тогда здесь вследствие от-

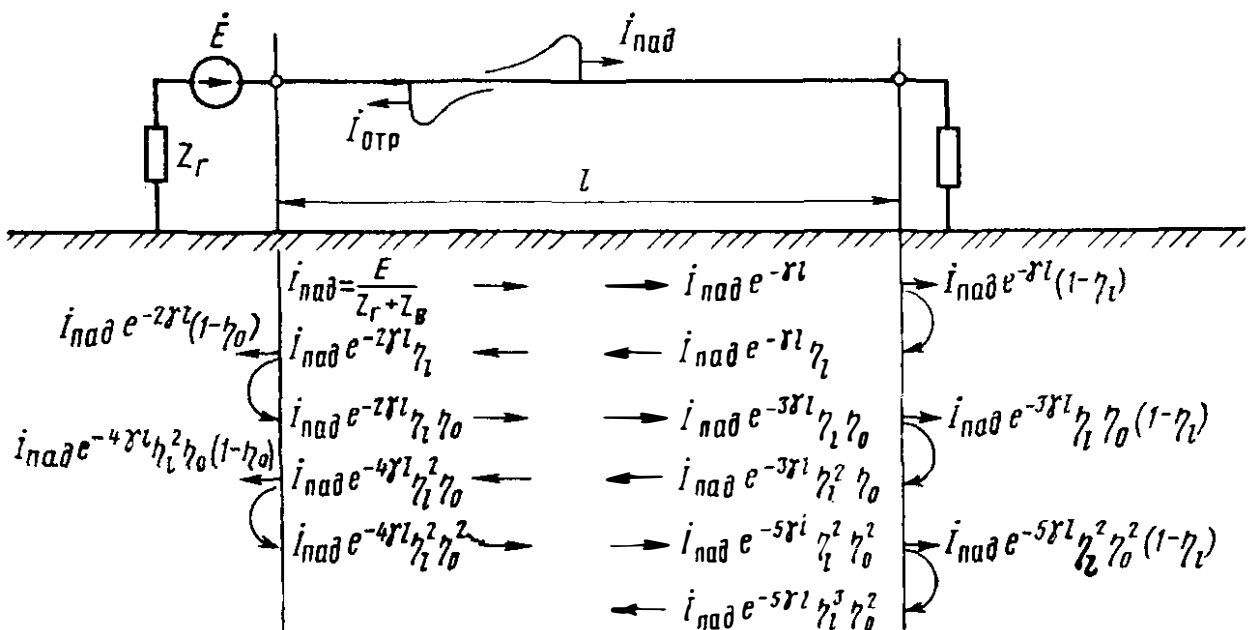


Рис. 4.16

ражения возникает вторая падающая волна $\dot{I}_{\text{пад}} e^{-2\gamma l} \eta_l \eta_0$, которая движется от начала линии к ее концу.

Ток, являющийся разностью между током первой отраженной волны, подошедшей к входу линии, и током второй падающей волны, движущейся от входа линии, проходит через генератор. Тем самым генератору возвращается часть энергии, переданной в линию при подключении.

Вторая падающая волна при подходе к концу линии определяется выражением $\dot{I}_{\text{пад}} e^{-3\gamma l} \eta_l \eta_0$. Здесь повторяется процесс отражения, имевший место при подходе к концу линии первой падающей волны. Возникает вторая отраженная волна тока $\dot{I}_{\text{пад}} e^{-3\gamma l} \eta_l^2 \eta_0$, а разностный ток $\dot{I}_{\text{пад}} e^{-3\gamma l} (1 - \eta_l) \eta_l \eta_0$ проходит через нагрузку и складывается с током первой падающей волны. Процесс отражения волн от несогласованных концов линии повторяется многократно (см. рис. 4.16).

Полный ток нагрузки равен сумме токов всех падающих волн:

$$\begin{aligned} \dot{I}_l &= \dot{I}_{\text{пад}} e^{-\gamma l} (1 - \eta_l) (1 - e^{-2\gamma l} \eta_0 \eta_l + e^{-4\gamma l} \eta_0^2 \eta_l^2 + \dots) = \\ &= \dot{I}_{\text{пад}} e^{-\gamma l} (1 - \eta_l) \frac{1}{1 - e^{-2\gamma l} \eta_0 \eta_l}. \end{aligned}$$

Мощность выделяющаяся в нагрузке,

$$\dot{S}_l = \dot{I}_l^2 Z_{\text{н}}.$$

Составим отношение

$$\frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_l} = \frac{\dot{E}^2 / (4Z_{\Gamma})}{\dot{I}_l^2 Z_{\text{н}}} = \frac{e^{2\gamma l} (Z_{\Gamma} + Z_{\text{в}})^2 (1 - e^{-2\gamma l} \eta_0 \eta_l)^2}{(1 - \eta_l)^2 Z_{\text{н}} \cdot 4Z_{\Gamma}}.$$

Заменим η_l в знаменателе последней формулы его выражением:

$$\eta_l = \frac{Z_{\text{н}} - Z_{\text{в}}}{Z_{\text{н}} + Z_{\text{в}}}.$$

После преобразования получим:

$$\frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_l} = k_P^2 = e^{2\gamma l} \left(\frac{Z_{\Gamma} + Z_{\text{в}}}{2 \sqrt{Z_{\Gamma} Z_{\text{в}}}} \right)^2 \left(\frac{Z_{\text{в}} + Z_{\text{н}}}{2 \sqrt{Z_{\text{в}} Z_{\text{н}}}} \right)^2 (1 - e^{-2\gamma l} \eta_0 \eta_l)^2. \quad (4.17)$$

Это отношение называют рабочим коэффициентом передачи мощности. Более формально этот коэффициент можно найти, воспользовавшись его связью с приведенным сопротивлением:

$$k_P = Z_{\text{прив}} / (2 \sqrt{Z_{\Gamma} Z_{\text{н}}}).$$

Величину $Z_{\text{прив}}$ следует определить по сигнальному графу линии с несогласованными нагрузками по концам (рис. 4.17), из которого

$$\dot{I}_l = \dot{E} \frac{1}{Z_{\Gamma} + Z_{\text{в}}} \frac{e^{-\gamma l}}{1 - e^{-2\gamma l} \eta_0 \eta_l} \frac{2Z_{\text{в}}}{Z_{\text{н}} + Z_{\text{в}}}.$$

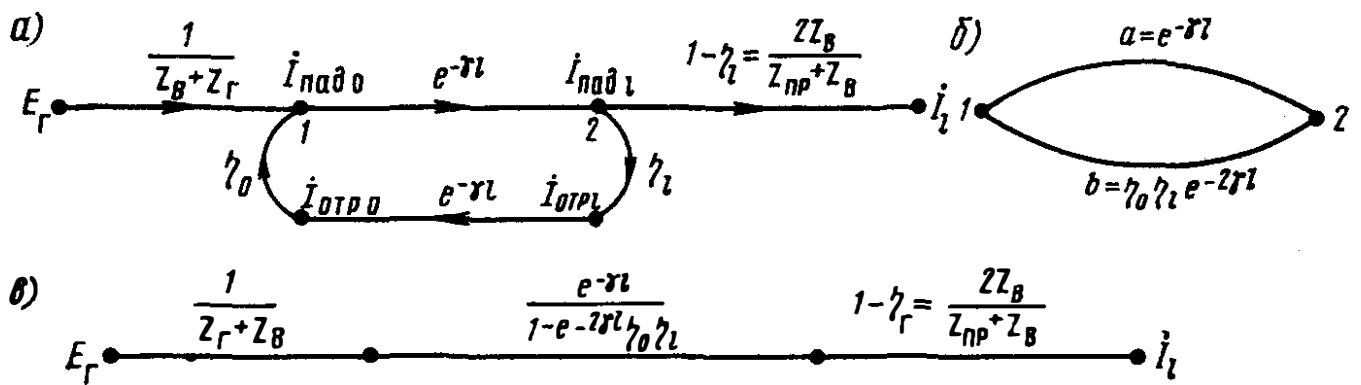


Рис. 4.17

Отсюда

$$Z_{\text{прив}} = \frac{\dot{E}}{i_l} = e^{\gamma l} \frac{(Z_r + Z_B)(Z_B + Z_H)}{2Z_B} (1 - e^{-2\gamma l} \eta_0 \eta_l). \quad (4.18)$$

Подставляя значение $Z_{\text{прив}}$ из выражения (4.18) в формулу (2.120), получим то же значение k_p , что и определяемое выражением (4.17).

Рабочее затухание

$$a_{\text{раб}} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_l} \right| = \ln |k_p| = \alpha l + \ln \left| \frac{Z_r + Z_B}{2 \sqrt{Z_r Z_B}} \right| + \ln \left| \frac{Z_B + Z_H}{2 \sqrt{Z_B Z_H}} \right| + \ln |1 - e^{-2\gamma l} \eta_0 \eta_l| = \alpha l + \Delta a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_3. \quad (4.19)$$

В этой формуле первое слагаемое — собственное затухание линии, второе — затухание вследствие несогласованности сопротивления генератора и волнового сопротивления линии, третье — затухание из-за несогласованности линии и нагрузки и, наконец, последнее — затухание взаимодействия отражений.

Зависимость рабочего затухания от частоты тока иллюстрируется рис. 4.18. Зависимость этой величины от длины линии аналогична и отличается тем, что слагаемое αl становится пропорциональным l .

Из формулы (4.16) следует, что рабочее затухание представляет собой выраженную в логарифмических единицах меру использования приемником мощности генератора. Если приемник получает мощность, которую может отдать ему согласованный с ним генератор с заданной э. д. с. \dot{E} и внутренним сопротивлением Z_r , то говорят о наилучшем использовании приемником мощности генератора ($a_{\text{раб}} = 0$). Известно, что при активной согласованной нагрузке генератор отдает наибольшую мощность, его к. п. д. при этом равен 50 %.

Стремление получить от генератора наибольшую мощность и к. п. д. 50 % при передаче сигналов объясняется и тем обстоятельством, что

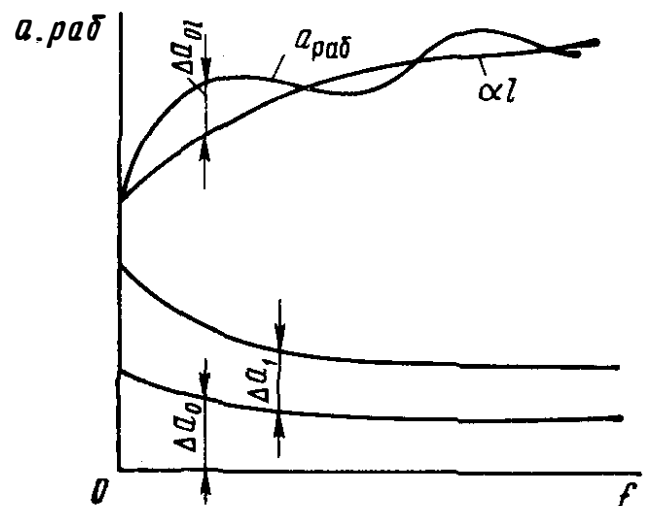


Рис. 4.18

применяемые при этом генераторы маломощны и стоимость потребляемой ими электрической энергии весьма мала по сравнению со стоимостью самих генераторов. Повышение мощности генераторов в этом случае затруднительно и приводит к значительному их удорожанию.

Рабочее затухание может увеличиваться вследствие роста потерь в линии, соединяющей генератор с приемником. В этом случае возрастанию рабочего затухания соответствует уменьшение к. п. д. установки. Рабочее затухание может расти и при увеличении несогласованности между внутренним сопротивлением генератора и входным сопротивлением линии. Если входное сопротивление линии больше внутреннего сопротивления генератора, то росту рабочего затухания соответствует увеличение к. п. д. установки. Однако возрастание к. п. д. в этом случае сопровождается уменьшением мощности, выделяющейся в приемнике, и является нежелательным.

Вносимое затухание. Для оценки условий передачи электрической энергии в системе передачи генератор — линия — приемник наряду с понятием о рабочем затухании применяют понятие о вносимом затухании:

$$a_{\text{вн}} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_{\text{н}}}{\dot{S}_l} \right|,$$

где $\dot{S}_{\text{н}} = \frac{\dot{E}^2 Z_{\text{н}}}{(Z_{\text{г}} + Z_{\text{н}})^2}$; $\dot{S}_l = I_l^2 Z_{\text{н}}$.

Вносимое затухание измеряется половиной натурального логарифма модуля отношения мощности, которую отдавал бы генератор непосредственно подключенному к нему приемнику, к мощности, отдаваемой этому же приемнику через линию с заданными параметрами:

$$a_{\text{вн}} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_{\text{н}}}{\dot{S}_l} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_l} \frac{\dot{S}_{\text{н}}}{\dot{S}_0} \right| = a_{\text{раб}} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_{\text{н}}}{\dot{S}_0} \right|.$$

Но принимая во внимание, что

$$\frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_{\text{н}}} = \frac{(Z_{\text{г}} + Z_{\text{н}})^2}{4Z_{\text{г}} Z_{\text{н}}},$$

получим

$$a_{\text{вн}} = a_{\text{раб}} - \ln \left| \frac{Z_{\text{г}} + Z_{\text{н}}}{2 \sqrt{Z_{\text{г}} Z_{\text{н}}}} \right|. \quad (4.20)$$

Вносимое затухание меньше рабочего на затухание несогласованности генератора и приемника. При $Z_{\text{г}} = Z_{\text{н}}$ рабочее затухание равно вносимому.

Затухание вследствие несогласованности сопротивлений соединяемых четырехполюсников в общем случае

$$\Delta a = \ln \left| \frac{Z_1 + Z_2}{2 \sqrt{Z_1 Z_2}} \right|. \quad (4.21)$$

Вносимое затухание наряду с рабочим находит широкое использование при оценке свойств неоднородных линий.

4.6. РАБОЧИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕОДНОРОДНЫХ ТРАКТОВ

Во многих случаях тракт передачи сигналов наряду с линиями включает в себя четырехполюсные элементы с сосредоточенными параметрами. Условия передачи по неоднородным трактам можно рассчитать по тем же методам, что и условия передачи по однородным линиям.

Затухание четырехполюсника. Затухание, определяемое в общем случае в неперах как $0,5 \ln |\dot{S}_1/\dot{S}_2|$ или в децибелах $10 \lg |\dot{S}_1/\dot{S}_2|$, может характеризовать соотношения между мощностями в различных частях системы передачи энергии.

На практике чаще всего приходится рассматривать следующие мощности:

$\dot{S}_0 = E^2/(4Z_\Gamma)$ — мощность, отдаваемую генератором с внутренним полным сопротивлением Z_Γ и э. д. с. \dot{E} согласованной с ним нагрузке;

$\dot{S}_H = E^2 Z_H/(Z_\Gamma + Z_H)^2$ — мощность, отдаваемую генератором непосредственно присоединенной к нему нагрузке с сопротивлением Z_H ;

$\dot{S}_2 = Z_H I_2^2$ — мощность, получаемую приемником с сопротивлением Z_H через систему передачи;

$\dot{S}_1 = E^2 Z_{вх1}/(Z_\Gamma + Z_{вх1})^2$ — мощность, входящую в систему передачи с входным сопротивлением $Z_{вх1}$;

$\dot{S}_{отр} = \dot{S}_0 - \dot{S}_1 = \frac{\dot{E}^2 (Z_\Gamma - Z_{вх1})^2}{4Z_\Gamma (Z_\Gamma + Z_{вх1})^2}$ — мощность, отражающаяся от входа системы передачи с входным сопротивлением $Z_{вх}$.

Отношения между рассматриваемыми мощностями определяют затухания, характеризующие условия передачи энергии через систему. Наиболее употребительны:

собственное затухание при $Z_H = Z_{x2}$:

$$a = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_1}{\dot{S}_2} \right|, \quad a = 10 \lg \left| \frac{\dot{S}_1}{\dot{S}_2} \right|;$$

рабочее затухание:

$$a_{раб} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_2} \right|, \quad a_{раб} = 10 \lg \left| \frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_2} \right|;$$

вносимое затухание:

$$a_{вн} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_H}{\dot{S}_2} \right|, \quad a_{вн} = 10 \lg \left| \frac{\dot{S}_H}{\dot{S}_2} \right|;$$

входное затухание:

$$a_{вх} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_1} \right|, \quad a_{вх} = 10 \lg \left| \frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_1} \right|;$$

затухание передачи при $Z_H \neq Z_{x2}$:

$$a_{\text{пер}} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_1}{\dot{S}_2} \right|, \quad a_{\text{пер}} = 10 \lg \left| \frac{\dot{S}_1}{\dot{S}_2} \right|; \quad (4.22)$$

затухание отражения, или несогласованности (эхо):

$$a_{\text{отр}} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_{\text{отр}}} \right|, \quad a_{\text{отр}} = 10 \lg \left| \frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_{\text{отр}}} \right|.$$

Рабочее затухание несимметричного четырехполюсника, выраженное через параметры системы, по аналогии с формулой (4.19)

$$a_{\text{раб}} = a + \ln \left| \frac{Z_{\Gamma} + Z_{x1}}{2 \sqrt{Z_{\Gamma} Z_{x1}}} \right| + \ln \left| \frac{Z_{x2} + Z_H}{2 \sqrt{Z_{x2} Z_H}} \right| + \ln |1 - e^{-2g} \eta_1 \eta_2|, \quad (4.23)$$

где $\eta_1 = \frac{Z_{\Gamma} - Z_{x1}}{Z_{\Gamma} + Z_{x1}}$; $\eta_2 = \frac{Z_H - Z_{x2}}{Z_H + Z_{x2}}$.

Здесь Z_{x1} и Z_{x2} — характеристические сопротивления четырехполюсника со стороны входа и выхода, у симметричного четырехполюсника они равны; g — постоянная передачи. Формулы для расчета характеристических сопротивлений и постоянной передачи рассматриваются ниже.

Вносимое затухание рассчитывают по формуле (4.20), измененной в соответствии с формулой (4.23).

Из определений затуханий вытекают соотношения:

$$a_{\text{раб}} = a_{\text{вх}} + a_{\text{пер}}; \quad (4.24)$$

$$a_{\text{раб}} = a_{\text{вн}} + \ln \left| \frac{Z_{\Gamma} + Z_H}{2 \sqrt{Z_{\Gamma} Z_H}} \right|;$$

$$a_{\text{вх}} = \ln \left| \frac{Z_{\Gamma} + Z_{\text{вх}}}{2 \sqrt{Z_{\Gamma} Z_{\text{вх}}}} \right|. \quad (4.25)$$

Затухание тракта передачи, образованного цепочечным соединением четырехполюсников. При расчете различного рода устройств автоматики и связи нередко целесообразно рассматривать полный путь передачи сигнала от генератора к приемнику как цепочечное соединение нескольких четырехполюсников, каждый из которых отражает свойства одного из элементов сложной цепи передачи. В этом случае, как и при характеристике условий передачи энергии через один четырехполюсник, можно использовать понятия собственных, называемых также характеристическими, и рабочих параметров передачи.

При цепочечном соединении четырехполюсников характеристические параметры всего соединения определяются произведением матрицы (A) или (T).

Характеристические параметры целесообразно определять в тех случаях, когда система передачи состоит из многих элементов, но с повторяющимися характеристиками, так что для установления условий

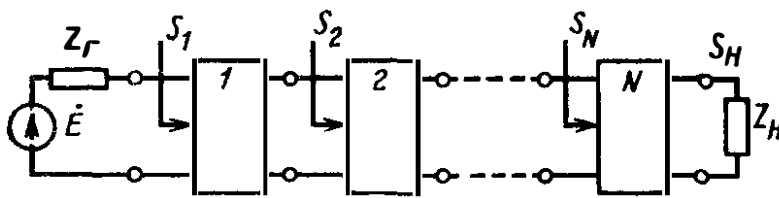


Рис. 4.19

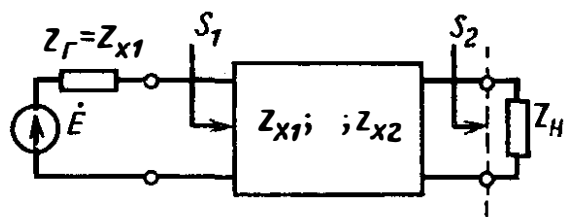


Рис. 4.20

передачи достаточно рассмотреть группу из двух-трех включенных цепочкой четырехполюсников. При этом удастся найти и частотные зависимости характеристических сопротивлений и затухания системы.

Если же система состоит из большого числа четырехполюсников с различными характеристиками, то вычисление параметров соединения перемножением матриц оказывается крайне громоздким. В таких случаях целесообразно оперировать рабочими параметрами передачи: $Z_{вх}$ и $a_{раб}$.

Входное сопротивление цепочки находят последовательным определением этой величины для каждого четырехполюсника, начиная с конца, полагая, что $Z_{вх}$ последнего играет роль Z_H для предпоследнего, и т. д.

Для определения рабочего затухания цепочки рассмотрим рис. 4.19. Пусть $\dot{S}_1, \dot{S}_2, \dots, \dot{S}_N$ — мощности на входах четырехполюсников 1, 2, ..., N; \dot{S}_{N+1} — мощность в приемнике на выходе системы передачи.

Тогда

$$a_{раб} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_{N+1}} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_1} \frac{\dot{S}_1}{\dot{S}_2} \dots \frac{\dot{S}_{N+1}}{\dot{S}_N} \frac{\dot{S}_N}{\dot{S}_{N+1}} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_1} \right| + \sum_{m=1}^{m=N} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_m}{\dot{S}_{m+1}} \right|.$$

Рабочее затухание цепочки четырехполюсников равно сумме входного затухания и затуханий передачи отдельных четырехполюсников. Применение логарифмической меры затухания позволяет заменить многократное умножение матриц сложением затуханий.

При большом числе участков сложной передающей системы расчет затуханий передачи их должен предшествовать расчет входных сопротивлений от конца системы к началу. При этом сопротивлением нагрузки для каждого четырехполюсника следует считать входное сопротивление четырехполюсника, следующего за ним.

Затухание передачи полного четырехполюсника. Затухание передачи четырехполюсника определяется выражением (4.22):

$$a_{пер} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_1}{\dot{S}_2} \right|,$$

где \dot{S}_1 — мощность на входе четырехполюсника;
 \dot{S}_2 — мощность на его выходе.

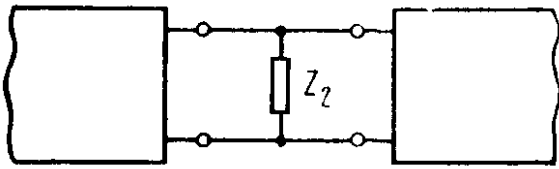


Рис. 4.21

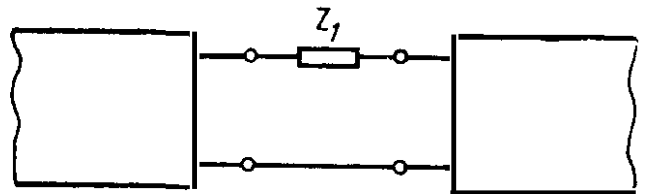


Рис. 4.22

Заметим, что затухание передачи не зависит от того, какой генератор подключен к входу четырехполюсника. Допустим поэтому, что к входу четырехполюсника подключен генератор с внутренним сопротивлением $Z_r = Z_{x1}$ (рис. 4.20). Вычислим затухание передачи: $a_{\text{пер}} = a_{\text{раб}} - a_{\text{вх}}$ [см. формулу (4.24)].

Рабочее затухание в соответствии с формулой (4.23) при $Z_r = Z_{x1}$

$$a_{\text{раб}} = a + \ln \left| \frac{Z_{x2} + Z_H}{2 \sqrt{Z_{x2} Z_H}} \right|.$$

Входное затухание в соответствии с формулой (4.25)

$$a_{\text{вх}} = \ln \left| \frac{Z_{x1} + Z_{\text{вх1}}}{2 \sqrt{Z_{x1} Z_{\text{вх1}}}} \right|,$$

таким образом,

$$a_{\text{пер}} = a + \ln \left| \frac{Z_H + Z_{x2}}{2 \sqrt{Z_H Z_{x2}}} \right| - \ln \left| \frac{Z_{x1} + Z_{\text{вх1}}}{2 \sqrt{Z_{x1} Z_{\text{вх1}}}} \right|.$$

Затухание тракта передачи, содержащего неполные четырехполюсники или ответвления. Сложные тракты передачи сигналов телемеханики и связи часто содержат двухполюсники, включаемые параллельно (рис. 4.21) или последовательно (рис. 4.22). В соответствии со схемой, приведенной на рис. 4.19, такие элементы следует рассматривать как неполные четырехполюсники.

Имеются две возможности учета затухания, появляющегося при включении таких неполных четырехполюсников. Первая состоит в том, что рабочее затухание всего тракта передачи рассматривается как сумма входного затухания и затуханий передачи всех четырехполюсников. При этом необходимо иметь формулы, определяющие затухание передачи неполных четырехполюсников.

Для схемы (см. рис. 4.21) из уравнений (2.62)

$$a_{\text{пер}} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_1}{\dot{S}_2} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \frac{Z_H}{Z_2} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{Z_H}{Z_{\text{вх}}} \right|, \quad (4.26)$$

где $Z_{\text{вх}} = Z_H Z_2 / (Z_H + Z_2)$.

Для схемы (см. рис. 4.22) согласно уравнению (2.64)

$$a_{\text{пер}} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_1}{\dot{S}_2} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \frac{Z_1}{Z_H} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{Z_{\text{вх}}}{Z_H} \right|, \quad (4.27)$$

где $Z_{\text{вх}} = Z_1 + Z_H$.

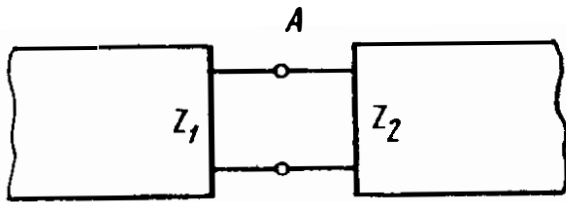


Рис. 4.23

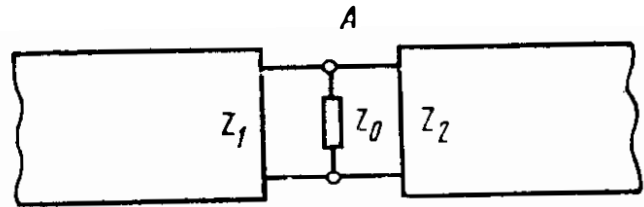


Рис. 4.24

Включение в тракт передачи неполного четырехполюсника увеличивает затухание передачи тракта в соответствии с выражением (4.26) или (4.27). Кроме того, изменяется входное сопротивление тракта и соответственно входное затухание. Таким образом, добавочное рабочее затухание, появляющееся в тракте передачи при включении неполного четырехполюсника, состоит из затухания передачи последнего и дополнительного входного затухания.

Вторая возможность учета дополнительного затухания, вызываемого включением в тракт передачи неполного четырехполюсника, заключается в вычислении добавочного рабочего затухания непосредственно, минуя расчет затухания передачи. Этот способ особенно удобен при учете увеличения рабочего затухания вследствие ответвлений линии и в некоторых других случаях.

Вычислим добавочное рабочее затухание, вызванное ответвлениями от линии. На рис. 4.23 показано сечение тракта передачи до включения ответвления, а на рис. 4.24 — с ответвлением.

До подключения ответвления в точке A соединились два участка тракта: первый с выходным сопротивлением Z_1 и второй с входным сопротивлением Z_2 . Допустим, что затухания участков достаточно велики, чтобы можно было пренебречь дополнительным затуханием, связанным с отражениями. Тогда при $Z_1 \neq Z_2$ в месте соединения участков из-за несогласованности соединений [см. формулу (4.21)] возникает дополнительное затухание:

$$\Delta a = \ln \left| \frac{Z_1 + Z_2}{2 \sqrt{Z_1 Z_2}} \right| = \ln \left| \frac{Y_1 + Y_2}{2 \sqrt{Y_1 Y_2}} \right|.$$

Рассмотрим теперь, насколько изменится дополнительное затухание в точке A , если в стыке участков включить ответвление с сопротивлением $Z_0 = 1/Y_0$ (см. рис. 4.24). Дополнительное затухание в этом случае обуславливается отбором ответвлением из тракта некоторой мощности и изменением соотношения между сопротивлениями предшествующей и последующей частей тракта.

Дополнительное затухание вследствие отбора энергии ответвлением оценивают затуханием передачи ответвления:

$$\Delta a_1 = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_1}{\dot{S}_2} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \frac{Z_2}{Z_0} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \frac{Y_0}{Y_2} \right|.$$

Дополнительное затухание вследствие изменения соотношения между сопротивлениями в точке А

$$\Delta a_2 = \ln \left| \frac{Y_0 + Y_1 + Y_2}{2 \sqrt{Y_1 (Y_0 + Y_2)}} \right| = \ln \left| \frac{Y_1 + Y_2}{2 \sqrt{Y_1 Y_2}} \right|.$$

Полное дополнительное рабочее затухание, вызванное включением ответвления,

$$\Delta a = \Delta a_1 + \Delta a_2 = \ln \left| 1 + \frac{Y_0}{Y_1 + Y_2} \right|.$$

Связь рабочего затухания составного тракта с функциями передачи по напряжению. Как известно, затухание между какими-либо точками трактов передачи сигналов удобно измерять разностью уровней. При этом, учитывая, что напряжения могут быть измерены на различных сопротивлениях, необходимо пользоваться уровнями мощности. В то же время измерительные приборы измеряют уровни напряжения.

В групповых линиях сопротивление меняется от точки к точке, поэтому уровни напряжения не определяют распределения затухания, однако контроль распределения напряжения для правильно спроектированного тракта является удобным способом проверки его исправности. Поэтому при проектировании целесообразно задавать напряжения (уровни напряжения) для точек подключения передатчиков и приемников, а при эксплуатации их контролировать. Покажем, как рабочее затухание тракта связано с напряжениями в отдельных его точках:

$$a_{\text{раб}} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{S_0}{S(l)} \right|;$$

$$\frac{S_0}{S(l)} = \frac{E^2}{4Z_{\Gamma}} \frac{Z_{\text{н}}}{\dot{U}^2(l)} = \frac{\dot{U}^2(0) (Z_{\Gamma} + Z_{\text{вх}})^2}{Z_{\text{вх}}^2} \frac{Z_{\text{н}}}{4Z_{\Gamma}} \frac{1}{\dot{U}^2(l)} =$$

$$= \frac{(Z_{\Gamma} + Z_{\text{вх}})^2}{4Z_{\text{вх}}^2 Z_{\Gamma}} Z_{\text{н}} \frac{\dot{U}^2(0)}{\dot{U}_1^2} \frac{\dot{U}_1^2}{\dot{U}_2^2} \dots \frac{\dot{U}_n^2}{\dot{U}^2(l)} = \frac{(Z_{\Gamma} + Z_{\text{вх}})^2}{4Z_{\text{вх}} Z_{\Gamma}} \frac{Z_{\text{н}}}{Z_{\text{вх}}} \prod_i \frac{1}{F_{vi}};$$

$$a_{\text{раб}} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{S_0}{S(l)} \right| = a_{\text{вх}} + \ln \sqrt{\frac{Z_{\text{н}}}{Z_{\text{вх}}} - \sum_i |F_{vi}|}.$$

Коэффициент изменения тока тракта передачи. При анализе и расчете цепей железнодорожной автоматики и телемеханики, в частности рельсовых цепей, необходимо учитывать непрерывные воздействия (плавное изменение входной функции напряжения или тока, колебания первичных параметров линии и т. д.) и дискретные воздействия, изменяющие структуру схемы (короткое замыкание, шунтирование, обрыв элементов и т. д.).

Сложные электрические цепи при непрерывных и дискретных воздействиях целесообразно анализировать по схемам замещения, позволяющим использовать известные разделы теории четырехполюсников и линий и представить цепи автоматики и телемеханики в виде каскадного соединения четырехполюсников. Полную схему замещения

(см. рис. 4.19) можно упростить, оставив в ней четырехполюсник, замещающий линию, а части схемы относительно входных и выходных зажимов линии заменить их входными сопротивлениями (см. рис. 4.20).

Подобные схемы широко применяют при анализе основных информационных устройств железнодорожной автоматики и телемеханики — рельсовых цепей. Особый интерес при их расчете представляют частные случаи дискретных воздействий на рельсовую линию — наложение поездного шунта и излом рельсов. В этих случаях рельсовая цепь должна среагировать на дискретное воздействие снижением тока в приемнике до значения, обеспечивающего достаточную информацию о занятости или неисправности контролируемого участка пути.

Реакцию цепи на дискретное воздействие удобно количественно характеризовать коэффициентом изменения тока тракта передачи сигналов:

$$k_T = I_N / I'_N,$$

где I_N — ток в нагрузке до воздействия на цепь;
 I'_N — ток в нагрузке при дискретном воздействии на цепь.

Токи в нагрузке соответственно

$$I_N = \dot{E} / Z_{\text{прив}}; \quad I'_N = \dot{E} / Z'_{\text{прив}},$$

где $Z_{\text{прив}} = AZ_N + B + (CZ_N + D) Z_{\Gamma}$ — приведенное сопротивление цепи до воздействия на нее;
 $Z'_{\text{прив}} = A'Z_N + B' + (C'Z_N + D') Z_{\Gamma}$ — приведенное сопротивление цепи при дискретном на нее воздействии.

С учетом последних выражений

$$k_T = \frac{Z'_{\text{прив}}}{Z_{\text{прив}}} = \frac{A'Z_N + B' + (C'Z_N + D')Z_{\Gamma}}{AZ_N + B + (CZ_N + D)Z_{\Gamma}}.$$

Понятие коэффициента изменения тока тракта передачи можно использовать при анализе рельсовых цепей, работающих в режимах наложения шунта (шунтовом) и изломе рельсов (контрольном).

Глава 5

ПАРАМЕТРЫ ПЕРЕДАЧИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ КАК ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

5.1. СОБСТВЕННЫЕ ПАРАМЕТРЫ ПЕРЕДАЧИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Собственные параметры передачи симметричного четырехполюсника. Необходимость разработки общих методов расчета трактов, содержащих цепи с сосредоточенными и распределенными параметрами, привела к распространению характеристик, присущих цепям с распределенными параметрами, на цепи с сосредоточенными параметрами.

Еще в § 2.17 формально были введены характеристическое сопротивление Z_x — аналог Z_B — и постоянная передачи g — аналог γl , которые совместно называют параметрами передачи, или вторичными параметрами четырехполюсника. Введенными параметрами передачи особенно удобно пользоваться при образовании четырехполюсниками, составленными из элементов с сосредоточенными параметрами, вместе с линиями сложных систем передачи при цепочечном соединении многих четырехполюсников и в случаях необходимости рассмотрения зависимости параметров от частоты.

Термин «характеристическое сопротивление» в отличие от волнового сопротивления линии применен для того, чтобы подчеркнуть разницу между процессами, которые мы рассматриваем в цепях с сосредоточенными параметрами, и процессами распространения энергии, присущими линиям. По этим же соображениям постоянная передача g обозначена одним символом, а не γl , как это принято для линии, потому что понятие длины в схеме, составленной из сосредоточенных сопротивлений, не имеет смысла.

Для определения параметров передачи воспользуемся соотношениями (3.50) и (3.51), записав их в виде:

$$Z_x = \sqrt{Z_{K3} Z_{XX}}; \quad (5.1)$$

$$\text{th } g = \sqrt{Z_{K3}/Z_{XX}}. \quad (5.2)$$

Параметры передачи (вторичные параметры) Z_x и g четырехполюсника, как и все другие его параметры, находят из опытов короткого замыкания и холостого хода. С параметрами A , B , C и другими параметрами они связаны определенными соотношениями. Из уравнений (2.42) следует, что

$$Z_{K3} = 1/Y_{11} = B/A; \quad Z_{XX} = Z_{11} = A/C.$$

Следовательно, с параметрами A , B , C они связаны соотношениями:

$$Z_x = \sqrt{Z_{11}/Y_{11}} = \sqrt{B/C}; \quad (5.3)$$

$$\text{th } g = 1/\sqrt{Z_{11}/Y_{11}} = \sqrt{BC/A^2}. \quad (5.4)$$

Используя соотношения между гиперболическими функциями, можно показать, что

$$\begin{aligned} \text{sh } g &= \frac{\text{th } g}{1 - \text{th}^2 g} = \sqrt{BC}; \\ \text{ch } g &= \sqrt{1 + \text{sh}^2 g} = \sqrt{1 + BC} = A; \\ e^g &= \text{ch } g + \text{sh } g = A + \sqrt{BC}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Как видно, параметр g всегда определяется через какую-либо гиперболическую или показательную функцию. Отсюда

$$A = \text{ch } g; \quad B = Z_x \text{ sh } g; \quad C = \frac{1}{Z_x} \text{ sh } g. \quad (5.6)$$

Подставляя полученные выражения третичных параметров в уравнения (2.42), получим:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \text{ ch } g + \dot{I}_2 Z_x \text{ sh } g; \quad \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2}{Z_x} \text{ sh } g + \dot{I}_2 \text{ ch } g. \quad (5.7)$$

Уравнения симметричного четырехполюсника с параметрами передачи (5.7) удобны при решении многих задач.

Параметры передачи четырехполюсника как числовые характеристики имеют те же свойства, что и волновые параметры линий. Действительно, если сопротивление нагрузки Z_n , подключенной к четырехполюснику, равно характеристическому сопротивлению четырехполюсника Z_x , то, выражая в уравнениях (5.7) произведение $Z_x \dot{I}_2$ через \dot{U}_2 , найдем, что

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 e^g; \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_2 e^g. \quad (5.8)$$

Уравнения (5.8) соответствуют уравнениям согласованной линии. Из них следует, что при нагрузке симметричного четырехполюсника на сопротивление Z_x его входное сопротивление также равно Z_x . При этом

$$\dot{U}_1/\dot{I}_1 = \dot{U}_2/\dot{I}_2 = Z_x; \quad \dot{U}_1/\dot{U}_2 = \dot{I}_1/\dot{I}_2 = e^g.$$

Постоянная передачи

$$g = \ln \dot{U}_1/\dot{U}_2 = \ln \dot{I}_1/\dot{I}_2 = 0,5 \ln S_1/S_2. \quad (5.9)$$

Если комплексное число g представить в виде $g = a + jb$, то его действительная часть

$$a = \ln |\dot{U}_1/\dot{U}_2| \quad (5.10)$$

есть собственное затухание четырехполюсника — аналог αl , а мнимая часть b — собственный коэффициент фазы — аналог βl .

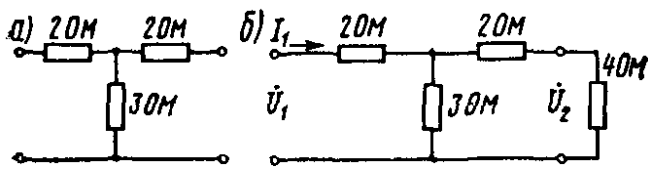


Рис. 5.1

Затухание a и коэффициент фазы b достигаются при согласованной нагрузке четырехполюсника, Z_x определяет сопротивление приемника при котором четырехполюсник вносит в тракт передачи затухание a и фазовый сдвиг b .

В качестве поясняющего примера рассмотрим схему (рис. 5.1, а). Определим для нее характеристическое сопротивление:

$$Z_x = \sqrt{Z_{кз} Z_{хх}}; \quad Z_{кз} = 2 + \frac{2 \cdot 3}{2 + 3} = \frac{16}{5} \text{ Ом}, \quad Z_{хх} = 2 + 3 = 5 \text{ Ом};$$

$$Z_x = \sqrt{\frac{16}{5} \cdot 5} = 4 \text{ Ом}.$$

Рассчитаем входное сопротивление четырехполюсника при нагрузке его на сопротивление, равное характеристическому (рис. 5.1, б):

$$Z_{вх} = 2 + \frac{(2 + 4) \cdot 3}{2 + 4 + 3} = 4 \text{ Ом}.$$

Найдем отношение напряжений U_1/U_2 :

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 + 2\dot{I}_2 + 2 \left(\dot{I}_2 + \frac{\dot{U}_2 + 2\dot{I}_2}{3} \right); \quad \dot{I}_2 = \frac{1}{4} \dot{U}_2;$$

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 + \frac{1}{2} \dot{U}_2 + \left(\frac{1}{4} \dot{U}_2 + \frac{\dot{U}_2 + \frac{1}{2} \dot{U}_2}{3} \right) = 3\dot{U}_2; \quad \dot{U}_1/\dot{U}_2 = e^a = 3.$$

Величину $e^a = 3$ мы определили непосредственно из схемы. Величину a можно найти исходя из формулы $\text{th} g = \sqrt{Z_{кз}/Z_{хх}}$. Поскольку схема составлена из чисто активных сопротивлений, фазовый сдвиг отсутствует:

$$g = a; \quad \text{th} g = \text{th} a = \sqrt{\frac{16}{5 \cdot 5}} = \frac{4}{5}.$$

Убедимся, что $\text{th} a = 4/5$ определяет ту же величину a , что и $e^a = 3$

$$\text{th} a = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}} = \frac{3 - \frac{1}{3}}{3 + \frac{1}{3}} = \frac{4}{5}.$$

Параметры передачи находят применение при расчетах электрических фильтров, искусственных линий и других широко используемых в устройствах связи элементов. При построении последних обычно применяют простые схемы замещения. Определим поэтому параметры передачи основных схем замещения.

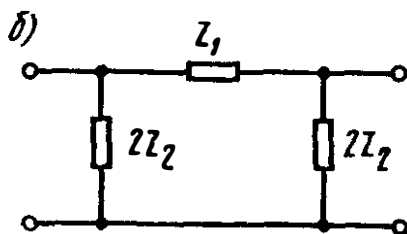
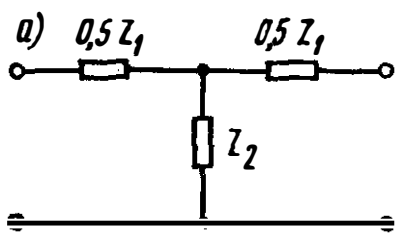


Рис. 5.2

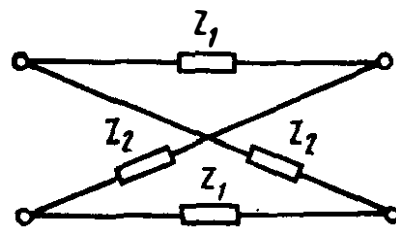


Рис. 5.3

Симметричная схема Т (рис. 5.2, а). При определении характеристического сопротивления будем исходить из уравнений (5.3) и (2.59), тогда

$$Z_x = \sqrt{\frac{B}{C}} = \sqrt{Z_1 Z_2 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right)} = Z_T. \quad (5.11)$$

Нахождение постоянной передачи по формуле (5.2) в данном случае приводит к громоздким вычислениям. Ее легче получить из выражений (5.6), откуда $A_T = \operatorname{ch} g$. Но согласно уравнению (2.59)

$$A_T = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2}, \quad (5.12)$$

следовательно,

$$\operatorname{ch} g = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2}$$

и

$$\operatorname{sh} g/2 = \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}}. \quad (5.13)$$

Симметричная схема П (рис. 5.2, б). Пользуясь выражениями (5.3) и (2.60) найдем:

$$Z_x = \sqrt{\frac{B}{C}} = \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}} = Z_{\Pi}. \quad (5.14)$$

Выражения параметра A для симметричных схем Т и П одинаковы. поэтому для определения постоянной передачи обеих схем можно пользоваться формулами (5.12) и (5.13). Схемы Т и П, составленные из одинаковых полных сопротивлений Z_1 и Z_2 , имеют одинаковые постоянные передачи и различаются лишь своими характеристическими сопротивлениями.

Мостовая, или скрещенная, схема. Для нахождения параметров схемы (рис. 5.3) можно воспользоваться соотношениями (5.1) и (5.2). Сопротивления короткого замыкания и холостого хода моста:

$$Z_{кз} = 2 \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}; \quad Z_{хх} = \frac{1}{2} (Z_1 + Z_2).$$

Тогда

$$Z_x = \sqrt{Z_{кз} Z_{xx}} = \sqrt{Z_1 Z_2} = Z_M; \quad (5.15)$$

$$\operatorname{th} g = \sqrt{\frac{Z_{кз}}{Z_{xx}}} = \sqrt{\frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}}. \quad (5.16)$$

Преобразуем выражение (5.16), поделив числитель и знаменатель подкоренного выражения на Z_2^2 , в результате получим:

$$\operatorname{th} g = \frac{2 \sqrt{Z_1/Z_2}}{1 + (Z_1/Z_2)}.$$

Сравнивая последнее выражение с известной формулой

$$\operatorname{th} x = \frac{2 \operatorname{th} (x/2)}{1 + \operatorname{th}^2 (x/2)},$$

найдем, что

$$\operatorname{th} (g/2) = \sqrt{Z_1/Z_2} \quad (5.17)$$

или

$$e^g = \frac{1 + \sqrt{Z_1/Z_2}}{1 - \sqrt{Z_1/Z_2}}. \quad (5.18)$$

Если сопротивления Z_1 и Z_2 в рассмотренных схемах (см. рис. 5.1—5.3) зависят от частоты, то от нее зависят и величины Z_x и g . Это позволяет получать четырехполюсники с различными передающими свойствами, что и обеспечивает разнообразное использование этих схем замещения.

Схема «перекрытое Т». Имеется несколько схем, эквивалентных мостовой. Наиболее широко используемой является схема, называемая «перекрытое Т» (рис. 5.4, а). Если сопротивления Z_1 и Z_2 взаимнообратны, то схема имеет независящее от частоты характеристическое сопротивление и зависящую от нее постоянную передачи g . Это свойство необходимо для построения корректоров искажений сигналов, которые будут рассмотрены далее.

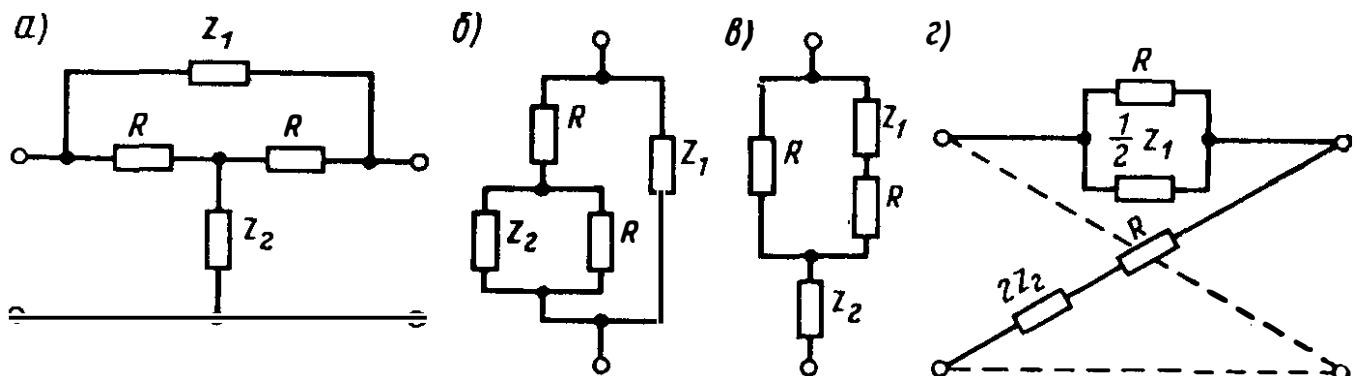


Рис. 5.4

Покажем, что при указанных условиях характеристическое сопротивление рассматриваемой схемы не зависит от частоты и равно R . Для эквивалентной по входному сопротивлению схемы при коротком замыкании (рис. 5.4, б)

$$Z_{кз} = \frac{Z_1 \left(R + \frac{Z_2 R}{Z_2 + R} \right)}{Z_1 + R + \frac{Z_2 R}{Z_2 + R}} = R \frac{Z_1 + 2R}{Z_1 + 2Z_2 + 2R};$$

при холостом ходе (рис. 5.4, в)

$$Z_{xx} = R \frac{Z_1 + 2Z_2 + 2R}{Z_1 + 2R}.$$

По формуле (5.15)

$$Z_x = \sqrt{Z_{кз} Z_{xx}} = R. \quad (5.19)$$

Найдем постоянную передачи g по формуле (5.16):

$$\begin{aligned} \operatorname{th} g &= \sqrt{\frac{Z_{кз}}{Z_{xx}}} = \frac{Z_1 + 2R}{Z_1 + 2Z_2 + 2R} = T; \\ e^{2g} &= \frac{1+T}{1-T} = \frac{Z_1 + Z_2 + 2R}{Z_2}. \end{aligned}$$

Помножив в последнем выражении числитель и знаменатель на Z_1 , получим:

$$e^{2g} = \frac{Z_1^2 + Z_1 Z_2 + 2R Z_1}{Z_1 Z_2} = \frac{(Z_1 + R)^2}{R^2},$$

отсюда

$$e^g = \frac{Z_1 + R}{R}; \quad \alpha = \ln \left| 1 + \frac{Z_1}{R} \right|; \quad e^\alpha = \left| 1 + \frac{Z_1}{R} \right|. \quad (5.20)$$

Как видно, свойства схемы, приведенной на рис. 5.4, а, определяются очень простыми выражениями (5.19) и (5.20). Из формул (5.20) следует, что зависимость затухания от частоты целиком характеризуется частотной зависимостью сопротивления $Z_1(\omega)$, так как $Z_2(\omega) = R^2/Z_1(\omega)$.

Рассматриваемой схеме эквивалентна схема моста (рис. 5.4, г).

Приведенные примеры показывают, что для любой заданной четырехполюсной схемы параметры передачи можно выразить через сопротивления элементов, входящих в нее.

Постоянная передачи g в логарифмическом масштабе показывает падение напряжения и утечку тока, а также изменение фаз напряжения тока в схеме четырехполюсника при нагрузке его на сопротивление Z_x .

Характеристическое сопротивление — это та нагрузка, при которой комплексы входного сопротивления четырехполюсника и сопротивления нагрузки равны, а затухание и фазовый сдвиг определяются величиной $g = a + jb$.

Собственные параметры передачи несимметричного четырехполюсника. Симметричную обратимую четырехполюсную схему вполне можно охарактеризовать двумя независимыми параметрами. Поэтому при введении параметров передачи этой схемы достаточно исходить из двух величин: $Z_{кз}$ и $Z_{хх}$.

Если заданная схема несимметрична и определяется, например, параметрами A, B, C, D , причем $A \neq D$, то результаты измерения входных сопротивлений при коротком замыкании и холостом ходе со стороны зажимов 1, 2 и 3, 4 должны быть различными.

Из уравнений (2.42) и (2.45), следует, что

$$\begin{aligned} Z_{кз1,2} &= B/D; & Z_{хх1,2} &= A/C; \\ Z_{кз3,4} &= -B/A; & Z_{хх3,4} &= -D/C. \end{aligned}$$

Индексы 1, 2 и 3, 4 обозначают, что измерение выполняют со стороны зажимов 1, 2 или 3, 4. Знак минус в последних выражениях есть следствие выбранного ранее условного напряжения тока и на дальнейшие результаты не влияет.

По аналогии с симметричными схемами можно ввести:

$$Z_{x_1} = \sqrt{Z_{кз1,2} Z_{хх1,2}} = \sqrt{AB/(CD)} = \sqrt{Z_{11}/Y_{11}}; \quad (5.21)$$

$$\text{th } g_1 = \sqrt{Z_{кз1,2}/Z_{хх1,2}} = \sqrt{BC/(AD)} = 1/\sqrt{Z_{11} Y_{11}}; \quad (5.22)$$

$$Z_{x_2} = \sqrt{Z_{кз3,4} Z_{хх3,4}} = \sqrt{DB/(AC)} = \sqrt{Z_{22}/Y_{22}}. \quad (5.23)$$

$$\text{th } g_2 = \sqrt{Z_{кз3,4}/Z_{хх3,4}} = \sqrt{BC/(AD)} = 1/\sqrt{Z_{22} Y_{22}}. \quad (5.24)$$

Для обратимых четырехполюсников

$$\text{th } g_1 = \text{th } g_2 \quad \text{и} \quad g_1 = g_2 = g.$$

Таким образом, независимыми являются только три параметра. В формулах (5.21)—(5.24) знаки перед корнями выбирают по физическим соображениям. Из формулы (5.24) и условия обратимости следует, что

$$\text{sh } g = \text{th } g / \sqrt{1 - \text{th}^2 g} = \sqrt{BC} \quad \text{и} \quad \text{ch } g = \sqrt{AD}. \quad (5.25)$$

Из равенств (5.25) в свою очередь получается:

$$e^g = \sqrt{AD} + \sqrt{BC}; \quad (5.26)$$

$$g = \ln [\sqrt{AD} + \sqrt{BC}] = \ln \left[\sqrt{\frac{Z_{11} Y_{11}}{Z_{21} Y_{21}}} + \frac{1}{\sqrt{Z_{21} Y_{21}}} \right]. \quad (5.27)$$

Из выражений (5.21)—(5.24) устанавливаются обратные зависимости параметров A, B, C, D от g, Z_{x_1} и Z_{x_2} :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{Z_{x_1}}{Z_{x_2}}} \text{ch } g; & B &= \sqrt{Z_{x_1} Z_{x_2}} \text{sh } g; & C &= \frac{1}{\sqrt{Z_{x_1} Z_{x_2}}} \text{sh } g; \\ D &= \sqrt{\frac{Z_{x_2}}{Z_{x_1}}} \text{ch } g. \end{aligned} \quad (5.28)$$

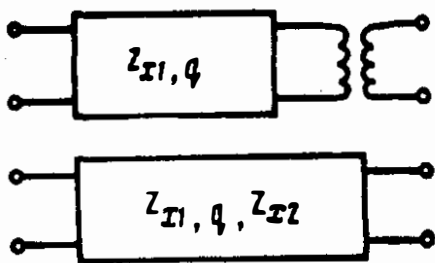


Рис. 5.5

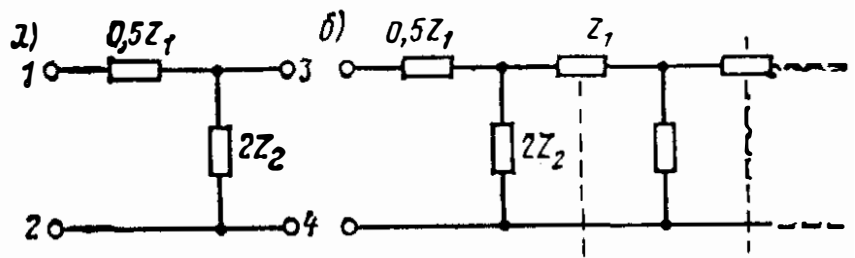


Рис. 5.6

Подставим эти выражения третичных параметров в уравнения (2.42):

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \sqrt{\frac{Z_{x1}}{Z_{x2}}} \operatorname{ch} g + I_2 \sqrt{Z_{x1} Z_{x2}} \operatorname{sh} g; \quad (5.29)$$

$$I_1 = \dot{U}_2 \frac{1}{\sqrt{Z_{x1} Z_{x2}}} \operatorname{sh} g + I_2 \sqrt{\frac{Z_{x2}}{Z_{x1}}} \operatorname{ch} g.$$

Это уравнение несимметричного четырехполюсника с параметрами передачи.

Характеристические сопротивления Z_{x1} и Z_{x2} обладают тем свойством, что при нагрузке четырехполюсника со стороны выходных зажимов на сопротивление Z_{x2} его входное сопротивление равно Z_{x1} и наоборот.

При нагрузке четырехполюсника со стороны входных зажимов на сопротивление $Z_r = Z_{x1}$ и со стороны выходных зажимов на сопротивление $Z_n = Z_{x2}$ изменение напряжения и тока от входа к выходу определяется собственной постоянной передачи:

$$g = a + jb.$$

Это случай согласованного подключения генератора и приемника к несимметричному четырехполюснику.

Для несимметричной схемы можно подобрать сопротивление нагрузки одного из концов так, что входное сопротивление на другом конце будет равно сопротивлению нагрузки. Такое сопротивление называют повторным сопротивлением четырехполюсника.

Иногда повторные сопротивления принимают за характеристики схемы. При нагрузке четырехполюсника на повторное сопротивление изменение напряжения и тока определяется повторной постоянной передачи: $g_{\text{повт}} \neq g$.

В уравнениях (5.28) в коэффициенты A и D входит коэффициент трансформации для характеристических сопротивлений в двух встречных направлениях. Поэтому всякий несимметричный четырехполюсник можно представить в виде соединения (рис. 5.5) симметричного четырехполюсника и идеального трансформатора с коэффициентом трансформации: $n = \sqrt{Z_{x2}/Z_{x1}}$.

Схема Г. Простым примером обратимого несимметричного четырехполюсника может служить схема Г (рис. 5.6, а). Непосредственно из схемы найдем:

$$Z_{кз1,2} = Z_1/2; \quad Z_{xx1,2} = (Z_1/2) + 2Z_2;$$

$$Z_{x1} = Z_T = \sqrt{Z_{кз1,2} Z_{xx1,2}} = \sqrt{Z_1 Z_2 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right)}; \quad (5.30)$$

$$Z_{кз3,4} = \frac{\frac{Z_1}{2} 2Z_2}{\frac{Z_1}{2} + 2Z_2}; \quad Z_{xx3,4} = 2Z_2;$$

$$Z_{x2} = Z_\Pi = \sqrt{Z_{кз3,4} Z_{xx3,4}} = \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 + (Z_1/4Z_2)}}. \quad (5.31)$$

Рассмотренные ранее симметричные схемы Т и П и схема Г являются частями более сложных цепочечных схем (рис. 5.6, б), при этом схемы Т и П называют звеньями, а схему Г — полужвенном.

В связи с этим постоянную передачи полужвена обозначим $g/2$:

$$\operatorname{th} \frac{g}{2} = \sqrt{\frac{Z_{кз,12}}{Z_{xx1,2}}} = \sqrt{\frac{Z_{кз3,4}}{Z_{xx3,4}}} = \sqrt{\frac{Z_1/(4Z_2)}{1 + (Z_1/4Z_2)}}; \quad (5.32)$$

$$\operatorname{sh} \frac{g}{2} = \sqrt{Z_1/4Z_2}; \quad \operatorname{ch} \frac{g}{2} = \sqrt{1 + Z_1/4Z_2}.$$

Параметры передачи необратимого четырехполюсника. Необратимый четырехполюсник характеризуется удовлетворением его параметров A, B, C, D соотношению $AD - BC = K^2 \neq 1$.

Как было показано при рассмотрении цепочечного соединения четырехполюсников, необратимый четырехполюсник можно представить как цепочечное соединение обратимого четырехполюсника с матрицей:

$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A/k & B/k \\ C/k & D/k \end{pmatrix}$$

и идеального преобразователя мощности с матрицей

$$\begin{pmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Идеальный преобразователь мощности характеризуется соотношениями: $\dot{U}_1 = k\dot{U}_2$; $\dot{I}_1 = k\dot{I}_2$, из которых следует, что этот преобразователь не меняет отношения напряжения к току, поскольку для него справедливо равенство $\dot{U}_1/\dot{I}_1 = \dot{U}_2/\dot{I}_2$, но изменяет мощность, так как $\dot{U}_1\dot{I}_1 = S_1 = k^2\dot{U}_2\dot{I}_2 = k^2S_2$.

Поскольку идеальный преобразователь мощности не меняет отношения напряжения к току, его подключение не влияет на характеристические сопротивления обратимого четырехполюсника, соединенного

с ним. Характеристические сопротивления необратимого четырехполюсника можно таким образом определять по формулам (5.21) и (5.23).

Постоянная передачи необратимого четырехполюсника в каждом из направлений передачи определяется суммой постоянной передачи обратимого четырехполюсника, которую можно найти по формуле (5.22) или (5.24), и постоянной передачи идеального преобразователя мощности в данном направлении.

Идеальный преобразователь мощности имеет две постоянные передачи:

при передаче от входа к выходу

$$\frac{1}{2} \ln \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2} \ln k^2 = \ln k;$$

при передаче от выхода к входу

$$\frac{1}{2} \ln \frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{k^2} = -\ln k.$$

Две постоянные передачи необратимого четырехполюсника:

$$g_{12} = g + \ln k, \quad (5.33)$$

$$g_{21} = g - \ln k. \quad (5.34)$$

Отсюда

$$g = 0,5 (g_{12} + g_{21}). \quad (5.35)$$

Выразив параметры $ABCD$ четырехполюсника через сопротивления холостого хода, найдем, что

$$k^2 = Z_{12}/Z_{21}. \quad (5.36)$$

Имея это в виду, получим:

$$g_{12} = g + \frac{1}{2} \ln \frac{Z_{12}}{Z_{21}}; \quad (5.37)$$

$$g_{21} = g - \frac{1}{2} \ln \frac{Z_{12}}{Z_{21}}. \quad (5.38)$$

Логарифмические характеристики звеньев систем регулирования, управления и связи. При использовании параметров передачи g и Z_x для описания свойств четырехполюсников следует учитывать две особенности: волновую трактовку явлений и применение логарифмических характеристик.

Уравнения четырехполюсника, содержащие параметры передачи, дают полную физическую характеристику передающей системы. Односторонне характеризуемый четырехполюсник, в котором рассматриваются связи только между одной из входных и одной из выходных величин, мы условились называть звеном (см. §. 2.21). При описании передающих свойств звеньев часто используют функцию передачи $F = y/x$, которая может быть безразмерной или иметь размерность сопротивления или проводимости. Функция передачи $\bar{F}(p)$ или $F(\omega)$ часто является комплексной величиной, которую можно представлять в алгебраической и показательной формах.

В первом случае

$$F(\omega) = A(\omega) + jB(\omega), \quad (5.39)$$

во втором

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\theta(\omega)}. \quad (5.40)$$

Здесь также возможно применение логарифмических характеристик:

$$\ln F(\omega) = \ln |F(\omega)| + j\theta(\omega). \quad (5.41)$$

В частности, для согласованно нагруженного четырехполюсника:

$$\begin{aligned} F &= \dot{U}_2 / \dot{U}_1 = e^g; \\ \ln F &= -g - jb. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Таким образом, логарифмической характеристикой звена является комплексный коэффициент усиления. Действительная часть логарифмической характеристики представляет собой усиление, выраженное в логарифмических единицах.

5.2. РАБОЧИЕ ПАРАМЕТРЫ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА И ВЫРАЖЕНИЕ ИХ ЧЕРЕЗ СОБСТВЕННЫЕ ПАРАМЕТРЫ ПЕРЕДАЧИ

Входное сопротивление четырехполюсника является его рабочим параметром и равно отношению напряжения к току на его входе. Эта величина представляет собой то сопротивление, которое является нагрузкой генератора, подключенного к четырехполюснику. Можно говорить о входном сопротивлении $Z_{вх1}$ со стороны входных зажимов и о входном сопротивлении $Z_{вх2}$ со стороны выходных зажимов; последнее иногда называют также выходным сопротивлением. Входное сопротивление четырехполюсника, схема и параметры элементов которого известны, можно вычислить методом контурных токов.

В соответствии с обозначениями, принятыми в главе 2, входное сопротивление $Z_{вх1} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1 = \Delta / \Delta_{i1}$.

Выражение для входного сопротивления через параметры передачи можно получить, если в уравнениях (5.29) напряжение \dot{U}_2 заменить произведением $Z_H \dot{I}_2$ и поделить \dot{U}_1 на \dot{I}_1 :

$$Z_{вх} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{Z_H \sqrt{Z_{x1}/Z_{x2}} \operatorname{ch} g + \sqrt{Z_{x1} Z_{x2}} \operatorname{sh} g}{\frac{Z_H}{\sqrt{Z_{x1} Z_{x2}}} \operatorname{sh} g + \sqrt{\frac{Z_{x2}}{Z_{x1}}} \operatorname{ch} g}. \quad (5.43)$$

Разделим числитель и знаменатель выражения (5.43) на $\sqrt{Z_{x1}/Z_{x2}} \times \operatorname{ch} g$:

$$\begin{aligned} Z_{вх1} &= \frac{Z_H + Z_{x2} \operatorname{th} g}{(Z_H/Z_{x1}) \operatorname{th} g + (Z_{x2}/Z_{x1})} = Z_{x1} \operatorname{cth} g \frac{Z_H + Z_{x2} \operatorname{th} g}{Z_H + Z_{x2} \operatorname{cth} g} = \\ &= Z_{xx1,2} \frac{Z_H + Z_{кз3,4}}{Z_H + Z_{xx3,4}}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

По выражению (5.44) удобно определять входное сопротивление существующих цепей, так как оно позволяет по результатам измерений $Z_{кз}$ и $Z_{хх}$ рассчитать входное сопротивление цепи при любой нагрузке Z_H на выходе.

Сопротивление передачи $Z_{пер} = \dot{U}_1/\dot{I}_2$ (или приведенное сопротивление $Z_{прив} = \dot{E}_1/\dot{I}_2$) является вторым рабочим параметром четырехполюсника. Найдем общее выражение для $Z_{пер}$ несимметричного четырехполюсника. Заменяя в первом из уравнений (5.29) \dot{U}_2 на $Z_H \dot{I}_2$, получим:

$$\dot{U}_1 = \left(Z_H \sqrt{\frac{Z_{x1}}{Z_{x2}}} \operatorname{ch} g + \sqrt{Z_{x1} Z_{x2}} \operatorname{sh} g \right) \dot{I}_2.$$

Тогда сопротивление передачи

$$Z_{пер} = \dot{U}_1/\dot{I}_2 = Z_H \sqrt{Z_{x1}/Z_{x2}} \operatorname{ch} g + \sqrt{Z_{x1} Z_{x2}} \operatorname{sh} g. \quad (5.45)$$

При согласованной нагрузке, т. е. когда $Z_H = Z_{x2}$,

$$Z_{пер} = \sqrt{Z_{x1} Z_{x2}} e^g \quad (5.46)$$

и для согласованно нагруженного симметричного четырехполюсника, в котором $Z_{x1} = Z_{x2} = Z_x = Z_H$,

$$Z_{пер} = Z_x e^g. \quad (5.47)$$

Сопротивление передачи особенно удобно при рассмотрении четырехполюсных систем с активным характеристическим сопротивлением, включенных между согласованными активными нагрузками. В этом случае

$$Z_x = R_x; Z_H = R_H; Z_{пер} = Re^g. \quad (5.48)$$

Если принять R за единицу, что равносильно его нормированию, то $Z_{пер} = e^g$, и тогда $g = \ln Z_{пер}$.

Вместо сопротивления передачи можно пользоваться величиной $Y_{пер} = 1/Z_{пер}$, называемой проводимостью передачи.

В ряде практически важных случаев при определении условий передачи от входа системы к выходу требуется учитывать сопротивление генератора и различие между \dot{U}_1 и \dot{E}_1 , где \dot{E}_1 — э. д. с. генератора. При этом часто удобнее пользоваться так называемым приведенным сопротивлением $Z_{прив} = \dot{E}_1/\dot{I}_2$.

Формулу для приведенного сопротивления четырехполюсника можно получить, выразив в уравнениях четырехполюсника (5.29) \dot{U}_1 через $\dot{E}_1 = Z_r \dot{I}_1$ и решив эти уравнения относительно \dot{E}_1/\dot{I}_2 . Тогда

$$Z_{прив} = \left(Z_r \sqrt{\frac{Z_{x2}}{Z_{x1}}} + Z_H \sqrt{\frac{Z_{x1}}{Z_{x2}}} \right) \operatorname{ch} g + \left(\sqrt{Z_{x1} Z_{x2}} + \frac{Z_r Z_H}{\sqrt{Z_{x1} Z_{x2}}} \right) \operatorname{sh} g. \quad (5.49)$$

При $Z_r = 0$ приведенное сопротивление преобразуется в сопротивление передачи.

От величины $Z_{\text{прив}}$ можно перейти к рабочим коэффициентам передатчи $K_{ру}$, $K_{рл}$, K_p . Вместо k_p можно пользоваться рабочей постоянной передачи $g_{\text{раб}}$:

$$g_{\text{раб}} = \frac{1}{2} \ln k_p^2 = \ln k_p = \ln \frac{Z_{\text{прив}}}{2 \sqrt{Z_{\Gamma} Z_{\text{H}}}} \quad (5.50)$$

Величины $Z_{\text{прив}}$, k_p и $g_{\text{раб}}$ являются разновидностями второго после $Z_{\text{вх}}$ рабочего параметра четырехполюсника. Все они равноценны, и использование одного из них вызывается только удобствами решения той или иной конкретной задачи.

В частности, при синтезе четырехполюсников с заданными частотными зависимостями затухания и фазового сдвига полезной бывает формула для рабочей постоянной передачи симметричного четырехполюсника. Из формулы (5.50), подставляя в нее значение $Z_{\text{прив}}$ из выражения (5.48) и полагая четырехполюсник симметричным $Z_{x1} = Z_{x2} = Z_x$ и нагрузки одинаковыми $Z_{\Gamma} = Z_{\text{H}} = R$, найдем

$$\begin{aligned} g_{\text{раб}} &= \frac{1}{2} \ln k_p^2 = \frac{1}{2} \ln \left\{ \text{ch } g + \left(\frac{Z_x}{2R} + \frac{R}{2Z_x} \right) \text{sh } g \right\}^2 = \\ &= \ln \left\{ \text{ch } g + \left(\frac{Z_x}{2R} + \frac{R}{2Z_x} \right) \text{sh } g \right\}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Выражение (5.51) широко используется в теории фильтров.

5.3. ВОЛНОВЫЕ МАТРИЦЫ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Введение собственных параметров передачи четырехполюсников есть распространение методов расчета цепей с распределенными параметрами на любые четырехполюсные цепи. Как уже было замечено, последние характеризуются в основном волновой трактовкой явлений и применением логарифмических характеристик. Эти два приема не являются взаимосвязанными и могут быть использованы независимо друг от друга.

Волновая трактовка режима генератора. Генератор с э. д. с. E и внутренним сопротивлением R_{Γ} при условии согласованной нагрузки будет отдавать приемнику мощность

$$S_0 = E^2 / (4R_{\Gamma}).$$

Можно считать, что это мощность волны, падающей на приемник с сопротивлением R_{H} из линии с волновым сопротивлением $Z_{\text{в}} = Z_{\Gamma}$.

Напряжение этой волны

$$\dot{U}_{\text{пад}} = \sqrt{S_0 Z_{\text{в}}} = E/2,$$

а ток

$$\dot{I}_{\text{пад}} = E / (2R_{\Gamma}).$$

Если к выходу линии с волновым сопротивлением $Z_{\text{в}} = R_{\Gamma}$ подключить приемник с сопротивлением R_{H} , то коэффициент отражения на выходе

$$\eta = \frac{R_{\text{H}} - Z_{\text{в}}}{R_{\text{H}} + Z_{\text{в}}} = \frac{R_{\text{H}} - R_{\Gamma}}{R_{\text{H}} + R_{\Gamma}}.$$

Напряжение отраженной волны

$$\dot{U}_{\text{отр}} = \eta \dot{U}_{\text{пад}} = \frac{\dot{E}}{2} \frac{R_{\text{H}} - R_{\Gamma}}{R_{\text{H}} + R_{\Gamma}}$$

и ее ток

$$\dot{i}_{\text{отр}} = \eta \dot{i}_{\text{пад}} = \frac{\dot{E}}{2R_{\Gamma}} \frac{R_{\text{H}} - R_{\Gamma}}{R_{\text{H}} + R_{\Gamma}}.$$

Если к генератору подключить сопротивление R_{H} , то напряжение и ток нагрузки

$$\dot{U}_{\text{H}} = \dot{E} R_{\text{H}} / (R_{\text{H}} + R_{\Gamma}); \quad \dot{i}_{\text{H}} = \dot{E} / (R_{\text{H}} + R_{\Gamma}).$$

Любой реальный режим цепи при волновой трактовке процессов можно представить как наложение падающих и отраженных волн.

Используя волновую трактовку, получим:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{\text{H}} = \dot{U}_{\text{пад}} + \dot{U}_{\text{отр}} &= \frac{\dot{E}}{2} + \eta \frac{\dot{E}}{2} = \frac{\dot{E} R_{\text{H}}}{R_{\text{H}} + R_{\Gamma}}; \\ \dot{i}_{\text{H}} = \dot{i}_{\text{пад}} - \dot{i}_{\text{отр}} &= \frac{\dot{E}}{2R_{\Gamma}} - \eta \frac{\dot{E}}{2R_{\Gamma}} = \frac{\dot{E}}{R_{\text{H}} + R_{\Gamma}}. \end{aligned}$$

Волновая трактовка режима четырехполюсника. Напряжения и токи на входе и выходе четырехполюсника могут быть представлены суммой (разностью) напряжений и токов падающих и отраженных волн.

Коэффициенты, связывающие эти величины, объединяют в матрицы, называемые волновыми матрицами четырехполюсника. По аналогии с линией используют: матрицу передачи (T) и матрицу рассеяния (S). Как и для линии, выделим матрицу передачи четырехполюсника из его матрицы (A):

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{Z_{\text{X1}}}{Z_{\text{X2}}} \operatorname{ch} g - \sqrt{Z_{\text{X1}} Z_{\text{X2}}} \operatorname{sh} g} \\ \sqrt{\frac{1}{Z_{\text{X1}} Z_{\text{X2}}} \operatorname{sh} g - \sqrt{\frac{Z_{\text{X2}}}{Z_{\text{X1}}} \operatorname{ch} g} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{Z_{\text{X1}}}{Z_{\text{X2}}} (e^g + e^{-g}) - \sqrt{Z_{\text{X1}} Z_{\text{X2}}} (e^g - e^{-g})} \\ \frac{1}{\sqrt{Z_{\text{X1}} Z_{\text{X2}}} (e^g - e^{-g}) - \sqrt{\frac{Z_{\text{X2}}}{Z_{\text{X1}}} (e^g + e^{-g})} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{Z_{\text{X1}}} & \sqrt{Z_{\text{X1}}} \\ \frac{1}{\sqrt{Z_{\text{X1}}}} & \frac{-1}{\sqrt{Z_{\text{X1}}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^g & 0 \\ 0 & e^{-g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{Z_{\text{X2}}}} & \sqrt{Z_{\text{X2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{Z_{\text{X2}}}} & -\sqrt{Z_{\text{X2}}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Преобразования, осуществляемые первой и третьей матрицами, есть переход от полных напряжений и токов к нормированным напряжениям падающих и отраженных волн и обратно. Вторая матрица является волновой матрицей передачи согласованно нагруженного четырехполюсника.

Поскольку рассматривается несимметричный четырехполюсник с разными характеристическими сопротивлениями Z_{x1} и Z_{x2} со стороны входа и выхода, переход от полных напряжений и токов к волнам и обратно сопровождается нормированием величин по разным сопротивлениям.

Со стороны выхода

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{Z_{x2}}} & \sqrt{Z_{x2}} \\ \frac{1}{\sqrt{Z_{x2}}} & -\sqrt{Z_{x2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{U}_2}{\sqrt{Z_{x2}}} + \sqrt{Z_{x2}} i_2 \\ \frac{\dot{U}_2}{\sqrt{Z_{x2}}} - \sqrt{Z_{x2}} i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{U}_{\text{пад}2}}{\sqrt{Z_{x2}}} \\ \frac{\dot{U}_{\text{отр}2}}{\sqrt{Z_{x2}}} \end{pmatrix}.$$

Со стороны входа нормирование осуществляется по сопротивлению Z_{x1} .

Для симметричного согласованно включенного с обоих концов четырехполюсника нормирование матрицы (T) и (S) имеют вид:

$$(T) = \begin{pmatrix} e^g & 0 \\ 0 & e^{-g} \end{pmatrix}; \quad (5.52)$$

$$(S) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-g} \\ e^{-g} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.53)$$

Из равенств (5.52) и (5.53) следует, что любой элемент волновых матриц согласованного четырехполюсника есть параметр передачи четырехполюсника g , использованный в нелогарифмическом масштабе.

Выражения волновых матриц через параметры четырехполюсника. В общем случае элементы матриц (T) и (S) могут быть выражены через различные системы параметров четырехполюсника.

Основные соотношения, связывающие напряжения и токи с напряжениями падающих и отраженных волн для нормированных значений последних, имеют вид:

$$\dot{U}/\sqrt{Z} = \dot{U}_{\text{пад}} + \dot{U}_{\text{отр}} = \dot{U}; \quad \sqrt{Z}i = \dot{U}_{\text{пад}} - \dot{U}_{\text{отр}} = \dot{I}. \quad (5.54)$$

Обратные соотношения

$$\dot{U}_{\text{пад}} = 0,5 (\dot{U} + \dot{I}); \quad \dot{U}_{\text{отр}} = 0,5 (\dot{U} - \dot{I}). \quad (5.55)$$

Соотношения (5.54) и (5.55) справедливы соответственно для входов линии и четырехполюсника и для их выходов. Для входа

$$\dot{U}_{\text{пад}1} = 0,5 (\dot{U}_1 + \dot{I}_1); \quad \dot{U}_{\text{отр}1} = 0,5 (\dot{U}_1 - \dot{I}_1). \quad (5.56)$$

Заметим, что $\dot{U}_1 = Z_{11} \dot{I}_1 - Z_{12} \dot{I}_2$.
 Это первое из уравнений (2.28), в котором условное направление тока \dot{I}_2 приведено в соответствие с таковыми в уравнениях (2.42) и все величины предполагаются нормированными.

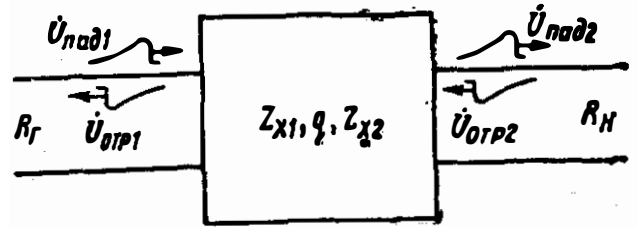


Рис. 5.7

Подставляя последнее равенство в уравнения (2.42), получим:

$$\dot{U}_{пад1} = 0,5 (Z_{11} \dot{I}_1 - Z_{12} \dot{I}_2 + \dot{I}_1) = 0,5 (Z_{11} + 1) \dot{I}_1 - 0,5 Z_{12} \dot{I}_2; \quad (5.57)$$

$$\dot{U}_{отр1} = 0,5 (Z_{11} \dot{I}_1 - Z_{12} \dot{I}_2 - \dot{I}_1) = 0,5 (Z_{11} - 1) \dot{I}_1 - 0,5 Z_{12} \dot{I}_2. \quad (5.58)$$

При нормировании $\dot{U}_1 / \sqrt{R_{\Gamma}}$ и $\sqrt{R_{\Gamma}} \dot{I}_1$ определенные последними выражениями волны есть: $\dot{U}_{пад1}$ — падающая на вход четырехполюсника и $\dot{U}_{отр1}$ — отраженная от его входа волна (рис. 5.7). Соответственно для конца линии

$$\dot{U}_{пад2} = 0,5 (\dot{U}_2 + \dot{I}_2); \quad \dot{U}_{отр2} = 0,5 (\dot{U}_2 - \dot{I}_2). \quad (5.59)$$

Подставляя в формулы (5.59) с учетом условного направления \dot{I}_2 нормированное значение из выражения (2.28): $\dot{U}_2 = Z_{21} \dot{I}_1 - Z_{22} \dot{I}_2$, найдем:

$$\dot{U}_{пад2} = 0,5 Z_{21} \dot{I}_1 - 0,5 (Z_{22} - 1) \dot{I}_2; \quad (5.60)$$

$$\dot{U}_{отр2} = 0,5 Z_{21} \dot{I}_1 - 0,5 (Z_{22} + 1) \dot{I}_2.$$

Здесь вследствие нормирования $\dot{U}_2 / \sqrt{R_{\Pi}}$ и $\sqrt{R_{\Pi}} \dot{I}_2$ величина $\dot{U}_{пад2}$ есть волна, входящая в приемник.

Матрица передачи (T) связывает $\dot{U}_{пад1}$ и $\dot{U}_{отр1}$ с $\dot{U}_{пад2}$ и $\dot{U}_{отр2}$:

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_{пад1} \\ \dot{U}_{отр1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{\Pi\Pi} & T_{\Pi\text{O}} \\ T_{\text{O}\Pi} & T_{\text{O}\text{O}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_{пад2} \\ \dot{U}_{отр2} \end{pmatrix}.$$

Имеем:

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_{пад1} \\ \dot{U}_{отр1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 (Z_{11} + 1) & -0,5 Z_{12} \\ 0,5 (Z_{11} - 1) & -0,5 Z_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}; \quad (5.61)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_{пад2} \\ \dot{U}_{отр2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 Z_{21} & -0,5 (Z_{22} - 1) \\ 0,5 Z_{21} & -0,5 (Z_{22} + 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}.$$

Решая последнее матричное равенство относительно токов, найдем:

$$\begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 Z_{21} & -0,5 (Z_{22} - 1) \\ 0,5 Z_{21} & -0,5 (Z_{22} + 1) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{U}_{пад2} \\ \dot{U}_{отр2} \end{pmatrix}. \quad (5.62)$$

Подставляя равенство (5.62) в первое уравнение (5.61), получим:

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_{пад1} \\ \dot{U}_{отр1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (Z_{11} + 1) & -Z_{12} \\ (Z_{11} - 1) & -Z_{12} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Z_{21} & -(Z_{22} - 1) \\ Z_{21} & -(Z_{22} + 1) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{U}_{пад2} \\ \dot{U}_{отр2} \end{pmatrix}. \quad (5.63)$$

Для определения элементов матрицы в степени -1 следует решить систему уравнений (5.60).

Вычисления дают

$$(T) = \frac{1}{2Z_{21}} \begin{pmatrix} (1+Z_{11})(1+Z_{22}) - Z_{12}Z_{21} & (1+Z_{11})(1-Z_{22}) + Z_{12}Z_{21} \\ -(1-Z_{11})(1+Z_{22}) - Z_{12}Z_{21} & -(1-Z_{11})(1-Z_{22}) + Z_{12}Z_{21} \end{pmatrix}. \quad (5.64)$$

Аналогично находим:

$$(T) = -\frac{1}{2Y_{21}} \begin{pmatrix} (1+Y_{11})(1+Y_{22}) - Y_{12}Y_{21} & -(1+Y_{11})(1-Y_{22}) - Y_{12}Y_{21} \\ (1-Y_{11})(1+Y_{22}) + Y_{12}Y_{21} & -(1-Y_{11})(1-Y_{22}) + Y_{12}Y_{21} \end{pmatrix}. \quad (5.65)$$

Из сравнения выражений (2.123) и (5.64) следует, что $T_{\Pi\Pi} = 0,5 \times \times Z_{\text{прив норм}} = k_p$.

Матрица (T) есть матрица рабочих параметров четырехполюсника, величины R_r и R_n входят в них, но не явно, так как в результате нормирования они превращены в единицу.

Матрица рассеивания (S) связывает величины $\dot{U}_{\text{отр1}}$ и $\dot{U}_{\text{пад2}}$ с $\dot{U}_{\text{пад1}}$ и $\dot{U}_{\text{отр2}}$:

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_{\text{отр1}} \\ \dot{U}_{\text{пад2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{0\Pi} & S_{00} \\ S_{\Pi\Pi} & S_{\Pi 0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_{\text{пад1}} \\ \dot{U}_{\text{отр2}} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица аналогична матрице (3.68).

Поступая аналогично определению матрицы (T) , найдем:

$$(S) = \frac{1}{Z_{12}Z_{21} - (1+Z_{11})(1+Z_{22})} \times \begin{pmatrix} (1-Z_{11})(1+Z_{22}) + Z_{12}Z_{21} & -2Z_{12} \\ -2Z_{21} & (1+Z_{11})(1-Z_{22}) + Z_{12}Z_{21} \end{pmatrix}; \quad (5.66)$$

$$(S) = \frac{1}{(1+Y_{11})(1+Y_{22}) - Y_{12}Y_{21}} \times \begin{pmatrix} (1-Y_{11})(1+Y_{22}) + Y_{12}Y_{21} & -2Y_{12} \\ -2Y_{21} & (1+Y_{11})(1-Y_{22}) + Y_{12}Y_{21} \end{pmatrix}. \quad (5.67)$$

Между коэффициентами волновых матриц, кроме соотношений, указанных в § 3.5, для чисто реактивных четырехполюсников существует связь:

$$|S_{\Pi\Pi}|^2 = 1 - |S_{0\Pi}|^2, \quad (5.68)$$

выражающая равенство пришедшей к приемнику мощности падающей за вычетом отраженной на входе.

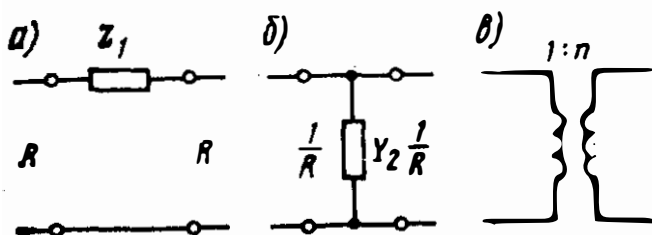


Рис. 5.8

Волновые параметры четырехполюсников с успехом применяют при синтезе частотных фильтров и других четырехполюсников цепей с заданными передаточными свойствами.

Волновые матрицы простейших четырехполюсников. Из общих выражений (5.64)—(5.67) получается:

для неполного четырехполюсника (рис. 5.8, а) при $Z = Z_1/R$:

$$(S) = \begin{pmatrix} \frac{Z}{2+Z} & \frac{2}{2+Z} \\ \frac{2}{2+Z} & \frac{Z}{2+Z} \end{pmatrix}; \quad (5.69)$$

$$(T) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{Z}{2} & -\frac{Z}{2} \\ \frac{Z}{2} & 1 - \frac{Z}{2} \end{pmatrix}; \quad (5.70)$$

для неполного четырехполюсника (рис. 5.8, б) при $Y = Y_2R$:

$$(S) = \begin{pmatrix} \frac{-Y}{2+Y} & \frac{2}{2+Y} \\ \frac{2}{2+Y} & \frac{-Y}{2+Y} \end{pmatrix}; \quad (5.71)$$

$$(T) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{Y}{2} & \frac{Y}{2} \\ -\frac{Y}{2} & 1 - \frac{Y}{2} \end{pmatrix}; \quad (5.72)$$

для идеального трансформатора (рис. 5.8, в) при $n = \omega_2/\omega_1 = \sqrt{Z_2/Z_1}$:

$$(S) = \begin{pmatrix} \frac{1-n^2}{1+n^2} & \frac{2n}{1+n^2} \\ \frac{2n}{1+n^2} & \frac{n^2-1}{1+n^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2} & \frac{2Z_1 Z_2}{Z_1+Z_2} \\ \frac{2Z_1 Z_2}{Z_1+Z_2} & \frac{Z_2-Z_1}{Z_1+Z_2} \end{pmatrix}; \quad (5.73)$$

$$(T) = \begin{pmatrix} \frac{n^2+1}{2n} & \frac{1-n^2}{2n} \\ \frac{1-n^2}{2n} & \frac{n^2+1}{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Z_1+Z_2}{2\sqrt{Z_1 Z_2}} & \frac{Z_1-Z_2}{2\sqrt{Z_1 Z_2}} \\ \frac{Z_1-Z_2}{2\sqrt{Z_1 Z_2}} & \frac{Z_1+Z_2}{2\sqrt{Z_1 Z_2}} \end{pmatrix}. \quad (5.74)$$

Как видно из рассмотренных примеров, преимущество волновых матриц (S) и (T) перед параметрами передачи g и Z_x заключается в том, что они могут быть определены и для таких четырехполюсников g и Z_x , для которых не существуют, так как параметры $Z_{кз}$ и $Z_{хх}$ для них не находят.

Волновые матрицы цепочечного соединения четырехполюсников представляют собой произведение соответствующих матриц четырехполюсников, входящих в это соединение.

Глава 6

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ ЧАСТОТНЫМИ И ВРЕМЕННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

6.1. УСТРОЙСТВА СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ В СИСТЕМАХ ТЕЛЕМЕХАНИКИ И СВЯЗИ

В любой системе телемеханики и связи из применяющихся в народном хозяйстве страны вообще и на железнодорожном транспорте в частности можно выделить, по крайней мере, две основные части: устройства сбора и распределения информации и устройства передачи ее на расстояние.

Указанные устройства должны обеспечивать передачу по любым линиям связи (проводным, радио или смешанным) заданного количества информации с заданной верностью в условиях подверженности искажениям и воздействиям посторонних электромагнитных процессов — помех. Обе эти задачи (передача необходимого количества информации и обеспечение ее верности) решают использованием в передающих устройствах сигналов специальной формы, обеспечивающей их устойчивость при передаче в условиях наличия искажений и помех, и применений в приемниках специальных устройств, восстанавливающих по возможности переданные сигналы обработкой принятых. Как при формировании сигналов в передающих устройствах, так и при восстановлении их в приемных в качестве основных наряду с электронными цифровыми находят применение специальные аналоговые электрические цепи с соответствующими характеристиками.

В широком смысле любые устройства, преобразующие электрические сигналы, называют **ф и л ь т р а м и**. Электрические цепи (в них могут быть применены разные базовые элементы, в том числе и активные), используемые для получения сигналов определенной формы, называют **ф о р м и р у ю щ и м и** фильтрами. Цепи, наилучшим в каком-то смысле образом восстанавливающие сигналы в приемных устройствах, называют **о п т и м а л ь н ы м и** фильтрами.

Для отделения сигналов друг от друга или помех в тех случаях, когда и те и другие содержат частотные составляющие, занимающие непрерывающиеся полосы частот, используют **ч а с т о т н ы е** фильтры. Эти фильтры появились раньше других, нашли наиболее широкое распространение и подробно рассматриваются далее.

При передаче сигналов по цепям проводных линий связи вследствие зависимости от частоты затухания и фазовой скорости (или, что то же самое, времени распространения) происходит изменение их формы — искажение. Для устранения этих искажений или уменьшения их до допустимого значения в тракт передачи сигналов включают **к о р р е к т о р ы**, придающие характеристике затухания и фазы желательную

форму. Корректоры, как и частотные фильтры, можно встретить в любых системах передачи сигналов.

Частотные фильтры. В соответствии с местоположением полосы пропускаемых частот частотные фильтры делят на фильтры нижних частот (ФНЧ), фильтры верхних частот (ФВЧ), полосовые фильтры (ПФ) и режекторные фильтры (РФ). Все эти термины поясняются рис. 6.1. На рисунке полосы пропускания частотных фильтров показаны резко ограниченными частотами среза $\omega_{ср}$, за которыми идет полоса задерживания. В реальных частотных электрических фильтрах с изменением частоты переход от пропускания к непропусканию всегда происходит более или менее плавно и тем плавней, чем проще схема фильтра и больше потери в ее элементах.

Фильтры из пассивных элементов подразделяют на цепочечные, построенные по схемам Т, П и Г, и мостовые, выполненные по схеме моста. В зависимости от используемых элементов фильтры классифицируют на rC (рис. 6.2, а), LC (рис. 6.2, б), кварцевые, магнито-стрикционные, электромеханические и т. д.

Фильтры, образованные только из элементов rC (пассивные фильтры rC), имеют худшие, чем у фильтров LC , фильтрующие свойства. Для простейших ФНЧ это различие иллюстрируется рис. 6.2, в. Однако, если цепи rC использовать совместно с усилительными элементами в соединении с обратной связью, можно получать так называемые активные фильтры rC , характеристики которых не уступают фильтрам LC .

Рассмотрим использование частотных фильтров для разделения сигналов, передаваемых одновременно по общей линии. Разделение сигналов возможно, если их спектры занимают разные неперекрывающиеся полосы частот. Это свойство имеют сигналы $u_1(t)$ и $u_2(t)$, спектры которых $\dot{U}_1(f)$ и $\dot{U}_2(f)$ показаны на рис. 6.3, а. На рис. 6.3, б приведены характеристики затухания $a_1(f)$ и $a_2(f)$ двух фильтров. Первый приспособлен для пропускания частотных составляющих $u_1(t)$ и задерживания частотных составляющих $u_2(t)$; второй — наоборот. Характеристики затухания $a_1(f)$ и $a_2(f)$ соответственно у ФНЧ и ФВЧ, простейшие схемы которых приведены на рис. 6.3, в. На

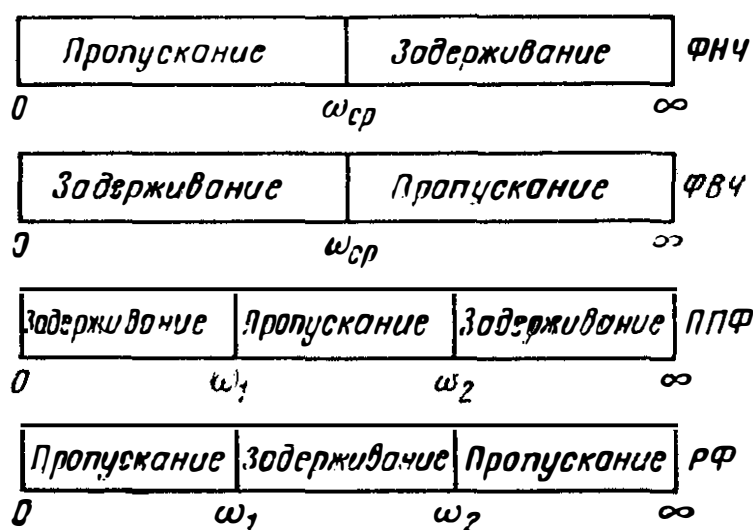


Рис. 6.1

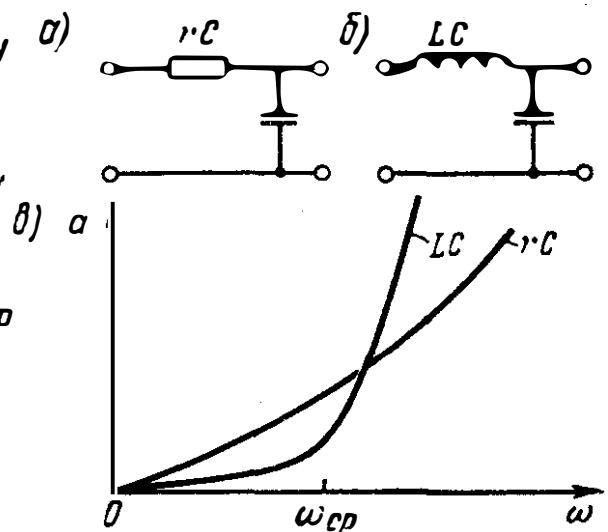


Рис. 6.2

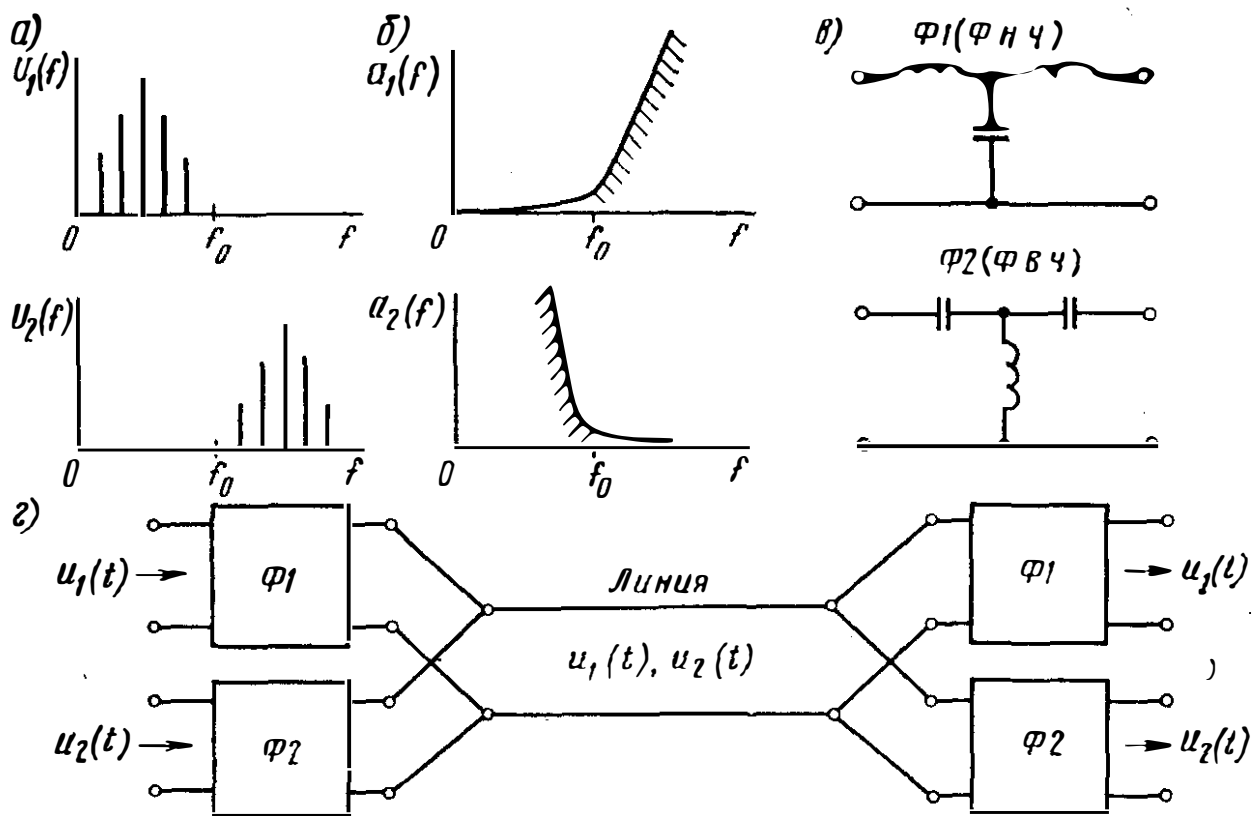


Рис. 6.3

рис. 6.3, г показано включение фильтров в линию, при котором возможна одновременная и независимая передача двух сигналов.

При применении полосовых фильтров с соответственно сдвинутыми полосами пропускания могут быть одновременно переданы многие сигналы. Частотные электрические фильтры используют также для отделения сигналов от помех, ограничения частотного спектра сигналов, устранения переменных составляющих напряжений питания.

Свойства фильтров пропускать или задерживать гармонические колебания с разными частотами характеризуются частотной зависимостью какой-либо функции передачи, определяющей изменение амплитуды колебания при прохождении его через фильтр. Практически используют:

модуль функции передачи фильтра

$$|F(\omega)| = \left| \frac{\dot{U}_2(\omega)}{\dot{U}_1(\omega)} \right|;$$

логарифмическую амплитудно-частотную характеристику фильтра в децибелах

$$L(\omega) = 20 \lg |F(\omega)|;$$

затухание фильтра, в неперах,

$$a(\omega) = \ln \left| \frac{\dot{U}_1(\omega)}{\dot{U}_2(\omega)} \right| = \ln \frac{1}{|F(\omega)|};$$

в децибелах,

$$a(\omega) = 20 \lg \left| \frac{\dot{U}_1(\omega)}{\dot{U}_2(\omega)} \right| = 20 \lg \frac{1}{|F(\omega)|}.$$

Зависимости $|F(\omega)|$, $L(\omega)$ и $a(\omega)$ для простейшего фильтра нижних частот приведены на рис. 6.4.

Корректоры амплитудно- и фазочастотных искажений. Способ выбора характеристик корректоров на примере корректора амплитудно-частотных искажений поясняется рис. 6.5, где показано (рис. 6.5, а) включение корректора с затуханием $a_k(\omega)$ — между системой передачи и приемником. Предполагается, что включение согласовано. В этом случае затухание всего соединения для каждой частоты сигнала равно сумме затуханий корректора и системы передачи.

Зная, как зависит от частоты затухание системы передачи $a_n(\omega)$, можно подобрать $a_k(\omega)$ так, чтобы их сумма не была функцией частоты (рис. 6.5, б). Простейшая схема корректора, затухание которого увеличивается с возрастанием частоты тока, приведена на рис. 6.6, а. Корректоры фазочастотных искажений должны без ослабления передавать все частотные составляющие сигналов с изменением их фазы. Простейший пример такой цепи приведен на рис. 6.6, б.

Формирующие устройства. Примерами простых, но весьма распространенных в электронной аппаратуре цепей для получения сигналов определенной формы могут служить интегрирующие и дифференцирующие цепи, рассмотренные в § 1.6.

В системах телемеханики и связи все чаще применяют сигналы, состоящие из последовательности узких импульсов. Спектр напряжения узких импульсов занимает соответственно широкую полосу частот. Ее сужение приводит к расширению импульсов, необходимости увеличения расстояния между ними и замедлению передачи. Важной практической задачей является формирование импульсов, являющихся по возможности узкими, спектр которых занимал бы в то же время возможно узкую полосу частот. Этому условию удовлетворяют импульсы так называемой колокольной формы. Схема, используемая для формирования таких импульсов, элементы которой подбирают специальным образом, приведена на рис. 6.7.

Приведенные примеры иллюстрируют разнообразие задач по построению электрических цепей с заданными характеристиками. Свой-

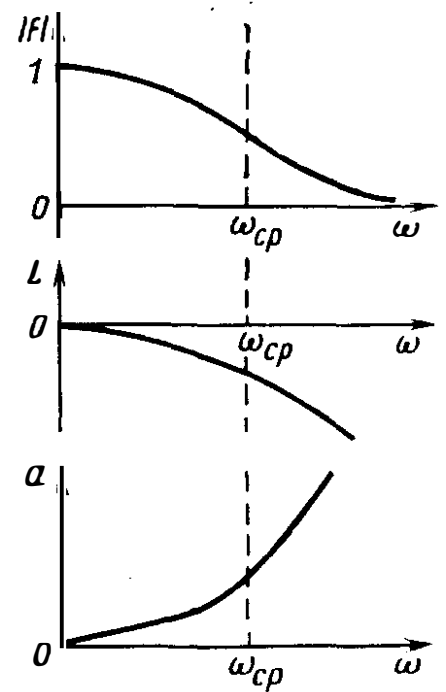


Рис. 6.4

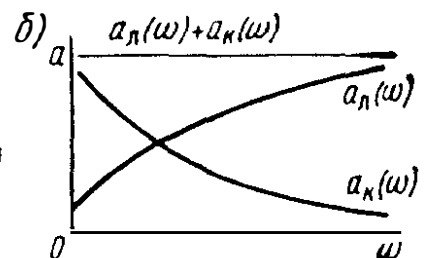
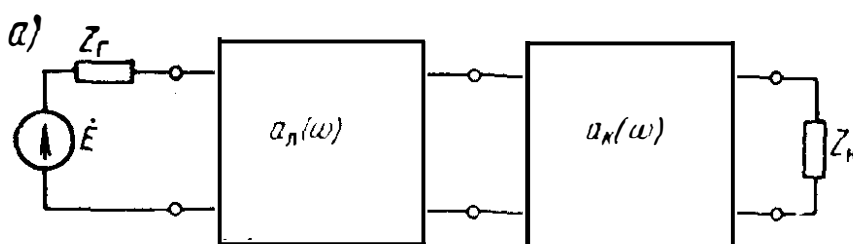


Рис. 6.5

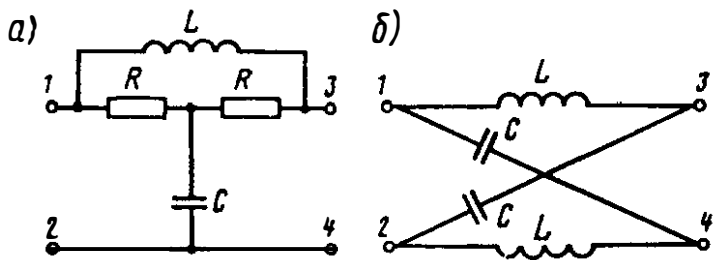


Рис. 6.6

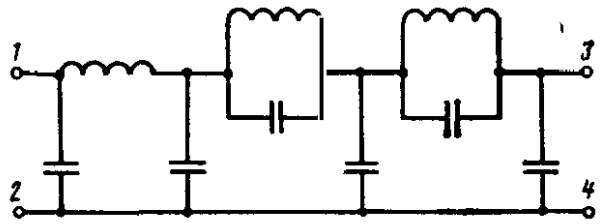


Рис. 6.7

ства любой цепи, как известно, могут быть определены по разным эквивалентным и взаимозаменяемым характеристикам: частотной, операторной, временной. Их применяют при синтезе цепей, однако методы синтеза цепей по частотным (операторным) характеристикам разработаны значительно более полно и пока практически чаще используются.

Сознательное и активное применение разнообразных методов построения цепей с заданными характеристиками с использованием определенных условиями задачи базовых элементов невозможно без знания свойств этих элементов, их простейших соединений и способов построения цепей со сложными характеристиками из цепей с простыми. Поэтому далее сначала рассматриваются частотные зависимости сопротивлений и проводимостей двухполюсных цепей и методы их синтеза, а затем — простые и более сложные фильтры и корректоры, их характеристики и методы синтеза.

6.2. ЧАСТОТНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ СОПРОТИВЛЕНИЙ И ПРОВОДИМОСТЕЙ ДВУХПОЛЮСНЫХ ЦЕПЕЙ rC И МЕТОДЫ ИХ ИССЛЕДОВАНИЯ

Параметры передачи четырехполюсника будут зависеть от частоты, если двухполюсные цепи, образующие его, содержат реактивные элементы L или C .

Характер зависимостей параметров передачи различных четырехполюсных схем от частоты можно установить по соотношениям (5.11) — (5.20), связывающим значения параметров Z_x и g с сопротивлениями, образующими схемы, подставляя в эти выражения функции $Z_1(\omega)$ и $Z_2(\omega)$, или непосредственно по последним. Во всех случаях необ-

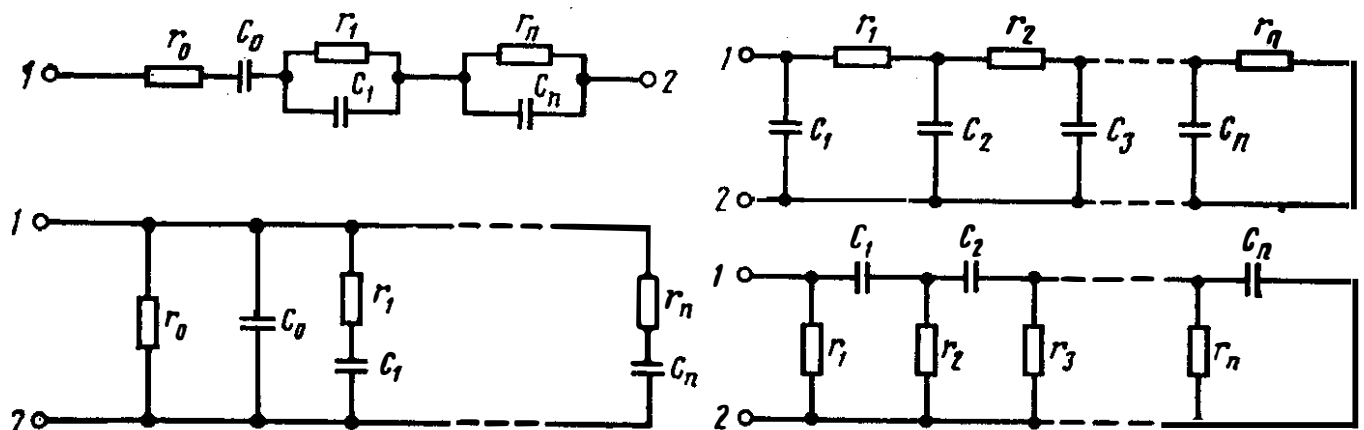


Рис. 6.8

ходимо знание зависимостей сопротивлений (или проводимостей) двухполюсников от частоты.

Наиболее распространены двухполюсники rC и LC (реактивные), рассмотрением которых мы и ограничимся.

Как было показано в § 2.10, двухполюсная цепь rC может быть построена по одной из четырех схем (рис. 6.8). Любая из них при соответствующем подборе значений r_i и C_i может дать одинаковые зависимости сопротивления от частоты.

Входное сопротивление каждой цепи rC уменьшается с увеличением частоты тока. В цепи, пропускающей постоянный ток, это уменьшение начинается с некоторого значения r , а в непр пропускающей, — с бесконечно большого его значения. Усложняя схему, можно влиять на степень этого уменьшения. При последовательно включенном в схеме сопротивлении r уменьшение ее входного сопротивления происходит до значения r , при параллельно включенной емкости C — до нуля. Если рассматривать $Z(\omega)$, полагая в соответствии с физическим смыслом частоту вещественным переменным, то для цепей, содержащих реактивные элементы, будем получать комплексные величины $Z(\omega)$. Например, $Z(\omega) = r + j\omega L$ есть комплексная величина, характеризуемая вещественной и мнимой частями или модулем и углом. Если рассматривать $Z(p)$, полагая p вещественным, что является формальным приемом и соответствует предположению о том, что частота принимает мнимые значения, то $Z(p)$ оказывается вещественным. Например, $Z(p) = r + pL$ при всех вещественных p вещественно. Рассмотрение $Z(p)$ во многих случаях удобно и, как известно, широко используется.

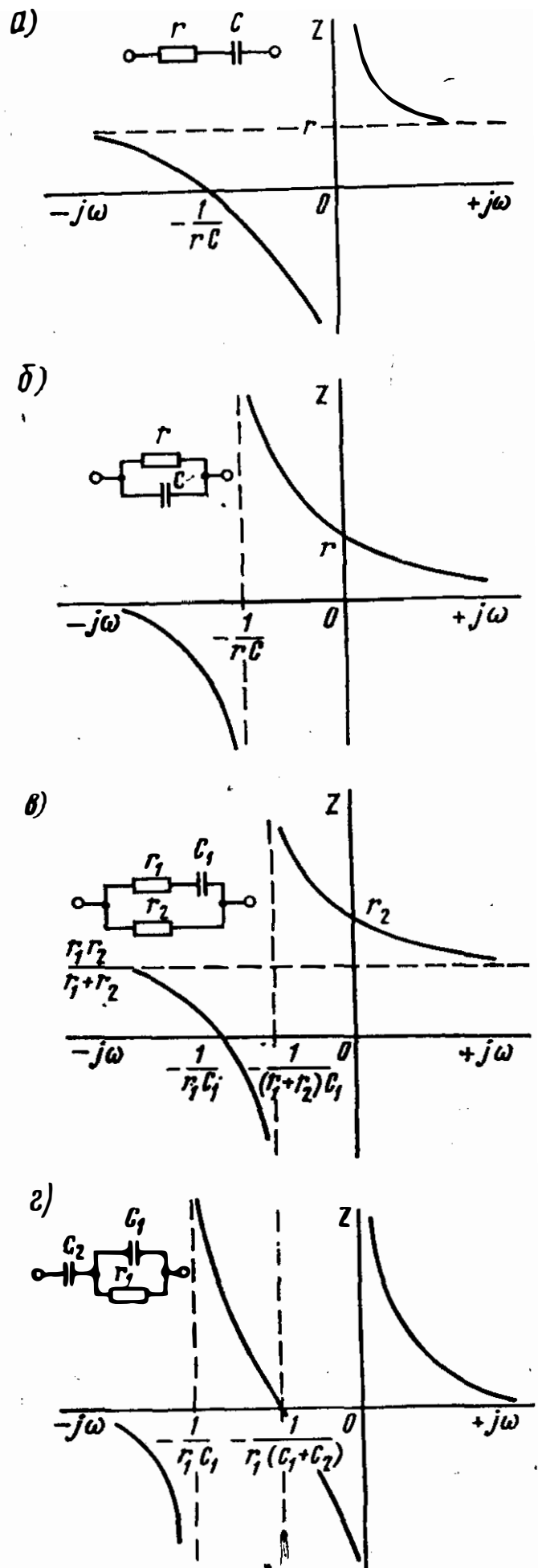


Рис. 6.9

Функции, отображающие свойства входных сопротивлений цепей с точностью до постоянного множителя, определяются своими полюсами и нулями, а цепи rC имеют нули и полюсы на мнимых отрицательных частотах. Поэтому свойства цепей rC принято характеризовать графиками $Z(p)$. Так, цепь с сопротивлением $Z(p) = r + 1/(pC)$ имеет полюс сопротивления при $p = 0$ и нуль сопротивления при $p = -1/(rC)$. Сопротивление $Z(p)$ этой схемы при положительных p (что соответствует положительным значениям ω) изменяется от ∞ до r (рис. 6.9. а).

Цепь с сопротивлением

$$Z(p) = \frac{1}{(1/r) + pC} = \frac{r}{1 + prC} \quad (6.1)$$

имеет полюс сопротивления при $p = -1/(rC)$ и нуль при $p = \infty$. Из графика $Z(p)$ (рис. 6.9, б) видно, что на положительных частотах $Z(p)$ меняется от r до нуля.

Цепь (рис. 6.9, в) с сопротивлением

$$Z(p) = \frac{r_2 \left(r_1 + \frac{1}{pC_1} \right)}{r_1 + r_2 + \frac{1}{pC_1}} = \frac{r_2 + pr_1 r_2 C_1}{1 + p(r_1 + r_2) C_1} \quad (6.2)$$

имеет полюс сопротивления при $p = -1/(r_1 + r_2) C_1$ и нуль сопротивления при $p = -1/(r_1 C_1)$. На положительных частотах $Z(p)$ меняется от r_2 до $r_1 r_2 / (r_1 + r_2)$.

Цепь (рис. 6.9, г) с сопротивлением

$$Z(p) = \frac{1}{pC_2} + \frac{r_1}{1 + pr_1 C_1} = \frac{1 + pr_1 (C_1 + C_2)}{pC_2 (1 + pr_1 C_1)} \quad (6.3)$$

имеет полюсы сопротивления при $p = 0$ и $p = -1/(r_1 C_1)$ и нуль сопротивления при $p = -1/[r_1 (C_1 + C_2)]$. На положительных частотах $Z(p)$ меняется от бесконечности до нуля.

Рассмотренные цепи представляют собой четыре типа зависимостей сопротивления цепи rC от частоты на положительных частотах. Усложнение схем увеличивает число особых точек на отрицательных частотах и повышает порядок кривых на положительных.

Общий вид выражения $Z(p)$ для таких цепей представляет собой рациональную дробь:

$$Z(p) = \frac{A_n p^n + A_{n-1} p^{n-1} + \dots + A_0}{B_m p^m + B^{m-1} p^{m-1} + \dots + B_0}, \quad (6.4)$$

свойства которой были рассмотрены в § 2.9.

6.3. ЧАСТОТНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ СОПРОТИВЛЕНИЙ РЕАКТИВНЫХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ И ПРИЕМЫ ИХ ИССЛЕДОВАНИЯ

Электрические цепи с двумя зажимами, состоящие из катушек индуктивности и конденсаторов, потери в которых не учитывают, называют реактивными двухполюсниками. Их можно

строить по тем же каноническим схемам, что и цепи rC . Сопротивления и проводимости реактивных двухполюсников содержат только реактивные составляющие x или b и имеют нули и полюсы на положительных вещественных частотах. Поэтому их принято характеризовать графиками $x(\omega)$ или $b(\omega)$.

Напомним, что двухполюсники с одинаковыми частотными зависимостями сопротивления называют эквивалентными. Если произведение сопротивлений двух двухполюсников не зависит от частоты, то такие двухполюсники называют взаимно обратными.

Сложность двухполюсников определяется числом входящих в него элементов. Различают двухполюсники одно-, двух-, трехэлементные и т. д. Число элементов в двухполюснике считают по числу конденсаторов и катушек индуктивности, остающихся после возможного упрощения схемы.

Простейшие одноэлементные двухполюсники. Схемы этих двухполюсников, графики зависимости их сопротивления от частоты, а также условное их изображение с указанием расположения нулей и полюсов функции сопротивления на оси частот приведены на рис. 6.10. Схема реактивного двухполюсника, его график $x = x(\omega)$, аналитическое выражение $Z(\omega) = jx(\omega)$ и схема расположения нулей и полюсов функции сопротивления в равной степени могут характеризовать его свойства.

Рассматриваемые два одноэлементных двухполюсника являются взаимно обратными, что непосредственно видно из выражения

$$Z_1(\omega) Z_2(\omega) = j\omega L \frac{1}{j\omega C} = \frac{L}{C}. \quad (6.5)$$

Эти двухполюсники имеют обратные зависимости сопротивлений от частоты.

Двухэлементные двухполюсники. Схемы двухэлементных двухполюсников, графики зависимости их сопротивлений от частоты и расположение особых точек приведены на рис. 6.11. Указанные двухполюсники представляют собой контуры резонансов напряжений и токов и на одинаковых резонансных частотах представляют собой обратные двухполюсники. Для доказательства этого составим аналитические выражения их сопротивлений. Для последовательного соединения L и C

$$Z_1(\omega) = j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = j \frac{L_1}{\omega} (\omega^2 - \omega_1^2), \quad (6.6)$$

где

$$\omega_1^2 = 1/(L_1 C_1).$$

Для параллельного соединения L и C

$$Z_2(\omega) = \frac{1}{j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega L_2}} = \frac{\omega}{jC_2} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_2^2)}, \quad (6.7)$$

где

$$\omega_2^2 = 1/(L_2 C_2).$$

Из выражений (6.6) и (6.7) следует, что

$$Z_1(\omega) Z_2(\omega) = \frac{L_1}{C_2} \frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega^2 - \omega_2^2};$$

при $\omega_1 = \omega_2$ $Z_1(\omega)Z_2(\omega) = L_1/C_2$.

Произведение сопротивлений не зависит от частоты, и, следовательно, двухполюсники взаимно обратны при равенстве резонансных частот, т. е. элементы контуров подобраны так, что выполняется условие $L_1 C_1 = L_2 C_2$.

Из выражений (6.6) и (6.7) также следует, что сопротивления двух резонансных контуров, настроенных на одну и ту же резонансную частоту, отличаются только постоянным множителем. Выражения (6.6) и (6.7) наглядно характеризуют зависимость сопротивлений двухэлементных двухполюсников от частоты.

Трехэлементные двухполюсники. Из трех реактивных элементов можно составить четыре различные схемы двухполюсников (рис. 6.12). Трехэлементные двухполюсники попарно образуют две группы: двухполюсники, входящие в одну группу, имеют однородные свойства, входящие в разные группы, — противоположные.

Например, двухполюсники 1 и 2 пропускают постоянный ток, принятый за ток с нулевой частотой, и оказывают токам с высокими частотами большое сопротивление. Двухполюсники 3 и 4 постоянный ток не пропускают и имеют малое сопротивление на высоких частотах.

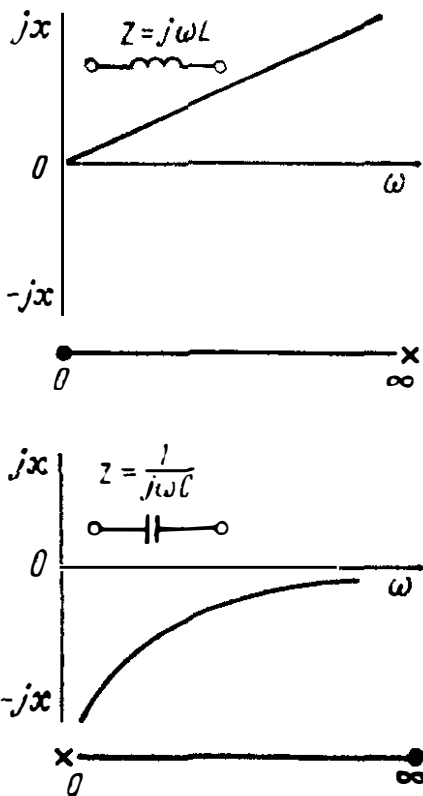


Рис. 6.10

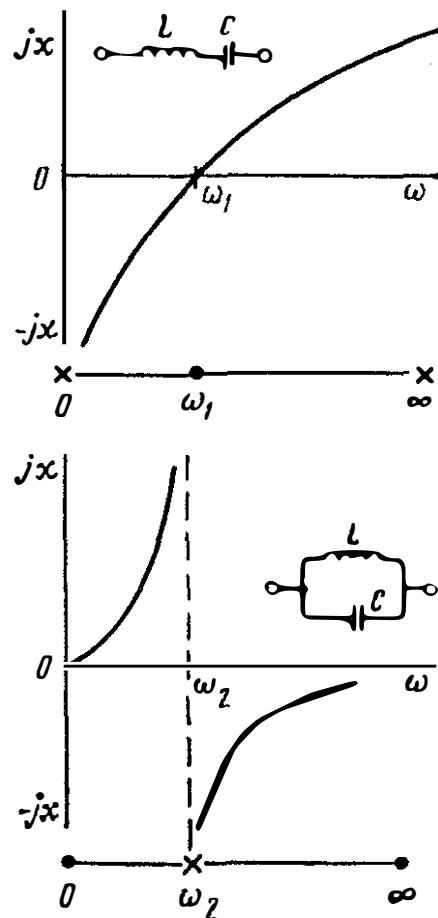


Рис. 6.11

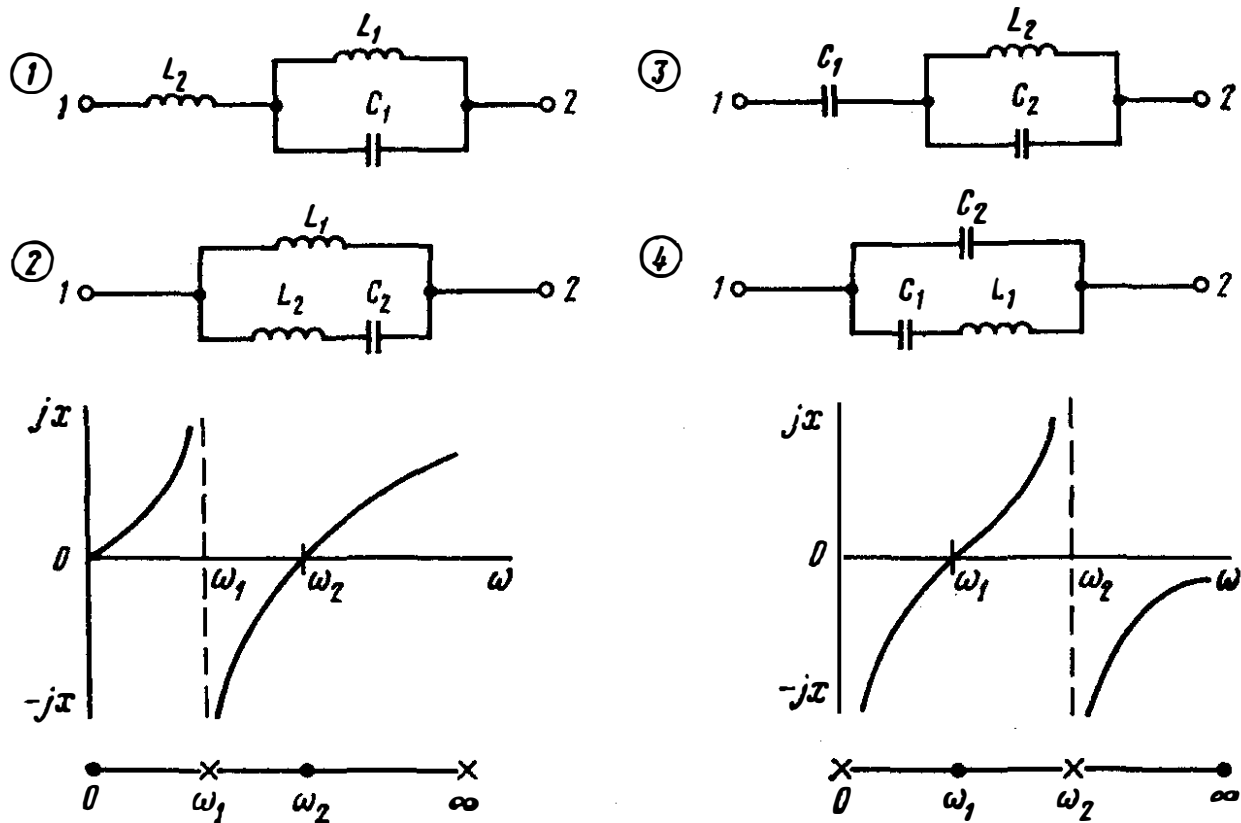


Рис. 6.12

На этом же рисунке приведены графики зависимости сопротивления от частоты соответственно двухполюсников одной и другой групп и показано расположение их особых точек.

Поясним порядок построения графиков на примере двухполюсника 1. При постоянном токе (нулевой частоте) сопротивление двухполюсника равно нулю. На резонансной угловой частоте параллельного соединения $\omega_1 = 1/\sqrt{L_1 C_1}$ сопротивление двухполюсника становится неограниченно большим и скачком меняет знак. Преобладающая до сих пор индуктивная проводимость делается меньше емкостной, которая существует на частотах выше резонансных; таким образом, наблюдается резонанс токов.

Так как на угловых частотах, превышающих ω_1 , сопротивление параллельно соединенных L_1 и C_1 имеет емкостной характер и уменьшается с увеличением частоты, то на некоторой угловой частоте ω_2 наступит равенство сопротивления контура $L_1 C_1$ индуктивному сопротивлению $\omega_2 L_2$ — резонанс напряжений.

Заметим, что резонансная частота ω_1 в то же время является частотой собственных колебаний в цепи, образованной параллельным соединением $L_1 C_1$. Такие собственные колебания возможны при разомкнутых внешних зажимах 1 и 2. Угловая частота резонанса ω_2 определяется условием

$$\omega_2 L_2 = \frac{\omega_2}{C_1} \frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2},$$

откуда

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = \frac{1}{L_2 C_1}; \quad \omega_2^2 = \frac{1}{L_2 C_1} + \frac{1}{L_1 C_1} = \frac{1}{\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} C_1}. \quad (6.8)$$

Резонансная частота ω_2 в соответствии с формулой (6.8) есть частота собственных колебаний в цепи, образованной соединением индуктивности $L_1 L_2 / (L_1 + L_2)$ и емкости C_1 . Колебания с частотой ω_2 возможны в двухполюснике при закорачивании внешних зажимов. Нетрудно видеть, что в этом случае индуктивности L_1 и L_2 соединяются параллельно, образуя индуктивность $L_1 L_2 / (L_1 + L_2)$.

На угловой частоте ω_2 сопротивление всего двухполюсника обращается в нуль. С дальнейшим увеличением частоты сопротивление контура LC_1 продолжает уменьшаться, а сопротивление ωL_2 растет; полное же сопротивление двухполюсника будет неограниченно возрастать.

Аналогичными рассуждениями устанавливается общий характер зависимости сопротивления от частоты и для двухполюсников 3, 4 с той только разницей, что здесь катушки индуктивности и конденсаторы меняются местами. Соответственно первым резонансом будет резонанс напряжения, вторым — резонанс токов.

Кривые, приведенные на рис. 6.12, можно построить также суммированием кривых, входящих в схему сопротивлений двухполюсников 1 и 3 или проводимостей ветвей двухполюсников 2 и 4.

Двухполюсники 1 и 2 потенциально обратны двухполюсникам 3 и 4. Покажем это, рассмотрев аналитические выражения их сопротивлений.

Для двухполюсника 1

$$Z_1(\omega) = j\omega L_2 + \frac{\omega}{jC_1} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_1^2)}.$$

Вынося за скобки $j\omega L_2$ и заменяя $1/(L_2 C_1)$ согласно выражению (6.8) на $\omega_2^2 - \omega_1^2$, получим

$$Z_1(\omega) = j\omega L_2 \left(1 - \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega^2 - \omega_1^2} \right) = j\omega L_2 \frac{(\omega^2 - \omega_2^2)}{(\omega^2 - \omega_1^2)}. \quad (6.9)$$

Частота резонанса ω_1 двухполюсников 3, 4 определяется из условия обращения в нуль проводимости. Это дает

$$\frac{1}{\omega_1 L_1} = - \frac{\omega_1}{L_2 (\omega_1^2 - \omega_2^2)},$$

откуда

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 \frac{L_2}{L_1 + L_2} = \frac{1}{L_2 C_2} \frac{L_2}{L_1 + L_2} = \frac{1}{(L_1 + L_2) C_2}. \quad (6.10)$$

Полная проводимость рассматриваемого двухполюсника 2:

$$Y_2(\omega) = \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{\omega}{jL_2 (\omega^2 - \omega_2^2)} \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)}{j\omega \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} (\omega^2 - \omega_2^2)};$$

$$Z_2(\omega) = j\omega \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \frac{(\omega^2 - \omega_2^2)}{(\omega^2 - \omega_1^2)}. \quad (6.11)$$

Частота резонанса двухполюсника 3 $\omega_2 = 1/\sqrt{L_2 C_2}$, а частота резонанса ω_1 определяется из условия обращения в нуль сопротивления. Это дает

$$\frac{1}{\omega_1 C_1} = -\frac{\omega_1}{C_2 (\omega_1^2 - \omega_2^2)},$$

откуда

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 \frac{C_2}{C_1 + C_2}, \text{ или } \omega_1^2 = \frac{1}{L_2 (C_1 + C_2)}. \quad (6.12)$$

$$Z_3(\omega) = \frac{1}{j\omega C} + \frac{\omega}{jC_2} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_2^2)} = \frac{1}{j\omega} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)}{(\omega^2 - \omega_2^2)}. \quad (6.13)$$

Частота резонанса двухполюсника 4 $\omega_1 = 1/\sqrt{L_1 C_1}$, а частота резонанса ω_2 определяется из условия обращения в нуль проводимости:

$$\omega_2 C_2 = \frac{-\omega^2}{L_1 (\omega_2^2 - \omega_1^2)}; \quad \omega_2^2 = \omega_1^2 + \frac{1}{L_2 C_2} = \frac{1}{L_1 \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}; \quad (6.14)$$

$$Z_4(\omega) = \frac{1}{j\omega C_2} \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)}{(\omega^2 - \omega_2^2)}. \quad (6.15)$$

Сопоставляя выражения (6.9)—(6.15), можно видеть, что при соответствующем подборе элементов двухполюсники 1 и 2 эквивалентны друг другу и обратны двухполюсникам 3 и 4.

Все трехэлементные двухполюсники имеют по две резонансные частоты, одна из которых совпадает с частотой собственных колебаний, возникающих при разомкнутых внешних зажимах, другая — с частотой собственных колебаний, имеющих место при замкнутых внешних зажимах двухполюсника.

Числовой множитель, входящий в выражения для $Z(\omega)$, определяется по поведению цепи при $\omega \rightarrow \infty$. Так, сопротивление, например, $Z_2(\omega)$, определяемое выражением (6.11), при $\omega \rightarrow \infty$ сводится к $j\omega L_1 L_2 / (L_1 + L_2)$, что можно установить и непосредственно по схеме (см. рис. 6.8).

Сопротивление двухполюсника 4 $Z_4(\omega)$ [см. выражение (6.15)] при $\omega \rightarrow \infty$ будет $1/(j\omega C_2)$, что также непосредственно следует из схемы, приведенной на рис. 6.12.

Четырехэлементные двухполюсники. Вариантов схем различных четырехэлементных двухполюсников может быть восемь. Все делятся на две группы по четыре двухполюсника со сходными свойствами, каждый двухполюсник одной группы имеет свойства, противоположные двухполюсникам другой.

Схемы четырехэлементных двухполюсников (представителей обеих групп), графики частотной зависимости их сопротивлений и расположение особых точек приведены на рис. 6.13, схемы четырехэлементных двухполюсников, не пропускающих постоянный ток, — на рис. 6.14. Каждый из них представляет собой параллельное или после-

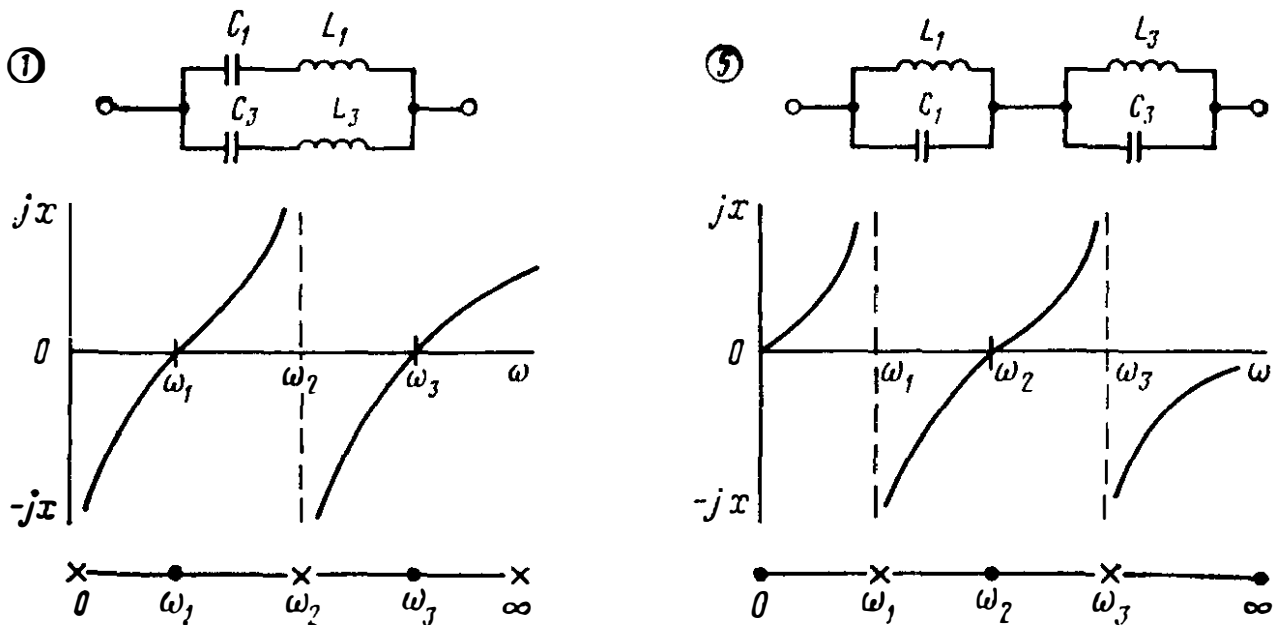


Рис. 6.13

довательное соединение более простых двухполюсников, рассмотренных ранее. Составим выражение для сопротивлений этих двухполюсников. Поскольку зависимость сопротивлений от угловой частоты для каждого из них содержит два нуля (два резонанса напряжений) и один полюс (резонанс токов) на конечных угловых частотах (полюс при $\omega = 0$ и полюс при $\omega = \infty$), то общее выражение сопротивления по аналогии с соотношениями (6.6), (6.7), и (6.9), (6.13) имеет вид:

$$Z(\omega) = jk \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2)}{\omega(\omega^2 - \omega_2^2)}, \quad (6.16)$$

где k — постоянный множитель, зависящий от значений элементов схемы. Как отмечалось, его можно определить по поведению $Z(\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$.

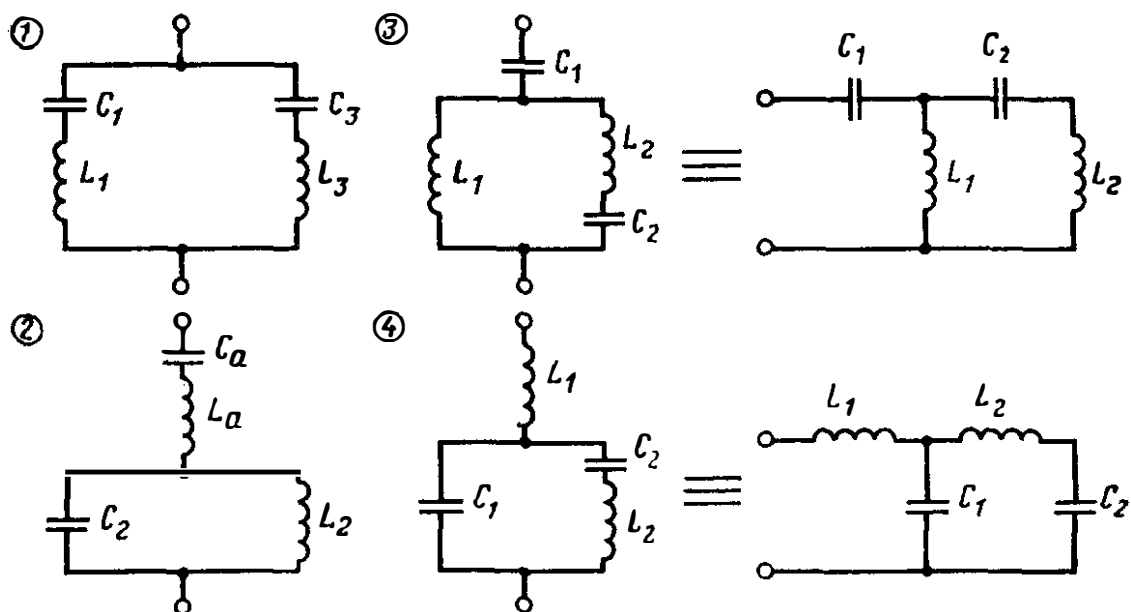


Рис. 6.14

Так, например, для схемы 1 сопротивление двухполюсника при $\omega \rightarrow \infty$ определяется параллельно соединенными индуктивностями L_1 и L_3 :

$$Z(\omega) = j\omega \frac{L_1 L_3}{L_1 + L_3}. \quad (6.17)$$

Сопоставляя выражения (6.16) и (6.17), найдем, что $k = L_1 L_3 / (L_1 + L_3)$.

Исходя из этой же схемы, представляющей собой параллельное соединение двух ветвей, с учетом соотношения (6.6) имеем:

$$Y(\omega) = Y_1(\omega) + Y_2(\omega) = \frac{\omega}{jL_1} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_1^2)} + \frac{\omega}{jL_3} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_3^2)}. \quad (6.18)$$

Частоты резонансов здесь определены непосредственно элементами двухполюсника. Частота резонанса токов находится из условия обращения в нуль проводимости и определяется выражением

$$\omega_2^2 = \frac{1}{(L_1 + L_3) \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}. \quad (6.19)$$

Величина ω_2 представляет собой частоту собственных колебаний в цепи, образованной последовательным соединением L_1 , L_3 , C_1 , C_2 . Такие колебания возможны при разомкнутых внешних зажимах рассматриваемого двухполюсника.

Выражение (6.18) есть разложение правильной дроби

$$Y(\omega) = \frac{1}{Z(\omega)} = \frac{\omega(\omega^2 - \omega_2^2)}{jk(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2)}$$

на простые.

Для двухполюсника 2, представляющего собой последовательное соединение двухэлементных двухполюсников, с учетом соотношений (6.6) и (6.7) найдем:

$$Z(\omega) = \frac{jL_a}{\omega} (\omega^2 - \omega_a^2) + \frac{\omega}{jC_2} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_2^2)}. \quad (6.20)$$

Формула (6.20) есть результат выделения простой дроби из выражения (6.16).

Для двухполюсника 3

$$Z(\omega) = \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}}}. \quad (6.21)$$

Это есть выражение (6.16), представленное в виде цепной дроби делением при расположении слагаемых многочленов по возрастающим степеням ω .

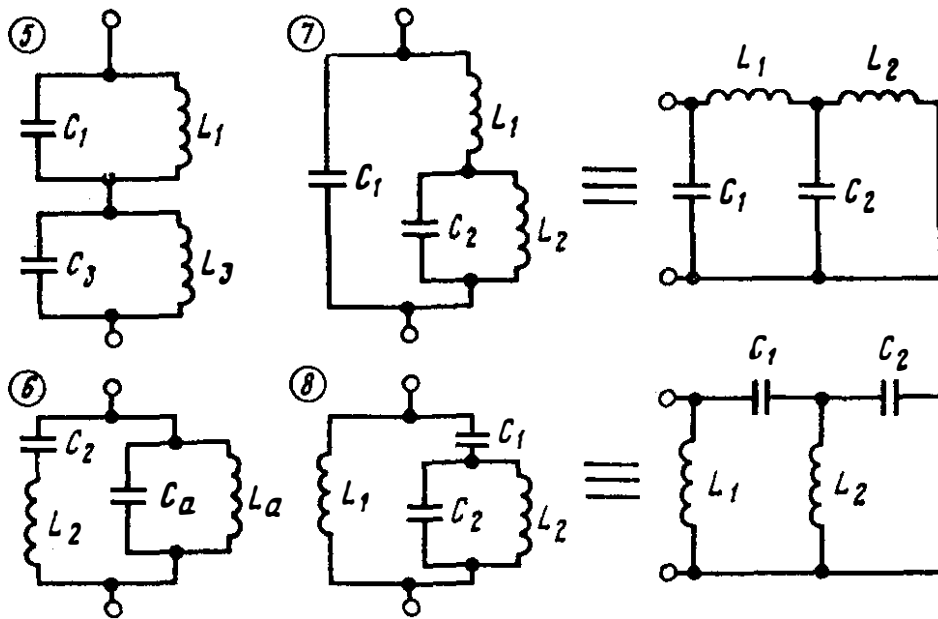


Рис. 6.15

Для схемы двухполюсника 4 аналогично имеем:

$$Y(\omega) = \frac{1}{j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}}}} \quad (6.22)$$

Таким образом, четыре схемы потенциально эквивалентных четырехэлементных двухполюсников являются четырьмя каноническими схемами.

Схемы четырехэлементных двухполюсников, пропускающих постоянный ток, приведены на рис. 6.15.

Общее выражение для сопротивления рассматриваемых двухполюсников

$$Z(\omega) = k \frac{\omega}{j} \frac{(\omega^2 - \omega_2^2)}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2)} \quad (6.23)$$

Непосредственно для двухполюсника 5

$$Z(\omega) = \frac{\omega}{jC_1(\omega^2 - \omega_1^2)} + \frac{\omega}{jC_3(\omega^2 - \omega_3^2)} \quad (6.24)$$

Равенство (6.24) есть разложение дроби (6.23) на простые дроби. Для двухполюсника 6

$$Y(\omega) = \frac{\omega}{jL_2(\omega^2 - \omega_2^2)} + \frac{jC_a(\omega^2 - \omega_a^2)}{\omega} \quad (6.25)$$

Соотношение (6.25) есть результат выделения простой дроби из выражения (6.23).

Для двухполюсника 7

$$Z(\omega) = \frac{1}{j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega L_2}}}} \quad (6.26)$$

Выражение (6.26) есть представление дроби (6.23) в виде цепной дроби.

Для двухполюсника 8

$$Y(\omega) = \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega L_2}}} \quad (6.27)$$

Рассмотренные четыре схемы также соответствуют четырем каноническим схемам.

Общие свойства реактивных двухполюсников. Изложенное позволяет сформулировать ряд положений, характеризующих общие свойства реактивных двухполюсников:

число резонансов любого реактивного двухполюсника на конечных частотах на единицу меньше числа элементов в нем (с учетом того, что на частотах $\omega = 0$ и $\omega = \infty$ сопротивления и проводимости равны нулю или бесконечно велики, считают, что на оси частот $0 \leq \omega \leq \infty$ число резонансов на единицу больше числа элементов).

для любого реактивного двухполюсника существуют взаимно-обратный и эквивалентный двухполюсники;

зависимость сопротивления любого двухполюсника от частоты можно представить выражением

$$Z(\omega) = \pm jk\omega^{\pm 1} \frac{\prod_{p=1}^m (\omega^2 - \omega_p^2)}{\prod_{q=1}^n (\omega^2 - \omega_q^2)} \quad (6.28)$$

где Π — знак произведения повторяющихся сомножителей;

m — число частот резонансов напряжений;

n — число частот резонансов токов.

В выражении (6.28) один многочлен четный, а другой — нечетный. Это обстоятельство является отличительной особенностью функций входных сопротивлений или входных проводимостей реактивных двухполюсников;

два реактивных сопротивления, принимающих значения нуля и бесконечности на одних и тех же частотах, могут различаться только постоянным множителем k .

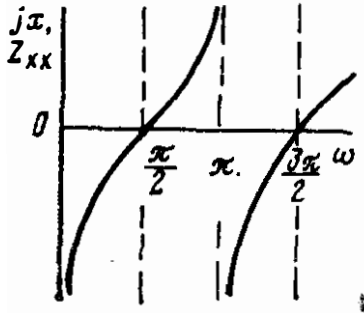
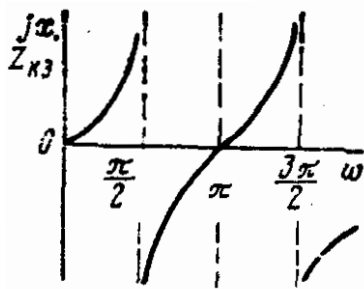


Рис. 6.16

Отрезки линий как реактивные двухполюсники. В § 3.3 было установлено, что входные сопротивления короткозамкнутых и разомкнутых отрезков линий с малыми потерями

$$Z_{кз} = j \sqrt{L/C} \operatorname{tg} \beta l = j \sqrt{L/C} \operatorname{tg} k\omega;$$

$$Z_{xx} = -j \sqrt{L/C} \operatorname{ctg} \beta l = -j \sqrt{L/C} \operatorname{ctg} k\omega.$$

Следовательно, зависимость входных сопротивлений $Z_{кз}$ и Z_{xx} от частоты будет такой, как это показано на рис. 6.16. Со стороны входных зажимов такие отрезки линии представляют собой реактивные сопротивления с бесконечно большим числом элементов.

В ограниченных диапазонах частот отрезки линий различной длины и на различных частотах могут заменять собой индуктивности, емкости, резонансные контуры и более сложные двухполюсники.

6.4. ДВУХПОЛЮСНИКИ С ПОТЕРЯМИ

Влияние потерь в элементах двухполюсника. Мы полагали реактивные двухполюсники составленными из идеальных индуктивностей и емкостей. При этом активное сопротивление цепи $r = 0$ и $Z(\omega) = jx(\omega)$. Зависимость от частоты реактивного сопротивления двухполюсника $x(\omega)$ и была единственной рассмотренной характеристикой. В этом случае при резонансе токов x обращается в бесконечность, а при резонансе напряжений — в нуль.

Реальные катушки индуктивности и конденсаторы вносят в цепь определенные потери, поэтому свойства реальных элементов в двухполюсной цепи следует отображать эквивалентными схемами, содержащими наряду с реактивными элементами L и C также и активное сопротивление r . При этом сопротивление двухполюсника

$$Z(\omega) = r(\omega) + jx(\omega) = |Z(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}.$$

Для отображения изменения свойств двухполюсника в зависимости от частоты при наличии потерь в его элементах наряду с графиком $x(\omega)$ следует строить еще и график $r(\omega)$. При резонансах теперь сопротивление в обоих случаях конечно.

При изучении свойств двухполюсников с потерями удобно также пользоваться графиками $|Z(\omega)|$ и $\varphi(\omega)$. Примерный вид графиков, показывающих зависимость сопротивления реального трехэлементного двухполюсника от частоты, приведен на рис. 6.17, а и б. Штриховые линии относятся к реактивному двухполюснику с идеальными элементами.

Связь между активной и реактивной составляющими входной проводимости или сопротивления. Рассмотрим проводимость цепи (рис. 6.18, а), для которой

$$Y_a = \frac{1}{r_k + j\omega L_k} = \frac{r_k}{r_k^2 + \omega^2 L_k^2} - j \frac{\omega L_k}{r_k^2 + \omega^2 L_k^2} = g + jb.$$

Здесь обе составляющие проводимости являются функциями частоты с полюсами при мнимом значении $\omega = j(r_k/L_k)$; $g \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$, b равно нулю при $\omega = 0$; g и b однозначно связаны друг с другом. Полное значение Y_a легко может быть восстановлено по любой ее составляющей. Так же будет обстоять дело, если цепь составить из нескольких таких ветвей, когда

$$Y(\omega) = \sum_k \frac{1}{r_k + j\omega L_k}.$$

Рассмотрим цепь (рис. 6.18, б), для которой

$$Y_b = g + jb = \frac{1}{r_d} + \frac{r_k}{r_k^2 + \omega^2 L_k^2} - j \frac{\omega L_k}{r_k^2 + \omega^2 L_k^2}.$$

Вследствие присоединения ветви с только активным сопротивлением активная составляющая проводимости изменилась на величину $1/r_d$, не зависящую от частоты, и не будет теперь равна нулю ни на каких частотах. Но это нарушает однозначную связь g и b .

Не будет однозначной связи между g и b и в том случае, если одностороннее изменение получит только b (рис. 6.18, в). Здесь по сравнению с цепью (см. рис. 6.18, а) появилась ветвь с чисто реактивной про-

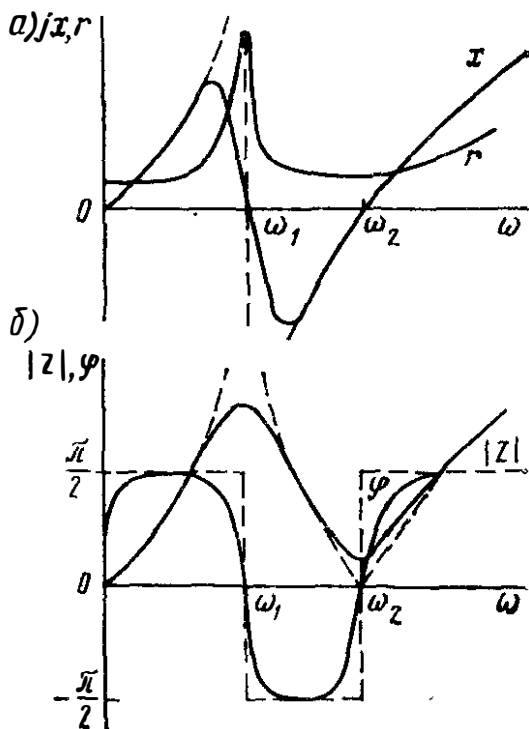


Рис. 6.17

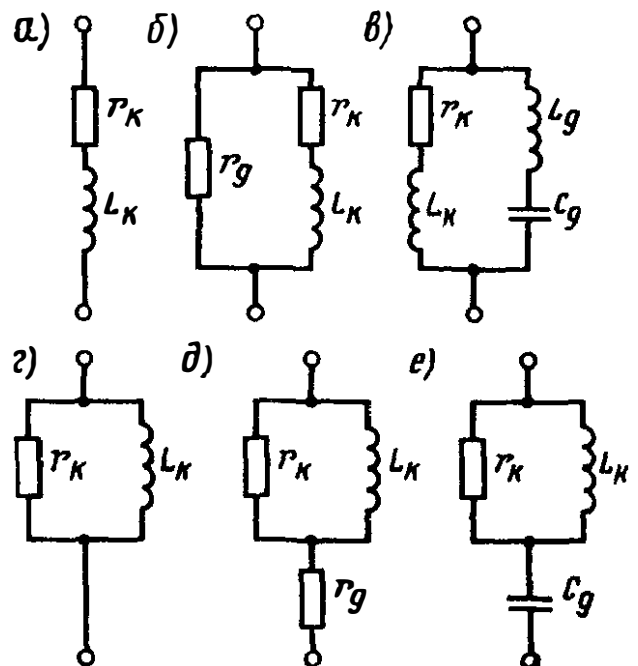


Рис. 6.18

водимостью $b_d = -\frac{\omega}{L_d(\omega^2 - \omega_0^2)}$, имеющей полюс на вещественной частоте $\omega_0 = 1/\sqrt{L_d C_d}$, и полная проводимость теперь

$$Y_B = \frac{r_K}{r_K^2 + \omega^2 L_K^2} - j \frac{\omega L_K}{r_K^2 + \omega^2 L_K^2} - j \frac{\omega}{L_d(\omega^2 - \omega_0^2)}.$$

Таким образом, только у цепей без чисто активных и чисто реактивных ветвей в параллельном соединении есть однозначная связь между g и b . Такие цепи имеют минимально возможную активную составляющую при заданной реактивной и минимально возможную реактивную составляющую проводимости при заданной активной.

Действительная составляющая проводимости не содержит в этом случае не зависящей от частоты части, а реактивная составляющая не имеет полюсов на вещественной оси частот.

Однозначная связь между активной и реактивной составляющими сопротивления имеется только у цепей с минимальными активным и реактивным сопротивлениями. Такие цепи не содержат чисто активных и чисто реактивных цепей в последовательном соединении. Функции $Z(\omega)$ сопротивления таких цепей не имеют полюсов на вещественных частотах.

Пример схемы с минимальными активным и реактивным сопротивлениями дан на рис. 6.18, а, с неминимальным активным сопротивлением — на рис. 6.18, б и неминимальным реактивным сопротивлением — на рис. 6.18, в.

6.5. ПОСТРОЕНИЕ ДВУХПОЛЮСНИКОВ ПО ЗАДАННОЙ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ ИЛИ ПРОВОДИМОСТИ

При проектировании разнообразных устройств автоматики, телемеханики и связи часто возникает задача определения схемы двухполюсника с заданной зависимостью сопротивления (или проводимости) от частоты и значений ее элементов.

Необходимая зависимость может быть задана формулой $Z(\omega)$ или графиком. В первом случае следует сначала представить $Z(\omega)$ подходящей функцией. В последнем случае прежде всего следует установить соответствие этой формуле сопротивления какой-либо реальной цепи, или, как говорят, является ли заданная зависимость $Z(\omega)$ физически реализуемой.

Условия, которым должна удовлетворять функция входного сопротивления $Z(\omega)$ или входной проводимости $Y(\omega)$ цепи с сосредоточенными элементами, были рассмотрены в § 2.9. Часто эти условия формулируют более кратко, опираясь при этом на свойства аналитических функций комплексного переменного.

Говорят, что функция $Z(p)$ удовлетворяет условиям физической реализуемости, если она положительна и действительна. Эту функцию называют положительной, если ее действительная часть положительна при положительных действительных значениях p .

Если положительная функция принимает действительные значения при действительных аргументах, ее называют действительной положительной. Рациональная действительная положительная функция есть функция Бруне.

Таким образом, первым этапом синтеза двухполюсника по заданной аналитической зависимости $Z(\omega)$ является образование функции $Z(p)$, где $j\omega$ заменено на p , и проверка $Z(p)$ на действительность и положительность.

Если нули и полюсы функции $Z(p)$ расположены на отрицательной оси $p = j\omega$, то эта функция реализуется в виде двухполюсника rC или rL . Функция $Z(\omega)$ при расположении ее нулей и полюсов на положительной вещественной оси реализуется двухполюсником LC , а если ее нули и полюсы находятся в верхней полуплоскости ω или левой полуплоскости $p = j\omega$, то двухполюсником rLC .

Рассмотрим несколько примеров.

Синтез цепи rC . Пусть задана зависимость сопротивления от частоты вида

$$Z(p) = \frac{p^2 + 6p + 8}{p^2 + 4p + 3} \quad (6.29)$$

Уравнение $p^2 + 6p + 8 = 0$ имеет корни -2 и -4 , а уравнение $p^2 + 4p + 3 = 0$ — -1 и -3 . Очевидно, что сопротивление (6.29) есть сопротивление реализуемой цепи rC . Функцию $Z(p)$ можно записать также в виде

$$Z(p) = \frac{(p+2)(p+4)}{(p+1)(p+3)} \quad (6.30)$$

Выражение (6.30) не является правильной дробью. Выделим из него целую часть. При $p = \infty$ $Z(p) \rightarrow 1$. Это значит, что в последовательном соединении имеется сопротивление $r_1 = 1$. Найдем сопротивление остальной части схемы:

$$Z(p) - 1 = \frac{p^2 + 6p + 8}{p^2 + 4p + 3} - 1 = \frac{2p + 5}{p^2 + 4p + 3} \quad (6.31)$$

Последнее выражение есть правильная дробь, которая может быть разложена на простые:

$$\frac{2p + 5}{p^2 + 4p + 3} = \frac{2p + 5}{(p+1)(p+3)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+3}$$

Для нахождения A умножим обе части последнего равенства на $(p+1)$ и положим $p = -1$. Получим

$$A = \frac{-2 + 5}{-1 + 3} = 3/2$$

Величину B определим, умножив обе части предпоследнего равенства на $(p+3)$ и положив $p = -3$. В результате

$$B = \frac{-6 + 5}{-3 + 1} = 1/2$$

Отсюда

$$\frac{2p+5}{(p+1)(p+3)} = \frac{3/2}{p+1} + \frac{1/2}{p+3};$$

$$Z(p) = 1 + \frac{3/2}{p+1} + \frac{1/2}{p+3} = 1 + \frac{1}{(2/3)p + (2/3)} + \frac{1}{2p+6}.$$

Имея в виду, что зависимость сопротивления от частоты при параллельном соединении резистора и конденсатора $Z(p) = 1/[(1/r) + pC]$, образуем схему двухполюсника (рис. 6.19, а). Для изображения $Z(p)$ сопротивлением цепной схемы дробь $Z(p) - 1$ следует представить в виде непрерывной.

Для этой цели выполним ряд делений:

$$\begin{array}{r} p^2 + 4p + 3 \quad | \quad 2p + 5 \\ - \quad p^2 + 2 \frac{1}{2} p \quad | \quad \frac{1}{2} p \\ \hline \frac{3}{2} p + 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2p + 5 \quad | \quad \frac{3}{2} p + 3 \\ - \quad 2p + 4 \quad | \quad \frac{4}{3} \\ \hline 1 \quad | \quad \frac{4}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{3}{2} p + 3 \quad | \quad \frac{1}{3} \\ - \quad \frac{3}{2} p + 3 \quad | \quad \frac{1}{3} \\ \hline \end{array}$$

Это дает:

$$Z(p) - 1 = \frac{2p+5}{p^2+4p+3} = \frac{1}{\frac{1}{2}p + \frac{\frac{4}{3} + \frac{1}{\frac{3}{2}p+3}}{3}}.$$

Последнему выражению соответствует схема (рис. 6.19, б). Полную схему двухполюсника, реализующего заданную зависимость $Z(p)$, можно получить включением сопротивления 1 Ом (рис. 6.19, в).

Исходя из $Y(p) = 1/Z(p)$ и поступая аналогично, можно получить еще две эквивалентные схемы.

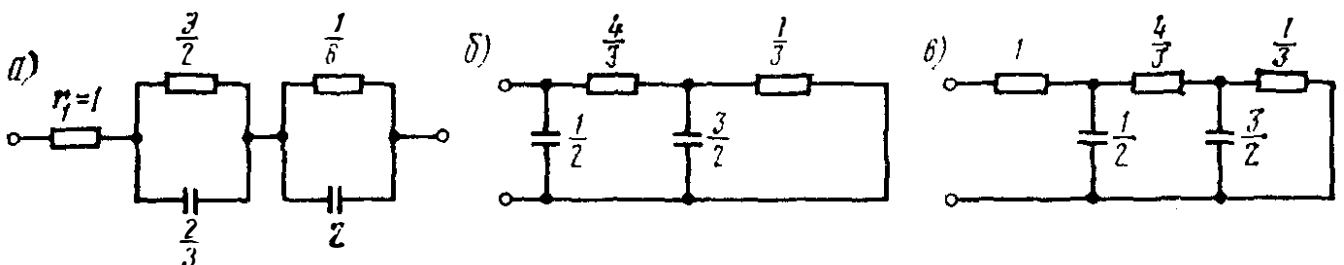


Рис. 6.19

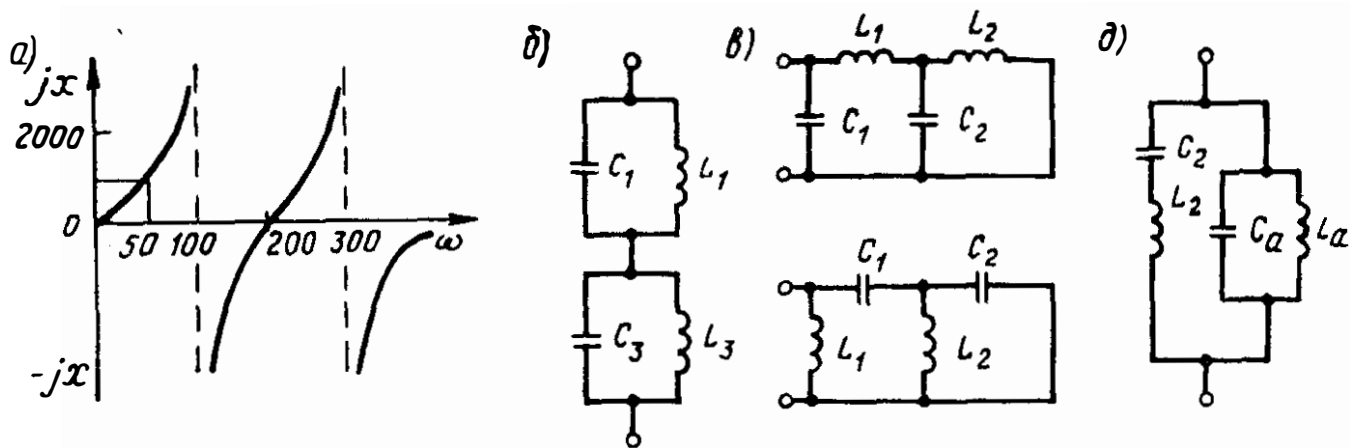


Рис. 6.20

Синтез реактивных двухполюсников. Если аналитическое выражение $Z(\omega)$ задано рациональной дробью (6.28), явно являющейся функцией сопротивления реальной цепи реактивного двухполюсника, то число элементов, входящих в двухполюсник, сразу устанавливается по числу множителей в числителе и знаменателе. Общее число элементов на единицу больше общего числа множителей вида $\omega^2 - \omega_k^2$. Остается выбрать схему соединения и определить параметры элементов, т. е. решить задачу реализации, для чего следует преобразовать заданное выражение $Z(\omega)$.

Если нужно построить сложный двухполюсник последовательным соединением контуров резонанса токов, то выражение $Z(\omega)$ следует разложить на простые дроби. Каждое слагаемое дроби будет представлять сопротивление одного контура, а целая часть — сопротивление резонансной цепи или одиночного элемента.

Для построения сложного двухполюсника параллельным соединением резонансных ветвей следует воспользоваться выражением $Y(\omega)$, разложив его на простые дроби. Тогда каждое слагаемое, полученное в результате такого разложения, будет представлять собой проводимость одной резонансной ветви или ветви с одним элементом. В первом случае резонансы токов определяются резонансными частотами контуров, входящих в схему, а перемежающиеся с ним резонансы напряжений — соотношениями между элементами L и C всех контуров. Во втором случае, наоборот, резонансы напряжения определяются резонансными частотами ветвей, а резонансы токов — соотношением между элементами L и C всей схемы.

Если в заданном выражении $Z(\omega)$ или $Y(\omega)$ сложного двухполюсника выполнить деление и представить его в виде непрерывной дроби, то соответствующие схемы будут иметь вид цепочек. Предпочтение той или иной схеме двухполюсника может быть отдано в зависимости от значений параметров входящих в нее элементов и возможности их реализации.

Допустим, что необходимо построить реактивный двухполюсник с сопротивлением $Z(\omega)$, график которого приведен на рис. 6.20, а. Сопротивление этого двухполюсника обращается в нуль на частоте $\omega_2 = 200$ и становится неограниченно большим на угловых частотах $\omega_1 =$

$= 100$ и $\omega_3 = 300$. Это зависимость реальной и, следовательно, реализуемой цепи.

Так как нули и полюсы функции сопротивления определяют ее только с точностью до постоянного множителя, то задано еще значение $|Z(\omega)| = 1000$ Ом на частоте $\omega = 50$. Таким образом, для нахождения четырех элементов схемы (рис. 6.20, б) заданы четыре значения $Z(\omega)$.

Представим соответствующее заданному графику выражение рациональной дробью (6.28):

$$Z(\omega) = -jk\omega \frac{\omega^2 - 200^2}{(\omega^2 - 100^2)(\omega^2 - 300^2)}.$$

Знак минус перед jk выбран исходя из того, что на частоте $\omega \rightarrow 0$ сопротивление $Z(\omega)$ должно быть положительным, дробь же на малых частотах — отрицательна.

Найдем значение k из условия

$$|Z(50)| = 1000 = -k \cdot 50 \frac{50^2 - 200^2}{(50^2 - 100^2)(50^2 - 300^2)},$$

откуда $k = 350\,000$.

Таким образом,

$$Z(\omega) = -j\omega \cdot 35 \cdot 10^4 \frac{\omega^2 - 200^2}{(\omega^2 - 100^2)(\omega^2 - 300^2)}.$$

Разложим эту дробь на простые дроби:

$$\frac{\omega^2 - 200^2}{(\omega^2 - 100^2)(\omega^2 - 300^2)} = \frac{A}{\omega^2 - 100^2} + \frac{B}{\omega^2 - 300^2}.$$

Для определения A умножим обе части последнего равенства на $\omega^2 - 100^2$ и положим $\omega = 100$. Тогда второе слагаемое правой части будет равно нулю и получим:

$$A = \frac{\omega^2 - 200^2}{\omega^2 - 300^2} = \frac{100^2 - 200^2}{100^2 - 300^2} = 0,375.$$

Точно так же для определения B умножим обе части равенства на $\omega^2 - 300^2$ и положим $\omega = 300$. Тогда

$$B = \frac{\omega^2 - 200^2}{\omega^2 - 100^2} = \frac{300^2 - 200^2}{300^2 - 100^2} = 0,625.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= -j\omega \cdot 35 \cdot 10^4 \left(\frac{0,375}{(\omega^2 - 100^2)} + \frac{0,625}{(\omega^2 - 300^2)} \right) = \\ &= \frac{\omega}{j} \frac{131 \cdot 10^3}{\omega^2 - 100^2} + \frac{\omega}{j} \frac{218 \cdot 10^3}{\omega^2 - 300^2}. \end{aligned}$$

Сопротивление двухполюсника выражается суммой двух слагаемых, каждое из которых представляет собой сопротивление резонансного контура.

Для определения значений C_1L_1 и C_3L_3 сопоставим слагаемые (6.30) с сопротивлением резонансного контура, которое запишем в виде

$$Z(\omega) = \frac{\omega}{j} \frac{1/C}{(\omega^2 - \omega_p^2)},$$

где ω_p — угловая частота резонанса.

Отсюда для первого резонансного контура $\omega_p = 100$; $C_1 = 7,63$ мкФ; $L_1 = 13,1$ Гн. Для второго резонансного контура $\omega_p = 300$; $C_3 = 4,58$ мкФ; $L_3 = 2,43$ Гн.

Кроме рассчитанной, существуют еще три схемы четырехэлементных двухполюсников, имеющих ту же зависимость сопротивления от частоты.

Если характеристики двухполюсника представить в виде непрерывных дробей, то двухполюсник можно рассчитать по схеме (рис. 6.20, в). Рассмотрим способ подбора элементов по данной схеме.

Для нее

$$Z(\omega) = \frac{1}{j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega L_2}}}}. \quad (6.32)$$

Из выражения (6.29) следует, что

$$Z(\omega) = -j \frac{35 \cdot 10^4 \omega^3 - 140 \cdot 10^8 \omega}{\omega^4 - 10 \cdot 10^4 \omega^2 + 9 \cdot 10^8}.$$

Для представления $Z(\omega)$ в виде непрерывной дроби выполним ряд делений:

$$\begin{array}{r} \omega^4 - 10 \cdot 10^4 \omega^2 + 9 \cdot 10^8 \quad \left| \begin{array}{l} 35 \cdot 10^4 \omega^3 - 140 \cdot 10^8 \omega \\ \hline 10^{-4} \\ \hline 35 \omega \end{array} \right. \\ \omega^4 - 4 \cdot 10^4 \omega^2 \\ \hline -6 \cdot 10^4 \omega^2 + 9 \cdot 10^8 \\ \hline 35 \cdot 10^4 \omega^3 - 140 \cdot 10^8 \omega \quad \left| \begin{array}{l} -6 \cdot 10^4 \omega^2 + 9 \cdot 10^8 \\ \hline 35 \\ \hline -\frac{35}{6} \omega \end{array} \right. \\ 35 \cdot 10^4 \omega^3 - \frac{105}{2} 10^8 \omega \\ \hline -87,5 \cdot 10^8 \omega \\ \hline -6 \cdot 10^4 \omega^2 + 9 \cdot 10^8 \quad \left| \begin{array}{l} -87,5 \cdot 10^8 \omega \\ \hline 6 \\ \hline 87,5 \cdot 10^{-4} \omega \end{array} \right. \\ -6 \cdot 10^4 \omega^2 \\ \hline 9 \cdot 10^8 \\ \hline -87,5 \cdot 10^8 \omega \quad \left| \begin{array}{l} 9 \cdot 10^8 \\ \hline 87,5 \\ \hline -\frac{9}{87,5} \omega \end{array} \right. \end{array}$$

Таким образом,

$$Z(\omega) = -j \frac{1}{\frac{10^{-4}}{35} \omega + \frac{1}{-\frac{35}{6} \omega + \frac{1}{\frac{6}{87,5} \cdot 10^{-4} \omega + \frac{1}{-\frac{1}{87,5} \omega}}}}$$

Сравнивая последнее выражение с формулой (6.32), найдем:

$$C_1 = \frac{1}{35} 10^{-4}; \quad L_1 = \frac{35}{6}; \quad C_2 = \frac{6}{87,5} 10^{-4}; \quad L_2 = \frac{87,5}{9}.$$

Схему (рис. 6.20, з) можно рассчитать аналогично, но полиномы в числителе и знаменателе $Z(\omega)$ перед делением следует расположить по возрастающим степеням.

Для реализации двухполюсника по схеме (рис. 6.20, д) сопоставим заданное выражение $Y(\omega)$ с проводимостью схемы на рисунке. Это дает

$$j \frac{\omega^4 - 10 \cdot 10^{-4} \omega^2 + 9 \cdot 10^8}{35 \cdot 10^4 \omega^3 - 140 \cdot 10^8 \omega} = j \left[\frac{C_a}{\omega} (\omega^2 - \omega_a^2) - \frac{\omega}{L_2} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_2^2)} \right].$$

Найдем L_2 , для чего умножим обе части равенства на $\omega^2 - \omega_2^2$ и положим $\omega = \omega_2 = 200$. Отсюда $L_2 = 9,3$. Теперь мы имеем:

$$\frac{\omega^4 - 10 \cdot 10^{-4} \omega^2 + 9 \cdot 10^8}{35 \cdot 10^4 \omega^3 - 140 \cdot 10^8 \omega} = \frac{-\omega}{9,3} \frac{1}{\omega^2 - 200^2} + \frac{C_a}{\omega} (\omega^2 - \omega_a^2).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} C_a \frac{\omega^2 - \omega_a^2}{\omega} &= \frac{\omega^4 - 10 \cdot 10^4 \omega^2 + 9 \cdot 10^8}{35 \cdot 10^4 \omega^3 - 140 \cdot 10^8 \omega} + \frac{\omega}{9,3 (\omega^2 - 200^2)} = \\ &= \frac{9,3 \left(\omega^2 - \frac{21}{9,3} 10^4 \right)}{325 \cdot 10^4 \omega}, \end{aligned}$$

чем определяется C_a и ω_a , а следовательно, и L_a :

$$C_a = 2,85 \cdot 10^{-6}; \quad L_a = \frac{1}{C_a \omega_a^2} = \frac{10^6}{2,85 \frac{21}{9,3} 10^4} = 15,6.$$

Построение двухполюсника rLC . Задача синтеза двухполюсников rC и LC облегчалась наличием у таких цепей канонических схем. Для построения одной из них достаточно соответствующего преобразования заданной функции сопротивления или проводимости (разложение на простые или цепные дроби). Эти приемы не теряют своей ценности и при синтезе двухполюсников, содержащих элементы всех трех типов: r , L и C . Существует несколько приемов построения схемы пассивного двухполюсника общего вида, однако большинство из них основано на постепенном выделении параллельных и последовательных цепей, т. е.

по существу на разложении функции входного сопротивления в цепную дробь.

Рассмотрим два примера.

Пример 1. Пусть, например, требуется построить двухполюсник с

$$Z(p) = \frac{4p^3 + 2 \cdot 10^3 p^2 + 4 \cdot 10^6 p + 10^9}{2p^2 + 10^3 p + 10^6}$$

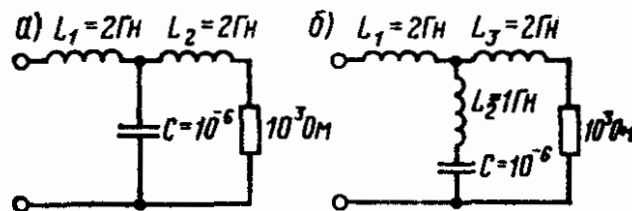


Рис. 6.21

так, чтобы активное сопротивление находилось на его выходе. Поскольку степень числителя Z_p более высокая, чем знаменателя, выполним деление:

$$\frac{4p^3 + 2 \cdot 10^3 p^2 + 4 \cdot 10^6 p + 10^9}{4p^3 + 2 \cdot 10^3 p^2 + 2 \cdot 10^6 p} \left| \frac{2p^2 + 10^3 p + 10^6}{2p} \right.$$

$$\frac{2 \cdot 10^6 p + 10^9}{2 \cdot 10^6 p + 10^9}$$

Следовательно,

$$Z(p) = 2p + \frac{2 \cdot 10^6 p + 10^9}{2p^2 + 10^3 p + 10^6} = 2p + Z_1(p).$$

Схема искомого двухполюсника начинается с последовательно включенной индуктивности 2 Гн. Для выяснения схемы оставшейся части рассмотрим проводимость

$$Y_1(p)_i = \frac{1}{Z_1(p)} = \frac{2p^2 + 10^3 p + 10^6}{2 \cdot 10^6 p + 10^9}.$$

Здесь можно выполнить деление:

$$\frac{2p^2 + 10^3 p + 10^6}{2p^2 + 10^3 p} \left| \frac{2 \cdot 10^6 p + 10^9}{10^{-6} p} \right.;$$

$$\frac{10^6}{2 \cdot 10^6 p + 10^9}$$

$$Y_1(p) = 10^{-6} p + \frac{10^6}{2 \cdot 10^6 p + 10^9} = 10^{-6} p + \frac{1}{2p + 10^3}.$$

Проводимость $Y_1(p)$ образована параллельным соединением двух ветвей с сопротивлениями $1/(10^{-6} p)$ и $2p + 10^3$. Схема двухполюсника с требуемым входным сопротивлением приведена на рис. 6.21, а.

В рассмотренном простом примере не встречалось никаких затруднений. Однако так бывает не всегда.

Пример 2. Пусть необходимо построить двухполюсник с одним активным сопротивлением в конце цепи:

$$Z(p) = \frac{8p^3 + 3 \cdot 10^3 p^2 + 4 \cdot 10^6 p + 10^9}{3p^2 + 10^3 p + 10^6}.$$

Функция сопротивления весьма похожа на рассмотренную в предыдущем примере, однако это входное сопротивление цепи (рис. 6.21, б).

Поскольку здесь, как и в примере, степень числителя выше степени знаменателя, реализацию двухполюсника начнем с деления:

$$\begin{array}{r} 8\rho^3 + 3 \cdot 10^3 \rho^2 + 4 \cdot 10^6 \rho + 10^9 \\ - \left(8\rho^3 + \frac{8}{3} 10^3 \rho^2 + \frac{8}{3} 10^6 \rho \right) \\ \hline \frac{1}{3} 10^3 \rho^2 + \frac{4}{3} 10^6 \rho + 10^9 \end{array} \left| \begin{array}{l} 3\rho^2 + 10^3 \rho + 10^6 \\ \frac{8}{3} \rho \end{array} \right.$$

После деления выражение величины $Z(\rho)$ принимает вид:

$$Z(\rho) = \frac{8}{3} \rho + \frac{\frac{1}{3} \cdot 10^3 \rho^2 + \frac{4}{3} 10^6 \rho + 10^9}{3\rho^2 + 10^3 \rho + 10^6} = \frac{8}{3} \rho + Z_1(\rho).$$

В результате деления, во-первых, выделилась индуктивность $L' = 8/3$ вместо 2 и, во-вторых, у функции сопротивления для Z_1 получились одинаковые степени числителя и знаменателя, так что, продолжая простое деление, схему двухполюсника реализовать нельзя. В таких случаях применяют специальный прием, предложенный Бруне (реализацию называют реализацией по Бруне).

Поскольку выделенная индуктивность не равна L_1 схемы, схема Z_1 та же, что и исходная, только вместо L_2 возможно, содержит отрицательную индуктивность. Для Z_1 характерно наличие резонанса в цепи $L_2 C_1$, на котором активная составляющая Z_1 обращается в нуль. Поэтому следует определить активную составляющую Z_1 и эту резонансную частоту.

Умножая числитель и знаменатель на величину, сопряженную со знаменателем $(3\rho^2 + 10^6) - 10\rho^3$, и отделяя вещественную часть, содержащую четные степени, найдем:

$$\operatorname{Re} [Z_1(\rho)] = \frac{10^3 \rho^4 + 2 \cdot 10^9 \rho^2 + 10^{15}}{(3\rho^2 + 10^6)^2 - 10^6 \rho^2}.$$

Величина $\operatorname{Re} [Z_1]$ обращается в нуль при ρ_1^2 и ρ_2^2 , удовлетворяющих уравнению

$$10^3 \rho^4 + 2 \cdot 10^9 \rho^2 + 10^{15} = 0$$

или

$$\rho^4 + 2 \cdot 10^6 \rho^2 + 10^{12} = 0,$$

отсюда

$$\rho_{1,2}^2 = -10^6 \pm \sqrt{10^{12} - 10^{12}} = -10^6.$$

На этой частоте сопротивление Z_1 определяется только индуктивностью, включенной последовательно, и будет чисто реактивным: при $\rho^2 = -10^6$

$$Z_1(\rho) = \frac{\frac{4}{3} 10^6 \rho + \frac{2}{3} 10^9}{10^3 \rho - 2 \cdot 10^6} = L(\rho).$$

Отсюда

$$\frac{4}{3} 10^6 p + \frac{2}{3} 10^9 = 10^3 p^2 L'' - 2 \cdot 10^6 p L''.$$

Заменяя p^2 на -10^6 , найдем:

$$L'' = \frac{\frac{4}{3} 10^6 p + \frac{2}{3} 10^9}{2 \cdot 10^6 p + 10^9} = -\frac{2}{3}.$$

Полная последовательно включенная в схему индуктивность

$$L_1 = L' + L'' = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = 2 \text{ Гн.}$$

В рассматриваемом примере отрицательная индуктивность исключилась положительной. Другим средством исключения отрицательной индуктивности является замена ее схемой с трансформатором.

Вычтем из Z_1 сопротивление pL'' :

$$Z_1(p) - pL'' = \frac{\frac{1}{3} 10^3 p^2 + \frac{4}{3} 10^6 p + 10^9}{3p^2 + 10^3 p + 10^6} + \frac{2}{3} p = \frac{2p^3 + 10^6 p^2 + 2 \cdot 10^6 p + 10^9}{3p^2 + 10^3 p + 10^6}.$$

Это сопротивление остальной схемы двухполюсника. Поскольку после выделения последовательно включенной индуктивности предполагается выделение параллельного элемента, следует перейти к проводимости:

$$Y_2(p) = \frac{1}{Z_2(p)} = \frac{3p^2 + 10^3 p + 10^6}{2p^3 + 10^6 p^2 + 2 \cdot 10^6 p + 10^9}.$$

Мы знаем, что знаменатель $Y_2(p)$ обращается в нуль при $p^2 = -10^6$, и следовательно, делится на $p^2 + 10^6$ без остатка:

$$\begin{array}{r} 2p^3 + 10^3 p^2 + 2 \cdot 10^6 p + 10^9 \quad \Big| \quad p^2 + 10^6 \\ \underline{2p^3} + 2 \cdot 10^6 p \\ 10^3 p^2 + 10^9 \\ \underline{10^3 p^2 + 10^9} \\ 0 \end{array}$$

Следовательно,

$$Y_2(p) = \frac{3p^2 + 10^3 p + 10^6}{(p^2 + 10^6)(2p + 10^3)} = \frac{\frac{1}{L_2} p}{p^2 + 10^6} + \frac{B}{2p + 10^3}.$$

Сравнение коэффициентов при различных степенях p показывает, что $L_2 = 1$, $B = 1$. Из разложения Y_2 на сумму двух дробей следует также, что $R = 10^3$, $L_3 = 3$, $C = 10^{-6}$.

Синтез двухполюсников, частотная зависимость сопротивления которых удовлетворяет требованиям в ограниченном диапазоне частот. Если частотная зависимость двухполюсника должна с известной точностью следовать в некотором диапазоне частот заданному графику или заданной функции, не являющейся рациональной дробью, то возни-

кает задача аппроксимации, т. е. приближенного представления заданной зависимости функцией требуемого вида.

Если задана кривая $F(\omega)$, которую необходимо приближенно представить дробно-рациональной функцией

$$\varphi(\omega) = \frac{A_n \omega^n + A_{n-1} \omega^{n-1} + \dots + A_1 \omega + A_0}{B_m \omega^m + B_{m-1} \omega^{m-1} + \dots + B_1 \omega + B_0}, \quad (6.32)$$

то функция $\varphi(\omega)$ определена, если известны $(m + n + 2)$ ее коэффициента. Для их нахождения напишем выражение (6.32) в виде

$$\begin{aligned} A_n \omega^n + A_{n-1} \omega^{n-1} + \dots + A_1 \omega + A_0 &= \\ = \varphi(\omega) [B_m \omega^m + B_{m-1} \omega^{m-1} + \dots + B_1 \omega + B_0]. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Зададим теперь $(m + n + 2)$ точки на кривой $F(\omega)$. Подставляя поочередно координаты ω_k и $F(\omega_k)$ этих точек вместо ω и $\varphi(\omega)$ в выражение (6.33), получим $(m + n + 2)$ уравнения, совместное решение которых дает значения искоемых коэффициентов.

Предположим, что нужно подобрать сопротивление, увеличивающееся с частотой по закону, заданному графически. Точность удовлетворения требуемого закона определяется числом точек кривой, в которых необходимое сопротивление совпадает с заданным. Число точек соответствует числу элементов двухполюсника.

Допустим, что достаточно, чтобы на частоте ω_1 сопротивление было $Z(\omega_1)$, на ω_2 — $Z(\omega_2)$. По двум исходным числам можно определить только два элемента, поэтому возьмем, например, резонансный контур. Для него

$$\varphi(\omega) = \frac{\omega}{C(\omega^2 - \omega_p^2)} = \frac{\omega}{C\omega^2 - C\omega_p^2}.$$

Здесь $A_0 = 0$, $A_1 = 1$, $B_0 = -\omega_p^2$, $B_1 = 0$, $B_2 = C$, остальные коэффициенты равны нулю.

Для определения элементов схемы составим уравнения:

$$Z(\omega_1) = \frac{\omega_1}{-C\omega_p^2 + C\omega_1^2};$$

$$Z(\omega_2) = \frac{\omega_2}{-C\omega_p^2 + C\omega_2^2}.$$

Из этих двух уравнений находим величины C и ω_p , что и является решением задачи.

В качестве двух элементов можно было также взять индуктивность и активное сопротивление. Совершенно очевидно, что громоздкость таких вычислений быстро увеличивается с ростом требований к точности. Кроме того, остается открытым вопрос о значении расхождения $F(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ на частотах, лежащих в интервалах между контрольными частотами.

В отличие от решения задачи по построению реактивного двухполюсника, заданного функцией вида (6.28), при задании свойств сопротивления, нерациональной функцией $F(\omega)$ мы можем столкнуться с

отсутствием решения, т. е. невозможностью построить двухполюсник с необходимой частотной зависимостью сопротивления при заданном числе элементов. В таких случаях следует решать задачу, вновь задавая функцию $\varphi(\omega)$ более высокого порядка, т. е. строить более сложный двухполюсник.

6.6. СХЕМЫ ПРОСТЕЙШИХ ФИЛЬТРУЮЩИХ И КОРРЕКТИРУЮЩИХ ЦЕПЕЙ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Цепи rC , составленные из резисторов и конденсаторов, благодаря своей простоте, дешевизне и компактности находят всевозрастающее применение в аппаратуре автоматики, телемеханики и связи. В большинстве случаев они работают с усилителями в режиме, близком к холостому ходу, и характеризуются функцией передачи $F = \dot{U}_2/\dot{U}_1$ или ее логарифмом.

Фильтры нижних частот rC (корректирующие устройства с запаздыванием по фазе). Рассмотрим схему (рис. 6.22, а). Для нее операторная характеристика — функция передачи:

$$F(p) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{1 + prC} = \frac{1}{1 + p_H}; \quad p_H = prC. \quad (6.34)$$

Она является характеристикой фильтра нижних частот первого порядка. Функция передачи ФНЧ при $p_H \rightarrow 0$ равна 1 и обращается в нуль при $p_H \rightarrow \infty$. Его частотная характеристика

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{1 + j\omega rC} = \frac{1}{1 + \omega^2 r^2 C^2} - j \frac{\omega rC}{1 + \omega^2 r^2 C^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 r^2 C^2}} e^{j\theta}, \quad \theta = \arctg \frac{-\omega rC}{1}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Логарифмическая частотная характеристика этого фильтра

$$20 \lg F(\omega) = 20 \lg |F(\omega)| + j\theta = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 r^2 C^2}} + j \arctg \frac{-\omega rC}{1}. \quad (6.36)$$

Графики $20 \lg |F(\omega)|$ и $-\theta$, построенные по выражению (6.36), приведены на рис. 6.22, б и в.

Зависимость логарифма модуля F от частоты характеризуется тремя участками кривой:

на первом участке $\omega^2 r^2 C^2 \ll 1$, $\omega \ll 1/(rC)$; $|F(\omega)| \approx 1$; $20 \lg |F(\omega)| \approx 0$;

на втором участке при $\omega^2 r^2 C^2$, соизмеримом с 1, $\omega \approx 1/(rC)$, $|F(\omega)| < 1$, $20 \lg |F(\omega)|$ отрицательно и растет по абсолютному значению;

на третьем участке при $\omega^2 r^2 C^2 \gg 1$; $\omega \gg 1/(rC)$; $|F(\omega)| \approx \frac{1}{\omega rC}$;

$$20 \lg |F(\omega)| = 20 \lg \frac{1}{\omega rC} = -20 \lg rC\omega.$$

Схема (см. рис. 6.22, а) дает затухание, возрастающее с ростом частоты. С увеличением частоты в 10 раз затухание ее возрастает на 20 дБ.

Принято говорить, что в области $\omega^2 r^2 C^2 \gg 1$, $\omega > 1/(rC)$ (см. рис. 6.22, б) имеется отрицательный наклон амплитудно-частотной характеристики -20 дБ на декаду (6 дБ на октаву). В логарифмическом масштабе частот функция $20 \lg |F| = -20 \lg k \omega$ изображается прямой линией.

Если схема (см. рис. 6.22, а) рассматривается в диапазоне частот $\omega > 1/(rC)$; $p > 1/(rC)$, то ее операторная характеристика

$$F(p) = \frac{1}{rCp} = k \frac{1}{p}$$

есть характеристика интегрирующей цепи.

Частотная характеристика интегрирующей цепи характеризуется возрастанием затухания с увеличением частоты со скоростью 20 дБ на декаду и положительным фазовым сдвигом, вносящим запаздывание.

Если указанная схема рассматривается во всем диапазоне частот $0 < \omega < \infty$, то она представляет собой фильтр нижних частот, пропускающий частоты $\omega \ll 1/(rC)$ с нулевым затуханием и вносящий затухание для частот $\omega \gg 1/(rC)$. Фазовая характеристика такого фильтра отвечает требованиям неискаженной передачи сигналов только в области самых низких частот.

Использованная функция передачи $F(p) = U_2/U_1$ есть функция передачи по напряжению и характеризует цепь в условиях холостого хода, т. е. когда входные сопротивления последующих элементов устройства R_n велики по сравнению с $1/(pC)$ на всех частотах. Это условие выполняется, если рассматриваемый фильтр подключен к входу операционного усилителя.

Примеры соответствующих схем приводятся далее.

Фильтрующие свойства усиливают соединением отдельных звеньев (рис. 6.22, г). Для этой схемы

$$F(p) = \frac{1}{r_1 C_1 r_2 C_2 p^2 + [(r_1 + r_2) C_1 + r_2 C_2] p + 1} = \frac{1}{1 + a_1 p_H + a_2 p_H^2}. \quad (6.37)$$

Эта функция является характеристикой фильтра нижних частот второго порядка:

$$F(\omega) = \frac{1}{-r_1 C_1 r_2 C_2 \omega^2 + j[(r_1 + r_2) C_1 + r_2 C_2] \omega + 1}. \quad (6.38)$$

Частотная характеристика $|F(\omega)|$ или $20 \lg |F(\omega)|$ состоит из трех основных частей, и сопряжения между ними:

при $\omega r_1 C_1 \ll 1$ $\omega \ll 1/(r_1 C_1)$; $|F(\omega)| \approx 1$; $20 \lg |F(\omega)| \approx 0$;

при $\omega [(r_1 + r_2) C_1 + r_2 C_2] > \omega^2 r_1 C_1 r_2 C_2 > 1$

$$|F(\omega)| \approx \frac{1}{\omega [(r_1 + r_2) C_1 + r_2 C_2]} \text{ и } 20 \lg |F(\omega)| = -20 \lg k_1 \omega;$$

при $\omega^2 r_1 C_1 r_2 C_2 > \omega [(r_1 + r_2) C_1 + r_2 C_2] > 1$

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\omega^2 r_1 C_1 r_2 C_2} \text{ и } 20 \lg |F(\omega)| = -20 \lg k_2 \omega^2.$$

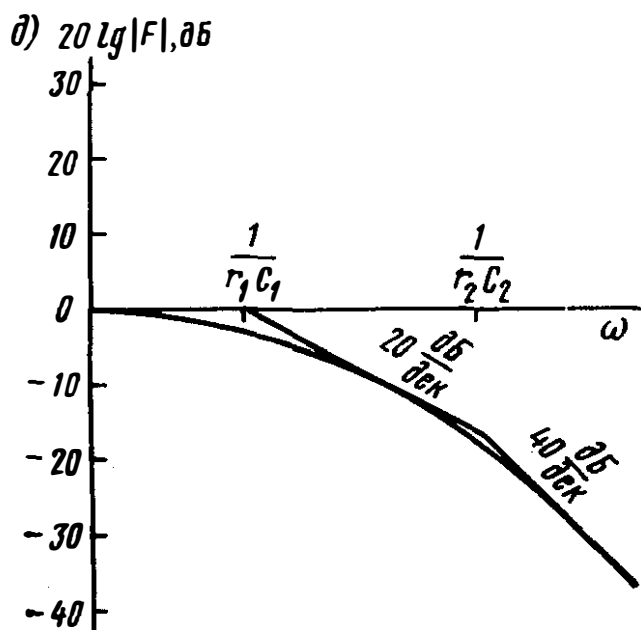
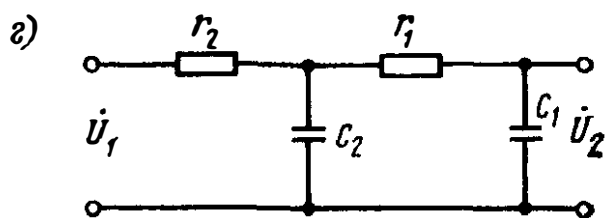
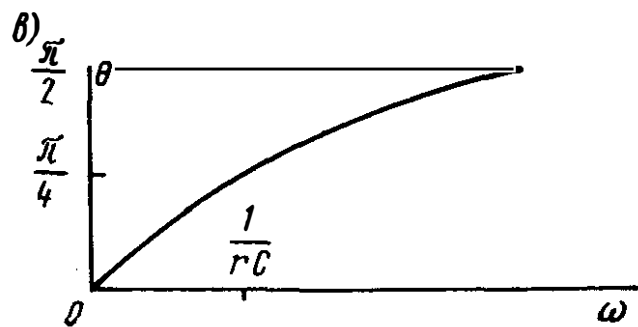
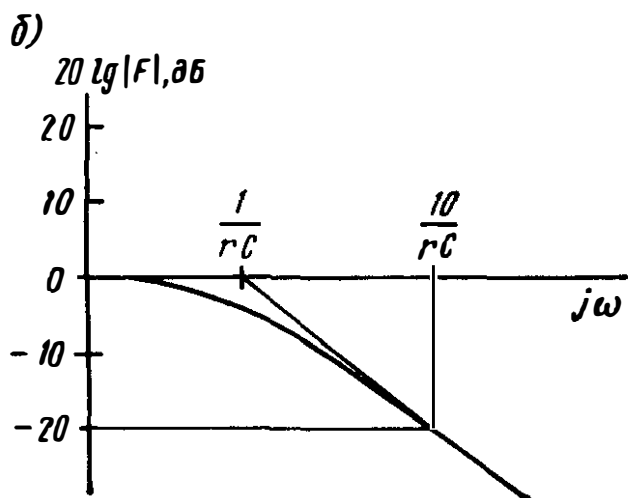
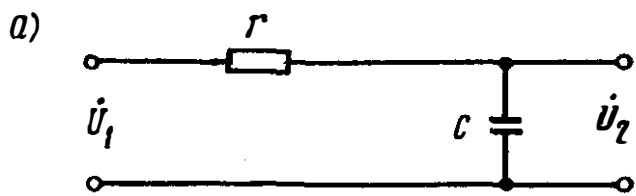


Рис. 6.22

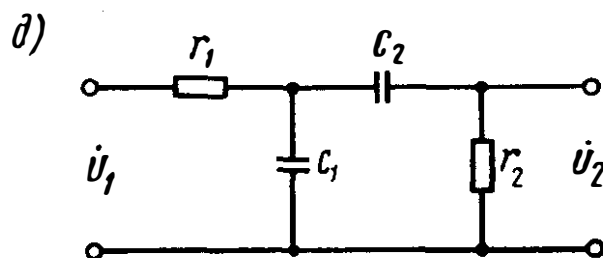
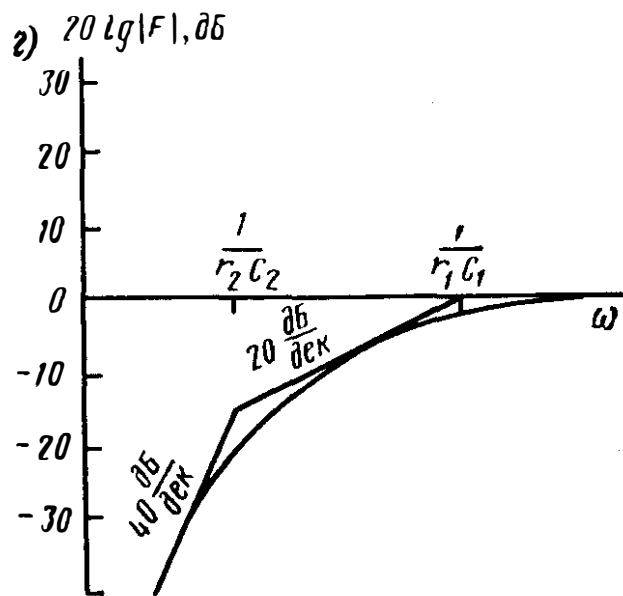
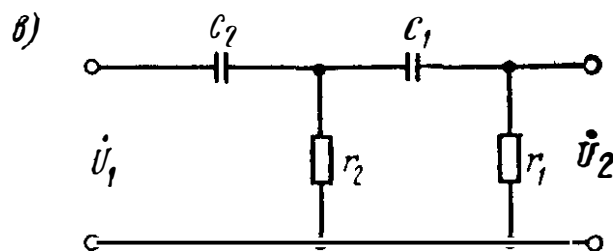
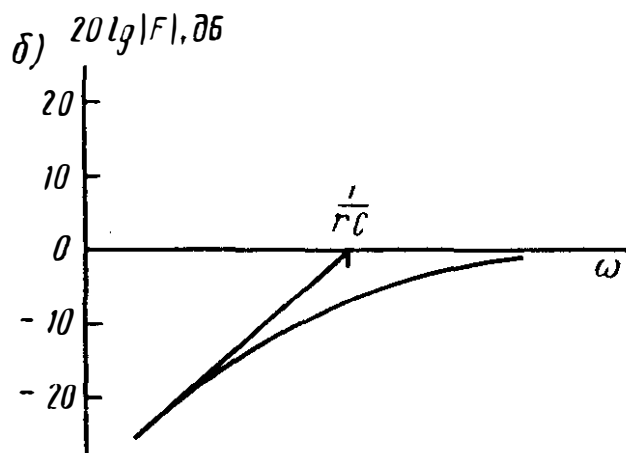
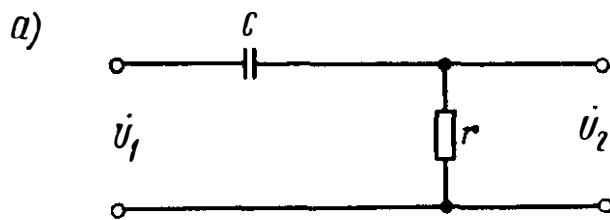


Рис. 6.23

Общий вид зависимости $20 \lg |F(\omega)|$ приведен на рис. 6.22, д. В широком диапазоне частот рассматриваемая схема представляет собой фильтр нижних частот, пропускающий с ненулевым затуханием частоты $\omega \ll 1/(r_1 C_1)$, дающий возрастание затухания 20 дБ на декаду в полосе $1/(r_1 C_1) < \omega < 1/(r_2 C_2)$ и 40 дБ на декаду на частотах $\omega > 1/(r_2 C_2)$.

Для облегчения вычисления переходных характеристик и систематизации схем rC амплитудно-частотные характеристики принято идеализировать, заменяя их асимптотическими, образованными из отрезков прямых (см. рис. 6.22, б, д).

Рассмотренные фильтры нижних частот (см. рис. 6.22, а и з) применяют в цепях питания электронных устройств и в случаях достаточного удаления рабочих и нерабочих частот, которые должны быть отфильтрованы друг от друга. Так, например, если подлежащая отфильтровке частота в 100 раз больше рабочей, то фильтр (см. рис. 6.22, а) с затуханием 20 дБ на декаду ослабит ее на 40 дБ, т. е. уменьшит амплитуду мешающего колебания в 100 раз. Эти же схемы в цепях систем автоматического регулирования применяют как корректирующие устройства, дающие запаздывание по фазе.

Фильтры верхних частот rC (корректирующие устройства с опережением по фазе). Рассмотрим схему, приведенную на рис. 6.23, а. Для нее

$$F(p) = \frac{prC}{1 + prC} = \frac{p_H}{1 + p_H}, \quad p_H = rCp. \quad (6.39)$$

Это характеристика фильтра верхних частот первого порядка. Его функция передачи при $p_H \rightarrow \infty$ равна единице и имеет нуль при $p_H = 0$.

Частотная характеристика ФВЧ

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{j\omega rC}{1 + j\omega rC} = \frac{\omega^2 r^2 C^2}{1 + \omega^2 r^2 C^2} + j \frac{\omega rC}{1 + \omega^2 r^2 C^2} = \\ &= \frac{\omega rC}{\sqrt{1 + \omega^2 r^2 C^2}} e^{j\theta}, \quad \theta = \arctg \frac{1}{\omega rC}. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Кривая $|F(\omega)|$ имеет два характерных участка:

на частотах $\omega > 1/(rC)$ $|F(\omega)| \approx 1$; $20 \lg |F(\omega)| \approx 0$;

на частотах $\omega < 1/(rC)$ $|F(\omega)| \approx \omega rC$; $20 \lg |F(\omega)| \approx 20 \lg k\omega$.

Идеализированная (асимптотическая) логарифмическая амплитудно-частотная характеристика приведена на рис. 6.23, б.

В широком диапазоне частот схема представляет собой ФВЧ, пропускающий токи с частотами $\omega > 1/(rC)$. На частотах $\omega < 1/(rC)$ функция $F(p) = kp$. Таким образом, схема является дифференцирующей.

Функция передачи с большей крутизной нарастания затухания (рис. 6.23, в) имеет вид:

$$F(p) = \frac{r_1 C_1 r_2 C_2 p^2}{r_1 C_1 r_2 C_2 p^2 + [(r_1 + r_2) C_1 + r_2 C_2] p + 1} = \frac{H p_H^2}{1 + a_1 p_H + a_2 p_H^2}. \quad (6.41)$$

Фильтр	Функция передачи фильтра	
	первого порядка	второго порядка
ФНЧ	$\frac{1}{1 + \rho_H}$	$\frac{1}{1 + a_1 \rho_H + a_2 \rho_H^2}$
ФВЧ	$\frac{\rho_H}{1 + \rho_H}$	$\frac{H \rho_H^2}{1 + a_1 \rho_H + a_2 \rho_H^2}$
ПФ	Нет	$\frac{H \rho_H}{1 + a_1 \rho_H + a_2 \rho_H^2}$

Это характеристика фильтра верхних частот второго порядка. Его частотная характеристика

$$F(\omega) = \frac{-r_1 C_1 r_2 C_2 \omega^2}{-r_1 C_1 r_2 C_2 \omega^2 + j[(r_1 + r_2) C_1 + r_2 C_2] \omega + 1} \quad (6.42)$$

Идеализированная характеристика $20 \lg |F(\omega)|$ этого фильтра приведена на рис. 6.23, *г*.

Полосовой фильтр rC . На рис. 6.23, *д* приведена схема простейшего полосового фильтра rC . Для него

$$F(\rho) = \frac{r_2 C_2 \rho}{r_1 C_1 r_2 C_2 \rho^2 + [r_1 (C_1 + C_2) + r_2 C_2] \rho + 1} = \frac{H \rho_H}{1 + a_1 \rho_H + a_2 \rho_H^2} \quad (6.43)$$

Это характеристика фильтра второго порядка. Его функция передачи ПФ имеет нуль при $\rho_H = 0$ и $\rho_H \rightarrow \infty$.

Вид функции передачи для рассмотренных фильтров (см. рис. 6.22 и 6.23) сведен в табл. 6.1.

Как видно из таблицы, функции передачи фильтров первого порядка определяются одним параметром ρ_H , обуславливающим частоту среза фильтра. Функции передачи второго и более высокого порядка содержат ряд параметров a_1, a_2, H , численные значения которых могут влиять на характер зависимости $F(\rho)$ и должны поэтому соответствующим образом быть выбраны.

Мостовые цепи rC . В разнообразных устройствах преобразования сигналов и, в частности, при построении активных rC фильтров находят широкое применение мостовые цепи rC . Для мостовых схем характерно наличие двух путей передачи энергии, что открывает возможность изменения сигналов, передаваемых по ним. Использование реактивных элементов двух видов L и C можно получать токи, сдвинутые друг относительно друга на 180° , и таким образом полное прекращение передачи. Применением реактивных элементов одного вида можно только частично ослабить сигналы на выходе. Эти явления похожи на явления в резонансных цепях, поэтому мостовые цепи rC иногда называют резонансными.

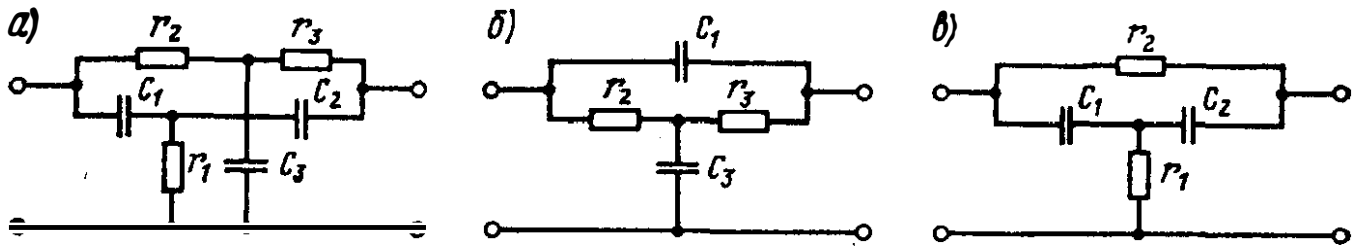


Рис. 6.24

На рис. 6.24 приведено несколько таких схем. Каждая из них представляет собой параллельное соединение ФНЧ и ФВЧ в разных вариантах. Схема рис. 6.24, а представляет собой параллельное соединение полных четырехполюсников, схема рис. 6.24, б — одного полного, схема рис. 6.24, в — неполного. Способы определения параметров таких соединений рассматривались в главе 2. По отношению к схеме, приведенной на рис. 6.24, а, они сводятся к нахождению сопротивлений холостого хода для схем T , вычислению по ним проводимостей короткого замыкания и суммированию последних. Определение параметров рассматриваемых схем (см. рис. 6.24, а и б) в общем виде выполнено там в виде примера. Цепи, приведенные на рис. 6.24, удобно характеризовать проводимостью передачи $Y_{12} = Y_{21}$ или коэффициентом передачи по напряжению.

В виде, удобном для определения элементов схемы по заданной резонансной частоте, соответствующие характеристики для схем 6.24, а и б приведены в табл. 6.2.

Простейшие фильтрующие цепи LC. В качестве простейших фильтрующих цепей LC обычно используют реактивные двухполюсники — резонансные контуры. Фильтрующие свойства резонансных контуров характеризуют отношением напряжений или токов на заданной частоте к напряжению или току в контуре при резонансе. Фильтрующие свойства цепи удобно также характеризовать функцией передачи $F(p)$ или затуханием, рассматривая цепь как четырехполюсник.

Функции передачи цепей (рис. 6.25, а и б):

$$F_{aU} = \frac{1}{1 + (Z_1/R)}; \quad F_{бI} = \frac{1}{1 + (R/Z_2)}$$

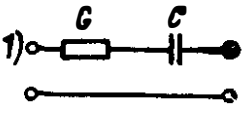
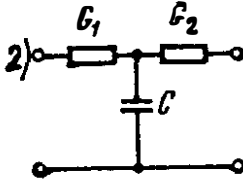
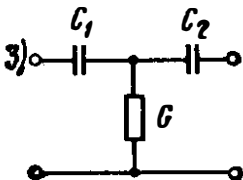
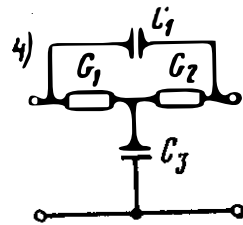
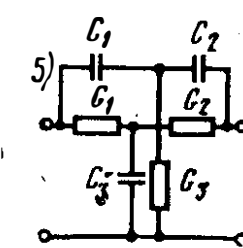
Затухание передачи рассматриваемых цепей характеризуется выражениями, которые при активной нагрузке принимают вид:

$$a_a = \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \frac{Z_1}{R} \right|; \quad (6.44)$$

$$a_b = \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \frac{R}{Z_2} \right|. \quad (6.45)$$

Любой эффект действия цепи (см. рис. 6.25, а) можно получить и по схеме (см. рис. 6.25, б), если взять: $Z_2 = R^2/Z_1$; $Z_1 Z_2 = R^2$, так как в этом случае

$$a = \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \frac{Z_1}{R} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \frac{R}{Z_2} \right|.$$

Схема	Y_{12}	Значения параметров	
	$Y_{12} = \frac{-kp}{p+a}$	$k = G$ $a = \frac{G}{C}$	$G = k$ $C = \frac{k}{a}$
	$Y_{12} = \frac{-k}{p+a}$	$k = \frac{G_1 G_2}{C}$ $a = \frac{G_1 + G_2}{C}$	
	$Y_{12} = \frac{-kp^2}{p+a}$	$k = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ $a = \frac{G}{C_1 + C_2}$	
	$Y_{12} = \frac{-(p^2 + ap + 1)}{p+a}$	$G_1 = 2,5 - a$ $G_2 = \frac{1}{a - \frac{1}{G_1}}$ $C_1 = 1$ $C_3 = G_1 G_2$	
	$Y_{12} \approx \frac{-(p^2 + ap + 1)}{p+1}$ $a < 1$	$G_1 = (2,5 - a) \frac{1+a}{2+a}$ $G_2 = \frac{G_1}{G_1 - 1}$ $G_3 = \frac{G_1 G_2}{1+a}$ $C_1 = G_1; C_2 = G_2; C_3 = G_3$	

Если Z_1 — сопротивление контура резонанса напряжений, настроенного на частоту ω_1 , то в нагрузку пропускается преимущественно ток с угловой частотой ω_1 и в этом случае $a = 0$. Токи с остальными частотами проходят с затуханием, определяемым формулой (6.44). Если необходимо задержать ток с какой-либо одной угловой частотой ω_2 , то сопротивление Z_1 должно быть сопротивлением контура резонанса токов.

Очень часто приходится сталкиваться с необходимостью построения цепи, которая пропускала бы ток с одной угловой частотой ω_1 и задерживала токи с другими угловыми частотами — $\omega_2, \omega_3, \dots$. Очевидно, этого можно достичь, взяв в схему, приведенной на рис. 6.25, а, многоэлементный двухполюсник, который имел бы на частоте ω_1 резонанс напряжений, а на частотах $\omega_2, \omega_3, \dots$ — резонансы токов.

Одним из примеров подобной задачи является отфильтрование гармоник и основной частоты сигнала в выходных цепях радиопередатчиков включением в анодную цепь выходного каскада трехэлементного контура. Другим примером может служить фильтр, устанавливаемый на тяговых подстанциях, питающих участки железных дорог, электрифицированных на постоянном токе. Этот фильтр (см. рис. 6.25) должен отсеивать гармонические составляющие выпрямленного тока, значительно влияющие на цепи связи. Этот фильтр имеет ряд параллельных ветвей, настроенных на резонанс напряжений на частотах 300, 400, 600, 900 и 1200 Гц и др.

Во всех случаях выбор схемы и определение элементов, образующих двухполюсник, включаемый по схемам, приведенным на рис. 6.25, проводят исходя из заданных резонансных частот в соответствии с изложенными выше правилами построения двухполюсников по частотной зависимости сопротивления.

Наличие потерь в элементах снижает фильтрующие свойства двухполюсников, поскольку при резонансах напряжений сопротивление не равно нулю, а при резонансах токов небезгранично велико. Кроме того, такие схемы плохо согласуются с нагрузками. Вследствие этого в ряде случаев, когда необходимо значительное ослабление нежелательных гармонических составляющих сигналов или подавление колебаний в полосе частот и согласование цепей по сопротивлению, в качестве фильтров применяют более сложные четырехполюсные схемы, рассматриваемые далее.

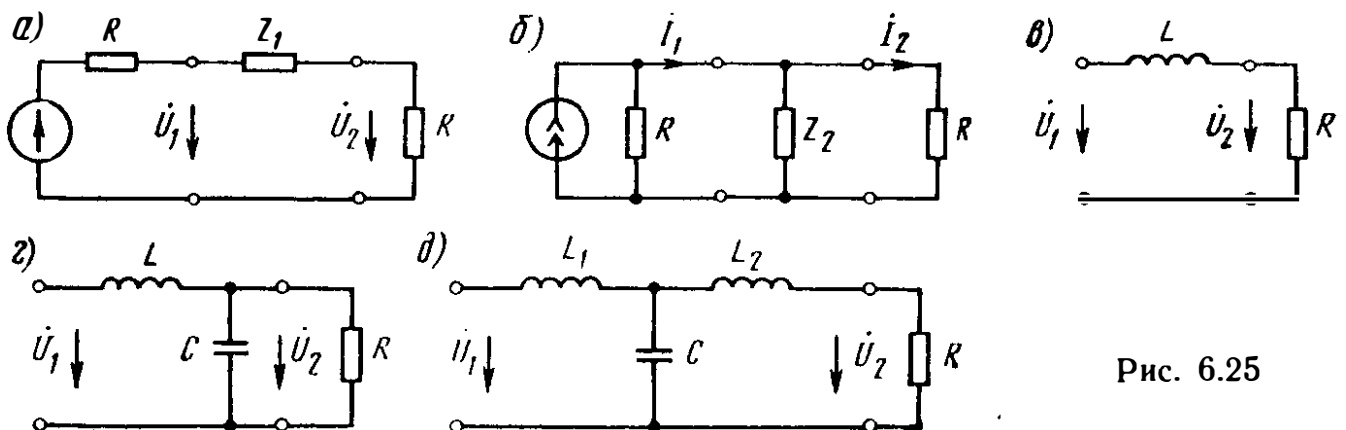


Рис. 6.25

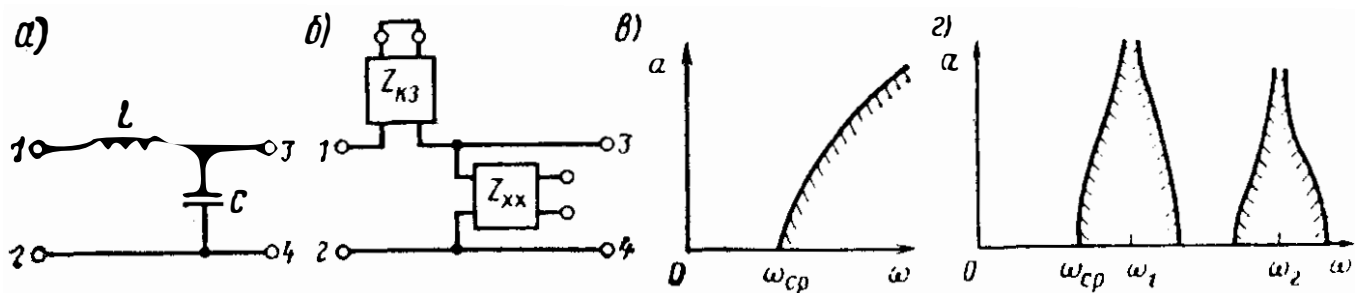


Рис. 6.26

Простейший фильтр нижних частот можно получить, если в качестве Z_1 в схеме, приведенной на рис. 6.25, а, взять индуктивность (рис. 6.25, в).

Эту схему удобно характеризовать функцией передачи:

$$F(p) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{1 + (L/R)p} = \frac{1}{1 + p_H}, \quad p_H = \frac{L}{R} p. \quad (6.46)$$

Это функция передачи ФНЧ первого порядка. Как видно, свойства его сходны со свойствами простейшего RC фильтра нижних частот (см. рис. 6.22, а).

Фильтр нижних частот с лучшими свойствами можно получить, увеличивая число элементов в схеме (рис. 6.25, г и д).

Для схемы (см. рис. 6.25, г)

$$F(p) = \frac{1}{1 + (L/R)p + LCp^2} + \frac{1}{1 + a_1 p_H + p_H^2}, \quad (6.47)$$

где $p_H = j\Omega = j(\omega/\omega_0)$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Для схемы (см. рис. 6.25, д)

$$F(p) = \frac{1}{1 + \left(\frac{L_1}{R} + \frac{L_2}{R}\right)p + L_1 Cp^2 + L_1 C \frac{L_2}{R} p^3} = \frac{1}{1 + a_1 p_H + a_2 p_H^2 + a_3 p_H^3}, \quad (6.48)$$

где $p_H = j\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C}}$.

Фильтры на отрезках линий. Фильтр, образованный соединением катушек индуктивности и конденсаторов, удобно использовать в относительно низком диапазоне частот (до сотен герц). На более высоких частотах в технике СВЧ вместо катушек индуктивности и конденсаторов применяют отрезки линий с замкнутыми или разомкнутыми выходными жабимами. Как указывалось в § 3.3, при рассмотрении линий с малыми потерями такие отрезки линий ведут себя как реактивные сопротивления.

Например, ФНЧ второго порядка (рис. 6.26, а) можно выполнить по схеме, приведенной на рис. 6.26, б. Зависимость от частоты входных сопротивлений линий, заменяющих катушку и конденсатор, показана

на рис. 3.12. В ограниченном диапазоне частот до ω_1 схема ведет себя как ФНЧ (см. рис. 6.26, в), при дальнейшем расширении диапазона частот вследствие периодичности $Z_{кз}(\omega)$ и $Z_{хх}(\omega)$ наблюдается и периодическая смена свойств фильтра, что иллюстрируется рис. 6.26, г.

6.7. АКТИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ rC

Электрические цепи с активными необратимыми элементами находят последнее время все большее применение. Используя их, оказывается возможным, с одной стороны, получать цепи с более разнообразными, чем с пассивными элементами, характеристиками и, с другой, составлять схемы без катушек индуктивности. Последнее позволяет уменьшать массу и габаритные размеры устройств, особенно возрастающие в области малых частот.

Имеется несколько возможностей построения активных rC цепей в зависимости от вида используемых необратимых элементов, в качестве которых могут быть применены зависимые источники, усилители, преобразователи отрицательных сопротивлений, гираторы и разнообразные ЧЗОС.

rC фильтры с развязывающими усилителями. Было отмечено, что простейшие фильтры rC должны работать в режиме холостого хода на выходе или в близком к нему режиме. Поэтому на выходе фильтра rC (см. рис. 6.22 и 6.23) включают усилитель с большим входным сопротивлением.

Если фильтрующие свойства простейших схем оказываются недостаточными, можно цепочечно соединять несколько одинаковых фильтров с усилителями на выходах. Функция передачи такого соединения

$$F = F_1^n k^n,$$

где F_1 — функция передачи простейшего пассивного фильтра;
 k — коэффициент усиления усилителя;
 n — число входящих в цепочку звеньев.

Такой способ построения фильтров с заданной характеристикой называют **развязанной реализацией**, поскольку усилители препятствуют воздействию последующих звеньев фильтра на предыдущие. Недостатком его является большая зависимость функции передачи от коэффициента усиления k и отсюда высокие требования к его стабильности. Практически в качестве развязывающих применяют операционные усилители (рис. 6.27, а и б).

rC фильтры на операционных усилителях с частотно-зависимой обратной связью. Другим способом получения активного rC фильтра является использование схем с обратной связью (рис. 6.28, а).

Как известно, функция передачи соединения с обратной связью $k = k_1 / (1 \pm k_1 k_2)$. Здесь k_1 представляет собой коэффициент усиления усилителя, а k_2 — функцию передачи цепи обратной связи. При $k_1 k_2 \gg 1$ $k_2 = 1/k_2 = 1/F_2(p)$.

ФНЧ первого порядка такого вида приведен на рис. 6.27, в. Функцию передачи этого фильтра определяют из условия $F = \dot{U}_2 / \dot{U}_1 = -Z_2 / R_1$, где $Z_2 = 1 / [1/R_2 + pC]$.

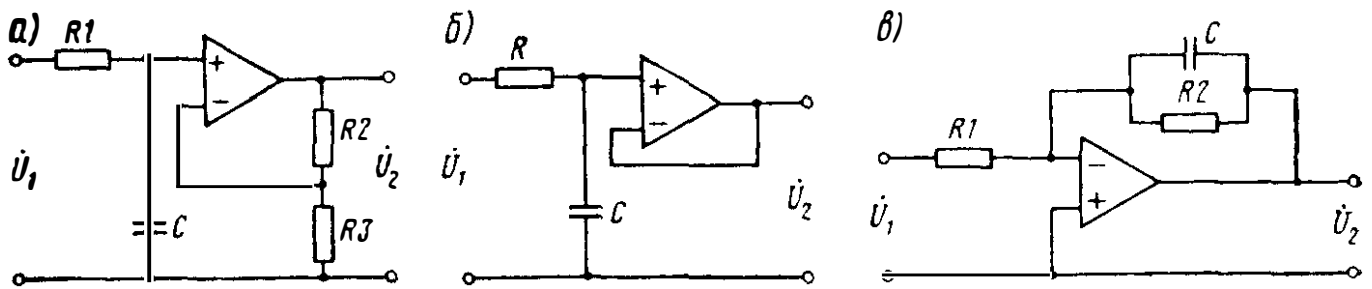


Рис. 6.27

В более сложных случаях при рассмотрении фильтров с обратной связью приходится цепь обратной связи считать четырехполюсником. Четырехполюсник обратной связи с одной стороны подключен к входу усилителя с большим сопротивлением. Его режим со стороны входа определяется током \dot{I}_1 и напряжением \dot{U}_1 , которое при большом усилении пренебрежимо мало по сравнению с \dot{U}_2 . С другой стороны четырехполюсник обратной связи подключен к выходу усилителя с малым выходным сопротивлением. Его режим со стороны выхода определяется напряжением \dot{U}_2 . Имея это в виду, для четырехполюсника обратной связи получим:

$$\dot{I}_1 = Y_{11} \dot{U}_1 + Y_{12} \dot{U}_2 = Y_{12} \dot{U}_2.$$

Таким образом, цепь обратной связи (см. рис. 6.28, а) удобно характеризовать функцией передачи $F_2(p) = Y_{12}$. Если в качестве цепи обратной связи выбрать двойную Т-образную схему, рассмотренную ранее, то получается активный полосовой фильтр rC . Его широко применяют в устройствах телемеханики для отфильтровывания низких частот (герцы и десятки герц), когда использование катушек индуктивности затруднительно из-за их больших габаритных размеров на данных частотах.

Более разнообразные возможности открываются при использовании усилителя в соединении с двумя пассивными четырехполюсника-

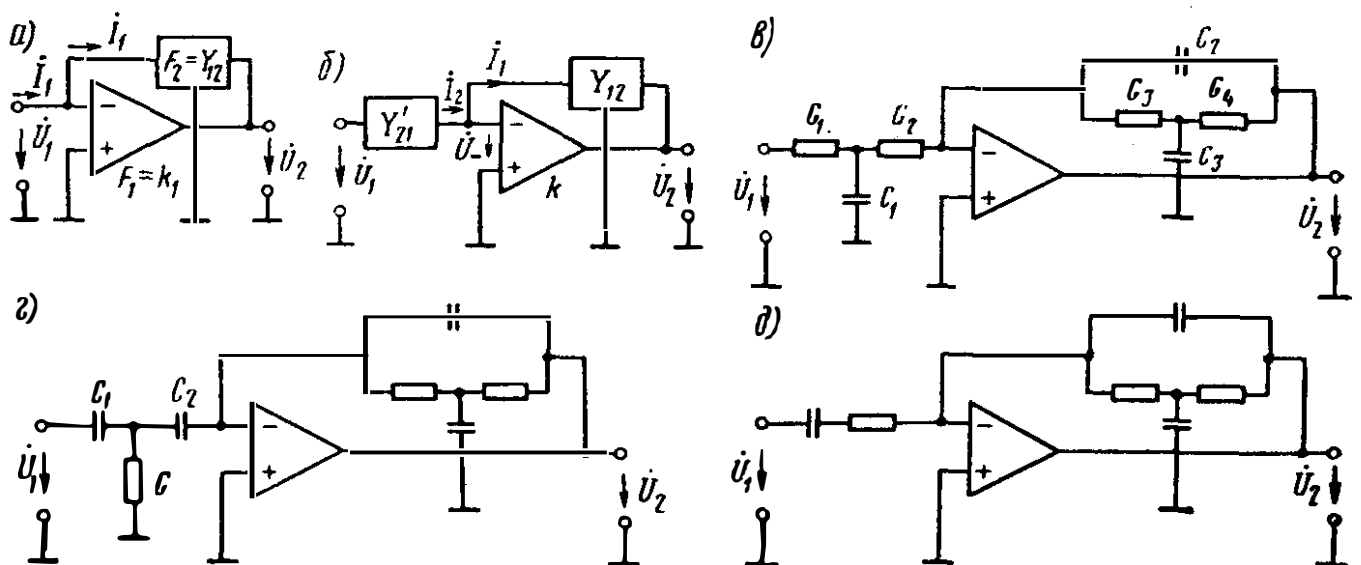


Рис. 6.28

ми (рис. 6.28 б). Найдем функцию передачи $F = \dot{U}_2 / \dot{U}_1$ цепи. По схеме видно, что $\dot{I}_1 = -\dot{I}_2$; $\dot{I}'_2 = Y'_{12}\dot{U}_1 + Y'_{22}\dot{U}_-$; $\dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_- + Y_{12}\dot{U}_2$. Кроме того,

$$\dot{U}_- = -\frac{1}{k} \dot{U}_2.$$

Отсюда
$$Y'_{21} \dot{U}_1 - Y'_{22} \frac{\dot{U}_2}{k} = Y_{11} \frac{\dot{U}_2}{k} - Y_{12} \dot{U}_2$$

и

$$F = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{-Y'_{21}}{Y_{12} - \frac{1}{k} (Y_{11} + Y'_{22})}.$$

При $k \rightarrow \infty$ $F = \dot{U}_2 / \dot{U}_1 = -Y'_{21} / Y_{21}$.

Приемы синтеза функций передачи такого вида рассмотрены в § 2.23.

Если необходимо создать цепь с функцией передачи $F = M(p) / N(p)$, то следует взять $Y'_{21} = -M(p) / L(p)$ и $Y_{12} = N(p) / L(p)$.

В табл. 6.2 приведены функции передачи Y_{12} нескольких простых rC цепей, из которых можно подбирать элементы схемы, приведенной на рис. 6.28, б, для построения фильтров нижних, верхних частот и полосовых.

Фильтр нижних частот можно получить, если в качестве Y'_{21} взять вариант 2, в качестве Y_{12} — вариант 4 (см. табл. 6.2).

Тогда, пренебрегая знаком, получим:

$$F(p) = \frac{Y'_{21}}{Y_{12}} = \frac{-k}{p+a} \frac{p+a}{-(p^2+ap+1)} = \frac{k}{p^2+ap+1}.$$

Это характеристика фильтра нижних частот второго порядка. Схема его приведена на рис. 6.28, в.

Для получения фильтра верхних частот следует для реализации Y'_{21} использовать вариант 3, а для Y_{12} — вариант 4 (см. табл. 6.2). Тогда

$$F(p) = \frac{Y'_{21}}{Y_{12}} = \frac{-kp^2}{(p+a)} \frac{p+a}{-(p^2+ap+1)} = \frac{kp^2}{p^2+ap+1}.$$

Схема этого фильтра приведена на рис. 6.28, г.

Полосовой пропускающий фильтр (рис. 6.28, д) имеет следующую функцию передачи:

$$F(p) = \frac{Y'_{21}}{Y_{12}} = \frac{-kp}{p+a} \frac{p+a}{-(p^2+ap+1)} = \frac{kp}{p^2+ap+1}.$$

Фильтры на операционных усилителях с многопетлевой обратной связью. Фильтры, выполняемые по схеме, приведенной на рис. 6.28, б, имеют одну петлю обратной связи. Другим практически применяемым способом реализации схемы фильтра rC является использование многопетлевой (обычно двухпетлевой) обратной связи. Такие фильтры малочувствительны к изменению параметров его элементов.

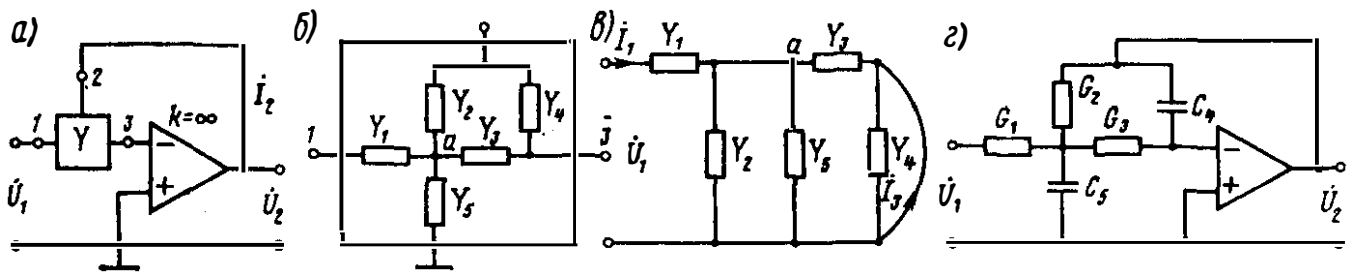


Рис. 6.29

Схема фильтра с двухпетлевой обратной связью в общем виде приведена на рис. 6.29 а. Квадратом здесь изображена пассивная цепь rC с тремя внешними узлами, характеризуемыми матрицей проводимостей короткого замыкания. Узлы находятся под напряжениями \dot{U}_1 — \dot{U}_3 . В них входят токи \dot{I}_1 — \dot{I}_3 . Связи между токами и напряжениями определяются системой из трех уравнений узловых напряжений. Выпишем последнее из них:

$$\dot{I}_3 = Y_{31} \dot{U}_1 + Y_{32} \dot{U}_2 + Y_{33} \dot{U}_3.$$

Вследствие большого входного сопротивления усилителя с усилением k , обозначенного на схеме треугольником, $\dot{I}_3 = 0$. В то же время $\dot{U}_3 = \dot{U}_2/k$. Таким образом, $Y_{31} \dot{U}_1 + Y_{32} \dot{U}_2 + (Y_{33} \dot{U}_2/k) = 0$ и

$$F = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{-Y_{31}}{Y_{32} + (Y_{33}/k)} = -\frac{kY_{31}}{kY_{32} + Y_{33}}. \quad (6.49)$$

Пассивную часть фильтра второго порядка — цепь rC с тремя узлами — можно представить схемой (рис. 6.29, б). Найдем для нее необходимые при определении функции передачи фильтра F проводимости: $Y_{31} = Y_{13}$; $Y_{32} = Y_{23}$ и Y_{33} .

Определим предварительно проводимость Y_{11} , для чего закоротим узлы 2 и 3. Схема изменится (рис. 6.29, в):

$$Y_{11} = \frac{Y_1 (Y_2 + Y_3 + Y_5)}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_5}.$$

Если для краткости обозначить $Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_5 = D$, то

$$Y_{11} = Y_1 (D - Y_1) / D = Y_1 - (Y_1^2 / D).$$

Вычислим $Y_{31} = Y_{13}$, для чего определим ток \dot{I}_3 при действии в узле 1 напряжения \dot{U}_1 . Ток в узле 1 $\dot{I}_1 = \dot{U}_1 Y_{11} = \dot{U}_1 \frac{Y_1 (D - Y_1)}{D}$. В точке a он разветвляется на части, пропорциональные проводимостям ветвей. Следовательно, $\dot{I}_3 = -\dot{I}_1 Y_3 / D - Y_1 = -\dot{U}_1 \frac{Y_1 Y_3}{D}$.

Проводимость

$$Y_{13} = Y_{31} = -\frac{Y_1 Y_3}{D}.$$

Аналогично при закорачивании узлов 1 и 2 найдем:

$$Y_{23} = Y_{31} = -Y_4 - (Y_2 Y_3)/D; \quad Y_{33} = Y_3 + Y_4 - (Y_3^2/D).$$

Используя полученные выражения, для Y_{31}, Y_{32} , и Y_{33} получим

$$F = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{-kY_{31}}{kY_{32} + Y_{33}}; \quad \text{при } k \rightarrow \infty \quad F = -\frac{Y_{31}}{Y_{33}} = \frac{Y_1 Y_3}{Y_2 Y_3 + Y_4 (Y_1 + Y_2 + Y_4 + Y_5)}. \quad (6.50)$$

Схема фильтра нижних частот с двухпетлевой обратной связью, содержащая усилитель с бесконечным усилением, приведена на рис. 6.29, г. Такие фильтры применены в аппаратуре диспетчерской централизации типа «Луч». Из сравнения схем, приведенных на рис. 6.29, б и г, видно, что $Y_1 = G_1$; $Y_2 = G_2$; $Y_3 = G_3$; $Y_4 = \rho C_4$; $Y_5 = \rho C_5$;

$$F = \frac{Y_1 Y_3}{Y_2 Y_3 + Y_4 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_5)} = \frac{G_1 G_3}{G_2 G_3 + \rho C_4 (G_1 + G_2 + G_3 + \rho C_5)} = \frac{H}{1 + a_1 \rho + a_2 \rho^2}; \quad (6.51)$$

$$H = \frac{G_1}{G_2}; \quad a_1 = \frac{1}{G_2 G_3} (G_1 + G_2 + G_3) C_4; \quad a_2 = \frac{C_4 C_5}{G_2 G_3}.$$

Схемы фильтров верхних частот и полосового приведены соответственно на рис. 6.30, а и б. Выражения для функций передачи этих схем можно получить, подставляя в формулу (6.50) их значения Y_i , а также найти в справочной литературе.

Фильтры, содержащие частотно-зависимые отрицательные сопротивления. Широкие и разнообразные возможности для построения фильтров с использованием интегральной технологии открывают частотно-зависимые отрицательные сопротивления (ЧЗОС), рассмотренные в § 2.15. Для реализации ЧЗОС (один из возможных способов) следует в схеме, приведенной на рис. 2.44, г, принять $Z_1(\rho) = Z_5(\rho) = 1/(\rho C)$ $Z_2(\rho) = Z_3(\rho) = Z_4(\rho) = R$. В этом случае

$$Z_{\text{вх}} = \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4} = \frac{1}{\rho^2 RC^2} = \frac{-1}{\omega^2 RC^2}; \quad Y_{\text{вх}} = D\rho^2; \quad D = RC^2.$$

У полученного элемента нет аналога среди обратимых пассивных элементов. На вещественных частотах он имеет отрицательное активное сопротивление и таким образом сам по себе неустойчив.

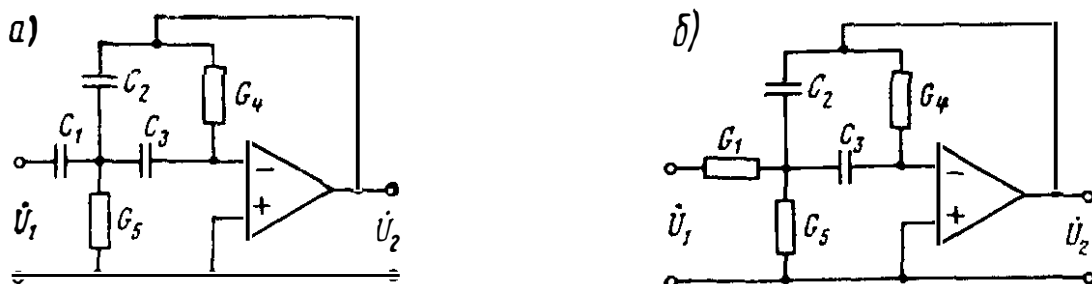


Рис. 6.30

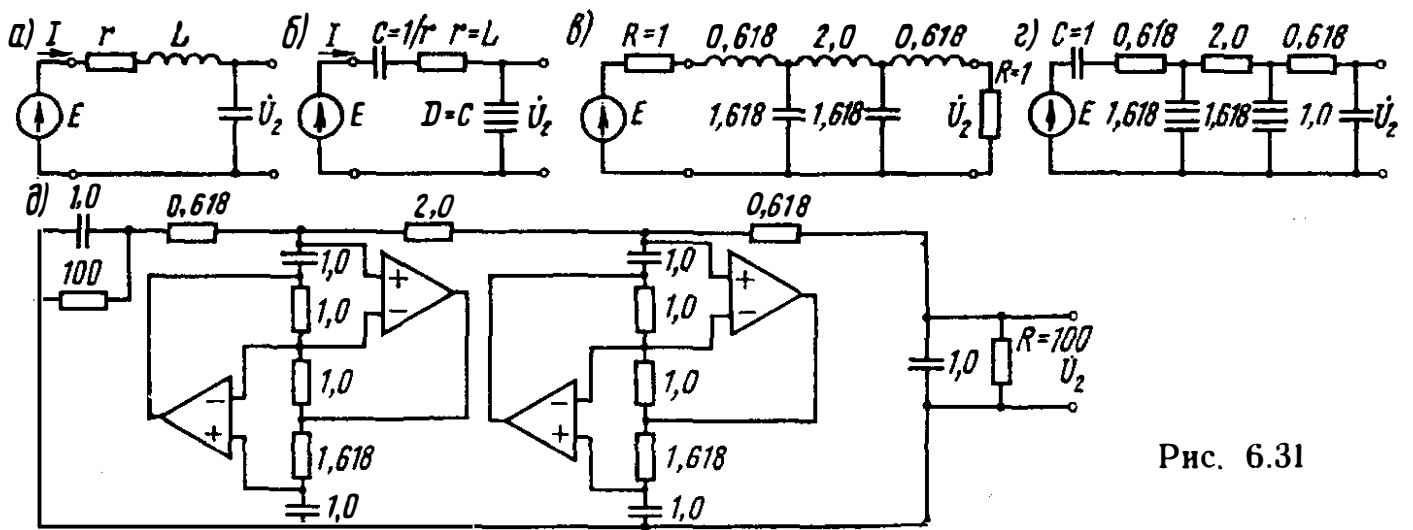


Рис. 6.31

Для применения ЧЗОС при синтезе фильтров следует сначала к исходной схеме RLC применить так называемое $RLC \rightarrow CRD$ -преобразование. Оно заключается в замене сопротивления $Z_{RLC} = r + pL + \frac{1}{pC}$ сопротивлением $Z_{CRD} = \frac{r}{p} + L + \frac{1}{p^2C}$. Таким образом, резистор r заменяется конденсатором емкостью $1/r$; индуктивность L — резистором сопротивлением L и емкость с элементом ЧЗОС — сопротивлением Dp^2 , где $D = C$.

Параметры ЧЗОС не зависят от усиления входящих в его схему усилителей (см. § 2.15). Рассмотрим, например, схему ФНЧ второго порядка (рис. 6.31, а). Найдем для нее функцию передачи $F = E/\dot{U}_2$ при холостом ходе на выходе. Здесь

$$\dot{i} = \frac{E}{r + pL + \frac{1}{pC}}; \quad \dot{U}_2 = \frac{1}{pC} \dot{i}; \quad F_{RLC} = \frac{1}{rCp + LCp^2 + 1}.$$

Осуществим $RLC \rightarrow CRD$ -преобразование. Получим схему (рис. 6.31, б). Вставшее на место конденсатора ЧЗОС изображено четырьмя горизонтальными черточками. Функция передачи для преобразованной схемы при холостом ходе:

$$F = \frac{E}{\dot{U}_2}; \quad \dot{i} = \frac{E}{\frac{r}{p} + L + \frac{1}{Cp^2}}; \quad \dot{U}_2 = \frac{1}{Cp^2} \dot{i},$$

отсюда $F_{CRD} = 1/(rCp + LCp^2 + 1)$.

Как видно, $RLC \rightarrow CRD$ -преобразование не меняет передаточной функции цепи и, таким образом, схемы (см. рис. 6.31, а и б) эквивалентны. Следовательно, порядок построения фильтра с ЧЗОС состоит в основном в следующем:

синтезируется фильтр rLC с необходимыми свойствами, такой фильтр называют фильтром-прототипом;

осуществляется $RLC \rightarrow CRD$ -преобразование заменой r (Ом) $\rightarrow C = \frac{1}{r}$ (Ф); L (Гн) $\rightarrow r = L$ (Ом); C (Ф) $\rightarrow D$ (фарад в секунду);

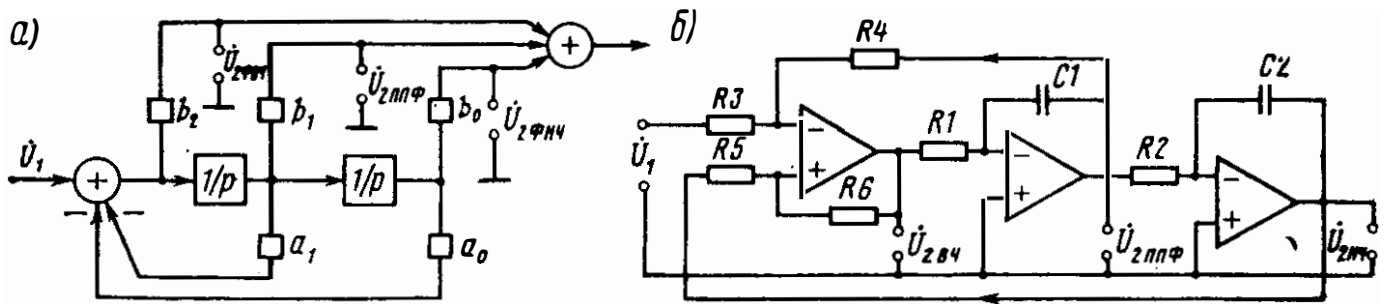


Рис. 6.32

последовательно включенные конденсаторы шунтируют большими сопротивлениями, не оказывающими существенного влияния на характеристики цепи, но обеспечивающими путь постоянному току.

На рис. 6.31, в приведена более сложная схема ФНЧ, содержащая элементы r, L, C , на рис. 6.31, г — преобразованная схема, а на рис. 6.31, д — ее реализация с использованием операционных усилителей. Использование ЧЗОС — быстро развивающееся перспективное направление фильтростроения.

Настраиваемые фильтры на интеграторах. В главе 2 (см. § 2.24) были рассмотрены способы построения схем с передаточными функциями, заданными рациональными дробями. Функция второго порядка

$$F(p) = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2} \quad (6.52)$$

может быть реализована содержащими интеграторы каноническими схемами (рис. 6.32). Во всех случаях $a_0 = 1$. При $b_1 = b_2 = 0, b_0 = H$ функция (6.52) представляет собой функцию передачи ФНЧ. Если $b_0 = b_1 = 0, b_2 = H$, то получается ФВЧ, а если $b_0 = b_2 = 0, b_1 = H$, то — ПФ.

Таким образом, открывается возможность построения настраиваемых фильтров. Пример структурной схемы такого фильтра смотри на рис. 6.32, а. Она может быть реализована различными способами. Пример реализации дан на рис. 6.32, б.

6.8. ВИДЫ АППРОКСИМАЦИИ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ ПРИ СИНТЕЗЕ ФИЛЬТРУЮЩИХ ЦЕПЕЙ

Задачи реализации и аппроксимации. Проведенный в предшествующих параграфах обзор фильтрующих цепей и их характеристик позволяет сделать вывод о том, что определенную зависимость функции передачи цепи от частоты (параметра p) можно получить разными способами. Эти способы зависят от элементов, используемых для построения фильтра (rC, LC , отрезки линий, усилители), и их соединений между собой.

Построение цепи по заданной реализуемой функции передачи $F(p)$ (см. табл. 6.1) называют реализацией. Реализации должен предшествовать выбор соответствующей реализуемой функции, представляющей собой рациональную дробь с необходимыми свойствами. Определение вида функции передачи реальной электрической цепи с

достаточной степенью точности, приближающейся к желаемой, называют а п п р о к с и м а ц и е й.

Рассмотрим решение задачи аппроксимации на примере ФНЧ.

Виды аппроксимации. Из табл. 6.1 и выражений (6.34), (6.37) и (6.40) следует, что функция передачи ФНЧ в общем случае может быть представлена в виде

$$F(p) = \frac{1}{1 + a_1 p_H + a_2 p_H^2 + \dots + a_n p^n}. \quad (6.53)$$

Чем выше порядок фильтра n , тем больше элементов в его схеме и более резко осуществляется переход от полосы пропускания к полосе задерживания. Однако ни одна реальная схема, содержащая конечное число элементов, не может дать желательной характеристики (рис. 6.33, а). И таким образом, встает задача приближения указанной зависимости к функции вида (6.53) — задача аппроксимации. Способы приближения функции составляют особый раздел математики. Последняя располагает значительным числом решений задач подобного типа.

При расчете фильтров в зависимости от конкретных требований, предъявляемых к нему со стороны системы, элементом которой он является, применяют несколько видов приближения функции передачи фильтра к идеальной. Эти виды аппроксимации показаны на рис. 6.33, б (максимально плоская), рис. 6.33, в (равноволновая), рис. 6.33, г (обратная чебышевская), рис. 6.33, д (эллиптическая).

Максимально плоская аппроксимация (Баттерворта). Передаточная функция фильтра является комплексной и характеризуется модулем и фазой. Свойства частотных фильтров пропускать или задерживать колебания различными частотами определяются модулем функции передачи. При использовании максимально плоской аппроксимации модуль функции передачи фильтра аппроксимируется монотонной кривой в полосах пропускания и задерживания.

Для определения модуля функции передачи фильтра следует исключить из рассмотрения фазочастотную характеристику. Это можно осуществить, перейдя в формуле (6.53) к квадрату модуля функции передачи и учитывая, что $p_H = j\Omega$:

$$|F(\Omega)|^2 = F(j\Omega)F(-j\Omega) = \frac{1}{1 + k_2 \Omega^2 + k_4 \Omega^4 + \dots + k_{2n} \Omega^{2n}}. \quad (6.54)$$

Из выражения (6.54) следует, что при $\Omega < 1$ младшие степени вносят большой вклад в его знаменатель, и, следовательно, приводят к существенному уменьшению коэффициента передачи фильтра. Поэто-

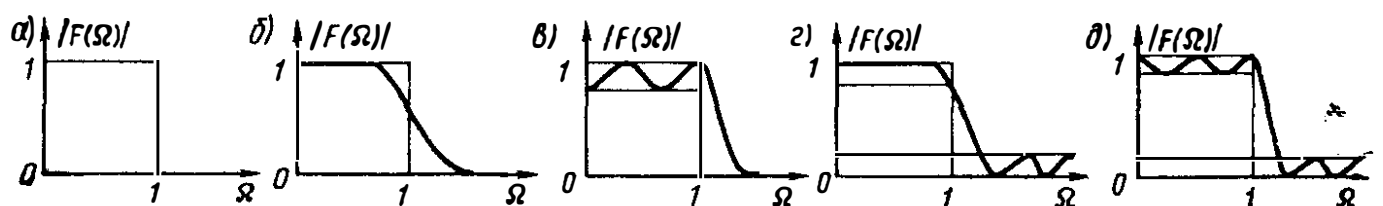


Рис. 6.33

му, для того чтобы функция передачи была максимально плоской на частотах, меньших частоты среза, необходима зависимость функции $|F(\Omega)|$ только от старшей степени Ω . Учитывая это, можно написать:

$$|F(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + k_{2n} \Omega^{2n}}. \quad (6.55)$$

Для того чтобы на частоте среза ($\Omega = 1$) квадрат модуля функции передачи фильтра $|F(\Omega)|^2 = 1/2$, следует выбрать $k_{2n} = 1$.

Таким образом, модуль функции передачи фильтра, имеющего свойство максимальной гладкости,

$$|F(\Omega)| = 1/\sqrt{1 + \Omega^{2n}}. \quad (6.56)$$

Определяемая выражением (6.56) функция называется функцией Баттерворта, а фильтры с функцией передачи, построенной на ее основе — фильтрами Баттерворта.

Нахождение коэффициентов функции передачи вида (6.55), модуль которой удовлетворяет выражению (6.56), приводит к многочленам, называемым **многочленами Баттерворта**. Проиллюстрируем решение этой задачи на примере фильтра второго порядка.

Для определения комплексного коэффициента передачи фильтра следует в выражение (6.37) подставить значение $p_H = j\Omega$, а затем перейти к квадрату модуля, умножив его на $F(-j\Omega)$. Приравняв далее полученное выражение к равенству (6.55), можно получить значения коэффициентов многочлена знаменателя:

$$F(p_H) = \frac{1}{1 + a_1 p_H + a_2 p_H^2}; \quad F(j\Omega) = \frac{1}{1 + a_1 j\Omega - a_2 \Omega^2}.$$

Отсюда

$$|F(\Omega)|^2 = F(j\Omega) F(-j\Omega) = \frac{1}{1 + a_1^2 \Omega^2 - 2a_2 \Omega^2 + a_2^2 \Omega^4}.$$

Сравнивая полученное выражение с (6.55), видим, что $a_2 = 1$, а $a_1^2 \Omega^2 - 2\Omega^2 = 0$ и, следовательно, $a_1 = \sqrt{2} = 1,414$. Таким образом, комплексный коэффициент передачи фильтра Баттерворта второго порядка имеет вид:

$$F(p_H) = \frac{1}{1 + 1,414 p_H + p_H^2}. \quad (6.57)$$

Многочлены знаменателя и соответствующие им коэффициенты фильтров первого — четвертого порядков приведены в табл. 6.3.

Равноволновая аппроксимация (Чебышева). Эту аппроксимацию осуществляют на основе использования полиномов Чебышева. Аппроксимирующая функция в полосе пропускания фильтра имеет колебательный характер с равными отклонениями от заданной функции и монотонный — в области задерживания, что определяется свойствами полиномов Чебышева. Полиномы Чебышева имеют вид:

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \arccos x) & \text{при } 0 \leq x \leq 1; \\ \operatorname{ch}(n \operatorname{Arch} x) & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

a_1	a_2	a_3	a_4	Многочлен знаменателя
1,000				$1 + \rho_H$
1,414	1,000			$1 + 1,414\rho_H + \rho_H^2$
2,000	2,000	1,000		$1 + 2\rho_H + 2\rho_H^2 + \rho_H^3$
2,613	3,414	2,613	1,000	$1 + 2,613\rho_H + 3,414\rho_H^2 +$ $+ 2,613\rho_H^3 + \rho_H^4$

Функция $T_n(x)$ колеблется в пределах ± 1 в интервале $|x| \leq 1$ и монотонно возрастает при $|x| > 1$. Приняв $\arccos x = \varphi$, а $x = \cos \varphi$ и выразив $\cos n\varphi$ через сумму членов, содержащих степени косинуса от $\cos \varphi$ до $\cos n\varphi$, можно получить алгебраическую форму полиномов Чебышева:

$$T_n(x) = x^n + C_n^2 x^{n-2} (x^2 - 1) + C_n^4 x^{n-4} (x^2 - 1) + \dots$$

Вид полиномов Чебышева первых четырех порядков:

$$T_1(x) = x; \quad T_2(x) = 2x^2 - 1; \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x; \quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

Полиномы Чебышева из всех многочленов степени n наименее уклоняются от нуля на отрезке $-1 \leq x < 1$, что является важной их особенностью. Благодаря этому они вносят наименьшую максимальную ошибку аппроксимации в данном интервале.

Квадрат модуля функции передачи фильтра нижних частот, построенный на основе полиномов Чебышева, имеет вид:

$$|F(\Omega)|^2 = \frac{k}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega)}. \quad (6.58)$$

Фильтры с функцией передачи, определяемой выражением (6.58), называют фильтрами Чебышева. Коэффициент k выбирается таким образом, чтобы при $\Omega = 0$ выполнялось условие $|F(\Omega)|^2 = 1$. Из этого следует, что для полиномов нечетных порядков $k = 1$, а для полиномов четных порядков $k = 1 + \varepsilon^2$.

Функция передачи фильтра Чебышева достигает наибольшего значения в тех точках полосы пропускания, где значения $T_n(\Omega) = 0$. Эти точки распределены по полосе пропускания, что определяет колебательный характер функции передачи при $\Omega < 1$. Амплитуда колебаний характеризуется величиной ε : $\Delta F(\Omega) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$.

Число колебаний зависит от порядка полинома T_n .

Изменяя величину ε , можно изменять амплитуду колебаний функции передачи в полосе пропускания. Допустимая неравномерность затухания в полосе пропускания фильтра определяется выражением $\Delta a = -20 \lg \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} = 10 \lg \sqrt{1 + \varepsilon^2}$ и используется в качестве характеристики фильтра Чебышева. При $\varepsilon = 1$ фильтр имеет наиболь-

шую допустимую неравномерность затухания в полосе пропускания, равную 3 дБ.

Таким образом, фильтры Чебышева характеризуются двумя параметрами — порядком и допустимой неравномерностью затухания в полосе пропускания. Выражения для многочленов знаменателя комплексных функций передачи фильтров Чебышева при различных значениях неравномерности приводятся в справочниках.

Обратная чебышевская аппроксимация. Этот вид аппроксимации характеризуется монотонностью аппроксимирующей функции в полосе пропускания и колебательным характером в области задерживания. Квадрат модуля функции передачи при этом имеет вид:

$$|F(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{\varepsilon^2 T_n^2(1/\Omega)}} = \frac{\varepsilon^2 T_n^2(1/\Omega)}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(1/\Omega)}. \quad (6.59)$$

Функция передачи монотонна в полосе пропускания фильтра (т. е. при $\Omega < 1$), если аргумент многочлена $T_n(x)$ больше единицы. Последнее достигается заменой Ω на $1/\Omega_1$, где $\Omega_1 = \omega/\omega_1$, ω_1 — начальная частота области задерживания.

Фильтры, модуль функции передачи которых определяется выражением (6.59), называют **обратными** (и **инверсными**) фильтрами Чебышева. Функция передачи таких фильтров колеблется в области задерживания с амплитудой $\Delta F = \varepsilon/\sqrt{1 + \varepsilon^2}$. Выражения для функций передачи обратных фильтров Чебышева более сложные и приводятся в справочниках для различных значений неравномерности затухания в области задерживания.

Таким образом, использование полиномов Чебышева дает возможность получить равноволновое приближение аппроксимирующей функции к заданной в полосе пропускания или в области задерживания фильтра.

Эллиптическая аппроксимация. Она позволяет добиться равноволнового характера приближения аппроксимирующей функции к заданной в полосе пропускания и в области задерживания фильтра, для чего используют эллиптические функции Якоби.

Выражение функции передачи фильтра, построенного на основе эллиптической аппроксимации, аналогично выражению для обратного чебышевского фильтра. Определение коэффициентов многочленов числителя и знаменателя является очень сложной задачей. Коэффициенты для фильтров различных порядков для некоторых значений неравномерности затухания в полосе пропускания и области задерживания приводятся в справочниках.

Аппроксимация функций передачи фильтров верхних частот и полосовых также может быть осуществлена на основе использования указанных выше функций соответствующим частотным преобразованием.

Разнообразие видов аппроксимации естественно приводит к вопросу о том, какому из них отдать предпочтение. Выбор того или иного вида аппроксимирующей функции зависит от конкретных требований

предъявляемых к фильтру со стороны системы, элементом которой он является. Можно, однако, сделать несколько общих замечаний относительно различных видов аппроксимации. У фильтров Баттерворта меньшая, чем у фильтров Чебышева или эллиптических фильтров того же порядка, крутизна нарастания затухания в области задерживания, однако они имеют максимально плоскую характеристику в полосе пропускания. В тех случаях, когда можно допустить некоторую неравномерность затухания в полосе пропускания за счет увеличения крутизны нарастания затухания в переходной области, предпочтительны фильтры Чебышева или же эллиптические, обладающие лучшими свойствами, чем чебышевские, однако более сложные в реализации. Если необходимо обеспечить значительную крутизну нарастания затухания в переходной области и плоскую характеристику в полосе пропускания фильтра, то используют обратные фильтры Чебышева.

Помимо модуля функции передачи, важными характеристиками фильтра являются фазочастотная и переходная. Известно, что условием отсутствия фазочастотных искажений является линейность фазочастотной характеристики системы передачи. Фазочастотная характеристика фильтров, построенных на основе рассмотренных видов аппроксимации, тем больше отклоняется от линейной, чем ближе модуль функции передачи их к идеальной. С этой точки зрения, чем выше порядок фильтра, тем значительнее отличается его фазочастотная характеристика от линейной. С другой стороны, фильтры Чебышева имеют худшую фазочастотную характеристику, чем фильтры Баттерворта, при том же числе элементов, а эллиптические — худшую, чем фильтры Чебышева.

Временная переходная характеристика фильтра представляет собой реакцию на единичное ступенчатое воздействие. Чем ближе модуль функции передачи к идеальной, тем больше время установления и колебательность процесса на выходе фильтра. Фильтры Баттерворта имеют меньшее время установления и амплитуду колебаний переходной характеристики, чем фильтры Чебышева и эллиптические. С увеличением неравномерности затухания в полосе пропускания также возрастает время установления и колебательность процесса на выходе фильтра.

6.9. КОРРЕКТОРЫ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Корректорами амплитудно-частотных характеристик называют четырехполюсники, включаемые в тракт передачи сигналов для устранения амплитудно-частотных искажений (см. рис. 6.5). Эти четырехполюсники могут быть и неполными. В частности, плавное уменьшение затухания с увеличением частоты можно получить по схеме, приведенной на рис. 6.25, а, если подобрать двухполюсник так, чтобы его сопротивление $Z_1(\omega)$ уменьшалось с повышением частоты в заданном диапазоне.

В простейшем случае таким двухполюсником может быть конденсатор. Увеличивая или уменьшая его емкость, можно регулировать крутизну кривой затухания. Лучшую кривую затухания можно полу-

чить, применив достаточно сложный многоэлементный двухполюсник. Для выбора элементов двухполюсника следует задать ряд значений затухания на нескольких частотах $\omega_1, \omega_2, \dots$, определив соответствующие значения $Z_1(\omega_1), Z_1(\omega_2)$ и т. д.

Не исключено, что при попытках получить какую-либо зависимость $Z_1(\omega)$ для двухполюсника с конечным числом элементов выявится невозможность его реализации. Признаком этого являются отрицательные значения параметров двухполюсника. В подобных случаях необходимо увеличить число его элементов.

Недостаток корректоров, выполненных в виде неполных четырехполюсников, заключается в нарушении ими условия согласования нагрузки с системой передачи. Поэтому их применяют только в устройствах связи, которые не соединены с линиями, преимущественно в усилителях.

Если цепь используют для корректировки частотной зависимости затухания линий и включают на ее входе или выходе, то должно быть по возможности выполнено условие согласованности нагрузки. Волновое сопротивление линий с малыми потерями в области достаточно высоких частот почти активно и мало зависит от частоты. Поэтому корректоры строят по четырехполюсным схемам с активным характеристическим сопротивлением. Таким сопротивлением обладают мостовые четырехполюсники, у которых в качестве $Z_1(\omega)$ и $Z_2(\omega)$ применены взаимнообратные двухполюсники, частотные зависимости сопротивления которых удовлетворяют условию $Z_1(\omega) Z_2(\omega) = R^2$. По формуле (5.15) $Z_M = \sqrt{Z_1 Z_2} = R$.

Практически в последнее время корректоры амплитудно-частотных характеристик преимущественно строят по схеме, приведенной на рис. 5.4, а.

Ее постоянная передача определяется выражениями (5.20):

$$e^g = \frac{Z_1 + R}{R}, \quad a = \ln \left| 1 + \frac{Z_1}{R} \right|, \quad e^a = \left| 1 + \frac{Z_1}{R} \right|.$$

Как видно, свойства указанной схемы определяются очень простыми выражениями. Из них следует, что зависимость затухания от частоты целиком характеризуется частотной зависимостью сопротивления $Z_1(\omega)$, так как $Z_2(\omega) = R^2/Z_1(\omega)$.

Выбирая в качестве Z_1 двухполюсники с разными частотными зависимостями сопротивления, можно получать различные частотные характеристики затухания. Например, если в качестве Z_1 взять конденсатор, а в качестве Z_2 — катушку без потерь, то получим схему, затухание которой неограниченно велико при $\omega = 0$ и уменьшается с ростом частоты. Применив в качестве Z_1 катушку без потерь, а в качестве Z_2 конденсатор, получим схему, затухание которой на нулевой частоте равно нулю и растет с увеличением частоты.

Если желательно, чтобы затухание, оказываемое схемой постоянному току, не было неограниченно велико или равно нулю, то в схеме (см. рис. 5.4, а) Z_1 и Z_2 должны содержать также активные сопротивления, подключенные к конденсатору параллельно, а к катушке последовательно.

Сопротивления

$$Z_1 = r_1 + j\omega L_1 \text{ и } Z_2 = \frac{1}{(1/r_2) + j\omega C_2}$$

будут удовлетворять условию взаимной обратимости $Z_1 Z_2 = R^2$, если их элементы подобраны так, что $r_1 r_2 = R^2 = L_1 / C_2$. Действительно,

$$\begin{aligned} Z_1 Z_2 &= \\ &= \frac{r_1 + j\omega L_1}{(1/r_2) + j\omega C_2} = \frac{r_1 + j\omega C_2 R^2}{(r_1/R^2) + j\omega C_2} = R^2. \end{aligned}$$

Два сопротивления: одно, образованное последовательным, а другое — параллельным соединением активного сопротивления с реактивным оказываются взаимно обратными и в том случае, если реактивные сопротивления сколь угодно сложны, но удовлетворяют условию $r_1 r_2 = x_1 x_2 = R^2$.

При подборе элементов схемы корректора мы сталкиваемся с задачей аппроксимации, решаемой совместно с задачей реализации.

Для аппроксимации функции $e^g = 1 + (Z_1/R)$ следует задать значения затухания на различных частотах и получить необходимое число уравнений для определения всех элементов двухполюсника сопротивлением Z_1 . Чем точнее должна быть реализована кривая затухания, тем более сложными должны быть взяты сопротивления $Z_1(\omega)$ и $Z_2(\omega)$. Корректоры амплитудно-частотных характеристик строят также по мостовой или скрещенной схеме.

Сопротивления плеч моста Z_{1M} и Z_{2M} , эквивалентного схеме, приведенной на рис. 5.4, с сопротивлениями Z_1 и Z_2 определяют по соотношениям:

$$\frac{1}{Z_{1M}} = \frac{1}{R} + \frac{2}{Z_1}; \quad Z_{2M} = R + 2Z_2. \quad (6.60)$$

Расчет корректора амплитудно-частотной характеристики. Рассмотрим порядок расчета корректора на простом примере. Для определенности предположим, что исходя из заданной кривой затухания в качестве Z_1 выбрано параллельное соединение активного сопротивления и конденсатора (рис. 6.34, а). Затухание такой схемы уменьшается с частотой и конечно на частоте $\omega = 0$ (рис. 6.34, б). В этом случае

$$Z_1 = \frac{r_1}{1 + j\omega r_1 C_1} = \frac{r_1}{1 + j \frac{r_1}{x_1}}. \quad (6.61)$$

Затухание определяется из формулы (5.20), заменяя в ней Z_1 выражением (6.61):

$$e^a = \left| \frac{\left(1 + \frac{r_1}{R}\right) + j\omega r_1 C_1}{1 + j\omega r_1 C_1} \right| = \left| \frac{\left(1 + \frac{r_1}{R}\right) + j \frac{r_1}{x_1}}{1 + j \frac{r_1}{x_1}} \right|. \quad (6.62)$$

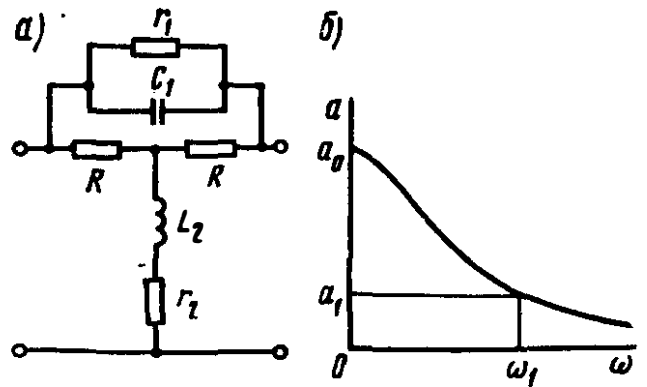


Рис. 6.34

Для расчета требуемых значений элементов корректора следует, задавшись затуханиями на двух частотах, определить r_1 и C_1 схемы. Подставляя заданные значения затухания и частоты в выражение (6.62), можно получить два уравнения, необходимые для вычисления r_1 и C_1 . Уравнение (6.62) определяет модуль комплексного числа, что затрудняет вычисления.

Для решения задачи уравнение (6.62) перепишем в виде

$$e^{2a} = \frac{\left(1 + \frac{r_1}{R}\right)^2 + \omega^2 r_1^2 C_1^2}{1 + \omega^2 r_1^2 C_1^2} = \frac{\left(1 + \frac{r_1}{R}\right)^2 + \frac{r_1^2}{x_1^2}}{1 + \frac{r_1^2}{x_1^2}}. \quad (6.63)$$

Наибольшее затухание корректор оказывает токам с нулевой частотой. Оно определяется соотношением

$$e^{2a_0} = \left(1 + \frac{r_1}{R}\right)^2, \quad (6.64)$$

где a_0 — затухание на частоте $\omega = 0$.

Затухание a_0 и сопротивление R следует считать заданными. Сопротивление r_1 определяется сразу:

$$r_1 = R(e^{a_0} - 1). \quad (6.65)$$

Теперь в выражении (6.63) неизвестным остается только C_1 . Обозначим $r_1^2 C_1^2 \omega^2 = r_1^2 / x_1^2 = k^2 \omega^2$, тогда

$$e^{2a} = \frac{e^{2a_0} + k^2 \omega^2}{1 + k^2 \omega^2}. \quad (6.66)$$

Задаваясь теперь одним значением a_1 на одной из частот рабочего диапазона, например ω_1 , найдем:

$$k = \frac{1}{\omega_1} \sqrt{\frac{e^{2a_1} - e^{2a_0}}{1 - e^{2a_1}}}. \quad (6.67)$$

После определения $k = r_1 C_1$ элементы корректора рассчитывают по формулам:

$$C_1 = k / r_1; \quad r_2 = R^2 / r_1; \quad L_2 = C_1 R^2. \quad (6.68)$$

Строят кривую затухания по формуле (6.63) и сопоставляют ее с заданной. Если расхождения между этими кривыми в рабочем диапазоне частот превышают допустимые по условиям задачи, то выполняют новый расчет для более сложной схемы.

При проектировании корректоров имеются две возможности. Первая — построить однозвенный корректор с достаточно сложными многоэлементными сопротивлениями $Z_1(\omega)$ и $Z_2(\omega)$, которые скорректировали бы амплитудно-частотную характеристику (частотную зависимость затухания) всего тракта передачи сигналов. Вторая — использовать несколько одинаковых звеньев невысокого порядка, каждый из которых корректирует часть тракта, и соединить их цепочечно.

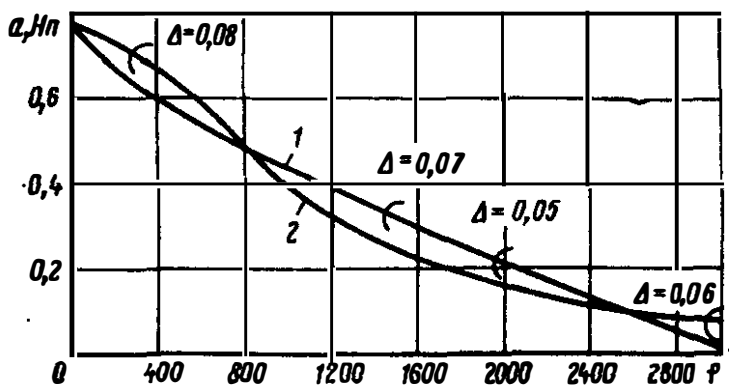


Рис. 6.35

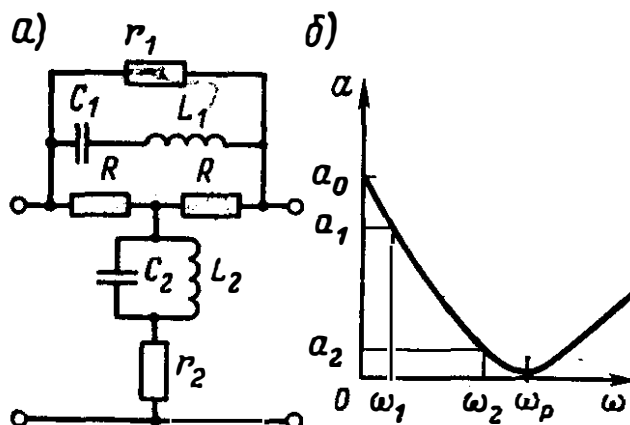


Рис. 6.36

Пример. Рассчитаем корректор амплитудно-частотной характеристики, предназначенный для устранения искажений сигналов в диапазоне частот от 300 до 3000 Гц в линии, затухание которой зависит от частоты так, как это указано ниже.

Частота f , Гц	0	300	800	2000	3000
Затухание αl , Нп	0,066	0,20	0,34	0,6	0,8

$|Z_B| = 400$ Ом на всех частотах.

Поскольку включение корректора неизбежно должно внести некоторое дополнительное затухание токам с самой высокой частотой, примем это дополнительное затухание равным 0,025 Нп и будем рассчитывать корректор на затухание αl и $a_{\text{кор}} = 0,825$ Нп, т. е. корректор на всех частотах должен дополнить затухание линии до 0,825 Нп. Это дает:

Частота f , Гц	0	300	800	2000	3000
Затухание корректора a , Нп	0,76	0,625	0,485	0,225	0,025

(рис. 6.35, кривая 1).

По формуле (6.65) найдем:

$$r_1 = R (e^{a_0} - 1) = 400 (2,138 - 1) = 455,2 \text{ Ом.}$$

Для определения C_1 через k по формулам (6.68) и (6.67) зададимся затуханием на одной из частот рабочего диапазона. Выберем в качестве f_1 частоту 2500 Гц, на этой частоте затухание (см. рис. 6.35, кривая 1) должно быть $a_1 = 0,12$ Нп, $e^{2a_1} = 1,27$; $e^{2a_0} = 4,57$.

Подставляя эти данные в формулу (6.67), получим:

$$k = \frac{1}{\omega_1} \sqrt{\frac{e^{2a_1} - e^{2a_0}}{1 - e^{-2a_1}}} = \frac{1}{6,28 \cdot 2500} \sqrt{\frac{1,27 - 4,57}{1 - 1,27}} = 2,23 \cdot 10^{-4}.$$

Построим кривую затухания звена корректора по формуле (6.67) для чего $k^2 \omega^2$ представим в виде

$$k^2 \omega^2 = 2,23^2 \cdot 6,28^2 f^2 = 196 \cdot 10^{-8} f^2.$$

Подставляя это значение $k^2 \omega^2$ в формулу (6.66), на разных частотах получим следующие значения затухания:

Частота f , Гц	0	300	800	1500	2000	3000
Затухание a , Нп	0,76	0,7	0,48	0,28	0,17	0,08

По полученным данным строим зависимость затухания от частоты (см. рис. 6.35, кривая 2). На этом рисунке показаны расхождения между заданным (кривая 1) и полученным (кривая 2) затуханиями. Если эти расхождения практически допустимы, на этом варианте расчета можно остановиться и определить элементы схемы по формулам (6.68). При недопустимости указанных расхождений следует повторить расчет для другого варианта. Для уменьшения неточности корректировки можно сократить длину корректируемого участка и увеличить число входящих в корректор звеньев или перейти к сложным схемам звеньев, например, содержащим двухэлементные реактивные сопротивления (рис. 6.36, а).

Порядок расчета корректора с двухэлементными реактивными сопротивлениями. По формулам (6.61) и (6.62) можно рассчитать и более сложные схемы. Рассмотрим, например, схему корректора, частотная зависимость затухания которого приведена на рис. 6.36, б. Эту схему следует использовать для корректировки затухания линии, если рабочие частоты лежат в полосе ниже ω_0 .

Сопротивление r_1 рассматриваемой схемы рассчитывается по формуле (6.61) через затухание на нулевой частоте. По уравнению (6.62) по затуханиям a_1 и a_2 определяются два значения $k\omega$ на частотах f_1 и f_2 :

$$k_1 \omega_1 = \sqrt{\frac{e^{2a_1} - e^{2a_0}}{1 - e^{2a_1}}}; \quad k_2 \omega_2 = \sqrt{\frac{e^{2a_2} - e^{2a_0}}{1 - e^{2a_2}}}.$$

Для рассматриваемой схемы

$$k\omega = \frac{r_1}{x_1} = r_1 \frac{\omega}{L_1} \frac{1}{\omega^2 - \omega_p^2}; \quad k = \frac{r_1}{L_1} \frac{1}{\omega^2 - \omega_p^2}.$$

Как видно, в этом случае k зависит от частоты. Эта зависимость определяется соотношением

$$k\omega^2 L_1 - k\omega_p^2 L_1 = r_1. \quad (6.69)$$

Подставляя в эту формулу два значения $k\omega$ и две частоты, получим систему из двух уравнений:

$$k_1 \omega_1^2 L_1 - k_1 \omega_p^2 L_1 = r_1; \quad k_2 \omega_2^2 L_1 - k_2 \omega_p^2 L_1 = r_1 \quad (6.70)$$

с двумя неизвестными L_1 и $\omega_p^2 L_1$.

Решая систему уравнений (6.70), определяем L_1 и $\omega_p^2 L_1$, а по ним и остальные элементы схемы по формулам:

$$C_1 = 1/(\omega_p^2 L_1); \quad r_2 = R^2/r_1; \quad C_2 = L_1/R^2; \quad L_2 = C_1 R^2. \quad (6.71)$$

Применение корректоров, составленных из нескольких рассмотренных звеньев (см. рис. 6.36), позволяет решать многие практические задачи.

Более подробные сведения о расчете корректоров выходят за рамки данной книги и могут быть найдены в специальной и справочной литературе.

6.10. КОРРЕКТОРЫ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРУППОВОГО ВРЕМЕНИ ПРОХОЖДЕНИЯ

Вследствие конечности фазовой скорости v изменение напряжения и тока на выходе линии отстает во времени от их изменения на ее входе. Это запаздывание характеризуется для каждой частотной составляющей сигнала фазовым сдвигом βl или фазовым временем прохождения

$$t_{\text{пр ф}} = l/v = \beta(\omega) l/\omega. \quad (6.72)$$

Если фазовая скорость v для различных частотных составляющих неодинакова, то сигнал при передаче по линии подвергается фазочастотным искажениям. В этом случае время прохождения характеризуют величиной

$$t_{\text{гр пр}} = d\beta(\omega) l/d\omega, \quad (6.73)$$

называемой групповым временем прохождения. Значение группового времени прохождения на определенной частоте ω_1 — $t_{\text{гр пр}}(\omega_1)$ характеризует время запаздывания огибающей группы частотных составляющих сигнала, лежащих в узкой полосе частот вблизи ω_1 .

В цепях с сосредоточенными параметрами

$$t_{\text{гр пр}} = db(\omega)/d\omega. \quad (6.74)$$

Для устранения фазочастотных искажений в трактах связи включают корректоры группового времени прохождения. Фазовые характеристики используемых в качестве корректоров четырехполосников подбирают так, чтобы время прохождения в откорректированном тракте с включенным корректором $t_{\text{гр пр}} = t_{\text{гр пр л}} + t_{\text{гр пр к}}$ не зависело от частоты, или, что то же, чтобы

$$b(\omega) = \beta l + b_{\text{к}}(\omega) = k\omega + b_0. \quad (6.75)$$

Здесь $t_{\text{гр пр л}}$ — время прохождения сигнала по линии или корректируемой системе передачи;

$t_{\text{гр пр к}}$ — время прохождения сигналов корректора;

$b(\omega)$ — фазовая характеристика откорректированного тракта;

$b_{\text{к}}(\omega)$ — фазовая характеристика корректора.

В качестве элементов корректоров группового времени прохождения применяют четырехполосные схемы, пропускающие все частоты с малым затуханием и не оказывающие существенного влияния на характеристику затухания тракта. Этому условию удовлетворяют мостовые пассивные цепи и специально подобранные активные rC цепи.

Мостовая схема пропускает все частоты, если входящие в схему сопротивления Z_1 и Z_2 — взаимнообратные реактивные двухполюсники. Для мостовой схемы с взаимнообратными сопротивлениями характеристическое сопротивление и постоянная передача определяются выражениями:

$$Z_{\text{м}} = R; \quad \text{th} \frac{g}{2} = \frac{Z_1}{R}; \quad e^g = \frac{R + Z_1}{R - Z_1}. \quad (6.76)$$

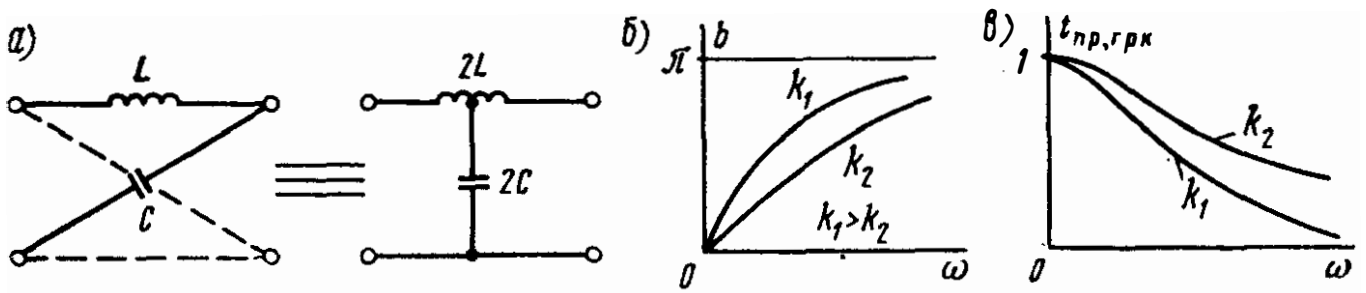


Рис. 6.37

Независимость $Z_{\text{н}}$ от частоты позволяет хорошо согласовать эти схемы с нагрузками. При реактивных сопротивлениях Z_1 и Z_2 :

$$Z_1 = jx_1; \quad \text{th} \frac{g}{2} = \frac{Z_1}{R} = j \frac{x_1}{R}. \quad (6.77)$$

Следовательно,

$$a = 0, \quad g = jb; \quad \text{tg} \frac{b}{2} = \frac{x_1}{R}; \quad (6.78)$$

$$e^{jb} = \frac{R + jx_1}{R - jx_1}, \quad (6.79)$$

откуда

$$b_{\text{к}} = \frac{1}{j} \ln \frac{R + jx_1}{R - jx_1} = 2 \arctg \frac{x_1}{R}; \quad (6.80)$$

$$t_{\text{гр прк}} = \frac{db_{\text{к}}}{d\omega} = \frac{2 \frac{dx_1}{d\omega}}{1 + (x_1/R)^2}. \quad (6.81)$$

Свойства такой схемы целиком определяются свойствами x_1 . Практически фазовые выравнители строят по схемам, эквивалентным мостовым, которые содержат меньшее число элементов.

Фазовый контур первого порядка. В схеме (рис. 6.37, а), называемой фазовым контуром первого порядка, сопротивления Z_1 и Z_2 содержат по одному элементу:

$$Z_1 = j\omega L_1 \quad \text{и} \quad Z_2 = \frac{1}{j\omega C}.$$

В соответствии с выражением (6.78)

$$\text{tg} \frac{b}{2} = \frac{\omega L}{R} = k\omega.$$

Из формулы (6.80):

$$b = \frac{1}{j} \ln \frac{1 + jk\omega}{1 - jk\omega}; \quad e^{jb} = \frac{1 + kj\omega}{1 - kj\omega}, \quad (6.82)$$

отсюда

$$t_{\text{гр прк}} = 2k / (1 + k^2 \omega^2), \quad (6.83)$$

где $k = L/R$.

На этом же рисунке приведена эквивалентная схема фазового контура первого порядка, зависимости $b(\omega)$ и $t_{гр пр к}$ соответственно на рис. 6.37, б и в. Меняя значения коэффициента k или, что то же, подбирая индуктивность L , можно изменять форму кривых $b(\omega)$ и $t_{гр пр к}$.

Функции передачи видов:

$$F(\omega) = \frac{1 + kj\omega}{1 - kj\omega}; \quad F(p) = \frac{1 + kp}{1 - kp} = \frac{1 + rCp}{1 - rCp}$$

можно реализовать цепью rC с операционным усилителем (рис. 6.38). По инвертирующему входу функция передачи операционного усилителя равна -1 . Усиление по неинвертирующему входу равно 2. Операционный усилитель подключается через фильтр нижних частот. В целом это дает функцию передачи $2/(1 + rCp)$, так как выходное напряжение усилителя есть усиленная разность сигналов на двух его входах:

$$F(p) = \frac{2}{1 + rCp} - 1 = \frac{1 - rCp}{1 + rCp}$$

Фазовый контур второго порядка. Сопротивления Z_1 и Z_2 фазового контура второго порядка (рис. 6.39, а) содержат по два элемента:

$$Z_1 = -\frac{j\omega}{C} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

По уравнению (6.78)

$$\operatorname{tg} \frac{b}{2} = -\frac{1}{CR} \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} = -k \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} = k \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

В соответствии с выражением (6.80):

$$b = \frac{1}{j} \ln \frac{-\omega^2 + jk\omega + \omega_0^2}{-\omega^2 - jk\omega + \omega_0^2}; \quad (6.84)$$

$$t_{гр пр к} = \frac{2k(\omega_0^2 + \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + k^2\omega^2} \quad (6.85)$$

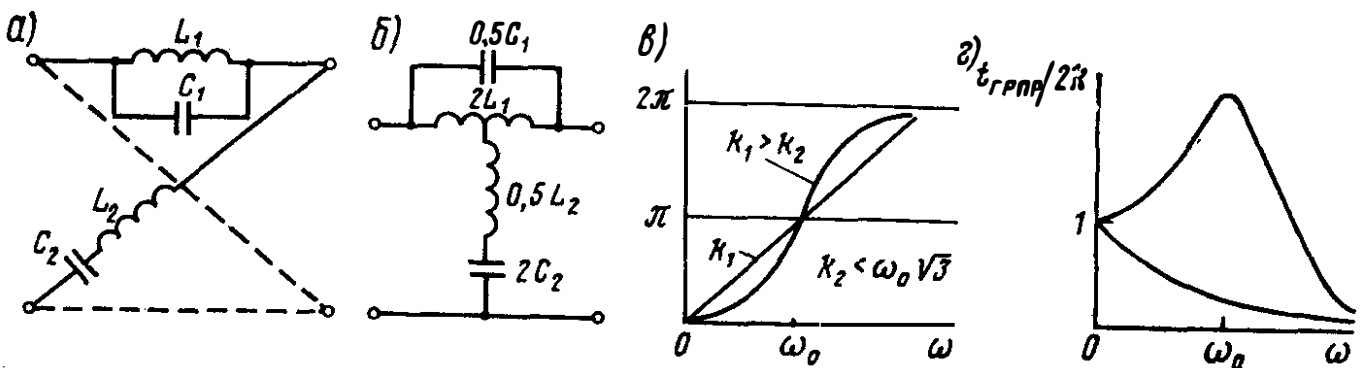


Рис. 6.39

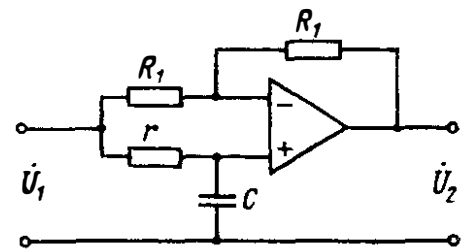


Рис. 6.38

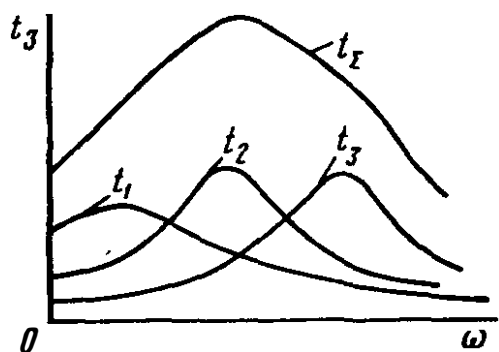


Рис. 6.40

Практически фазовые контуры второго порядка строят по нескольким эквивалентным схемам типа перекрытое Т. Одна из них приведена на рис. 6.39. Частотные зависимости фазового сдвига и группового времени прохождения, обеспечиваемые этими схемами, представлены графиками (рис. 6.39, в и г).

Эти зависимости определяются численными значениями коэффициента k .

Как хорошо видно из выражения (6.85),

при малых значениях k и $\omega = \omega_0$ зависимость $t_{гр}$ по k имеет максимум, при больших значениях k этот максимум исчезает. Кривая $t_{гр}$ по k (ω) имеет максимум, а кривая b (ω) — перегиб при $\omega = \omega_0$, если значения $k < \omega_0 \sqrt{3}$. Изменяя значения ω_0 и k , можно менять как местоположение максимума, так и крутизну возрастания и спада кривой $t_{гр}$ по k (ω).

Практически корректоры группового времени прохождения состоят из нескольких разных звеньев, представляющих собой контуры второго порядка, включаемые цепочечно. Необходимая частотная зависимость группового времени прохождения корректора получается как сумма частотных зависимостей группового времени прохождения отдельных звеньев (рис. 6.40).

Глава 7

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ LC

7.1. УСЛОВИЯ ПРОПУСКАНИЯ И ЗАДЕРЖИВАНИЯ ЦЕПОЧЕЧНЫХ ФИЛЬТРОВ

В устройствах автоматики, телемеханики и связи часто возникает задача выделения полезных сигналов из смеси различных сигналов и помех. Если полезные сигналы и помехи различаются занимаемыми частотными полосами, то такое разделение осуществляют частотными электрическими фильтрами. Частотные фильтры, отделяющие электрические колебания токов с одними частотами от колебаний с другими частотами, применяют в самых разнообразных частотных диапазонах. Простейшими фильтрами могут служить цепи rC , или реактивные двухполюсники, рассмотренные в главе 6.

Однако наиболее распространены фильтры, представляющие собой четырехполюсники, составленные из реактивных двухполюсников по цепочечным или мостовым схемам. Эти фильтры отличаются от простейших фильтрующих цепей более качественными частотными характеристиками. По сравнению с используемыми в качестве фильтров цепями rC они имеют в полосе пропускания теоретически нулевое, а практически весьма малое затухание. От активных фильтров rC их выгодно отличает возможность работы при больших токах, например, в цепях тяговых сетей и рельсовых цепях. В то же время фильтры LC имеют и недостатки: невысокую добротность элементов (особенно катушек индуктивности) и значительные габаритные размеры, что затрудняет их использование на сверхнизких и высоких частотах.

Учет влияния сопротивления нагрузки фильтра требует полного анализа его свойств как четырехполюсника. Последнее может быть осуществлено использованием любого полного набора параметров четырехполюсника.

Для анализа и синтеза реактивных фильтров наиболее удобно использовать собственные параметры передачи g и Z_x . Цепочечные фильтры представляют собой каскадное соединение Γ -, T - или Π -образных четырехполюсников, содержащих реактивные сопротивления (рис. 7.1).

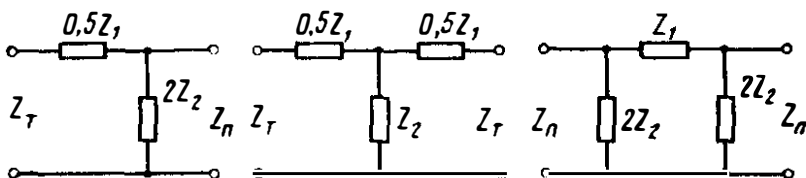


Рис. 7.1

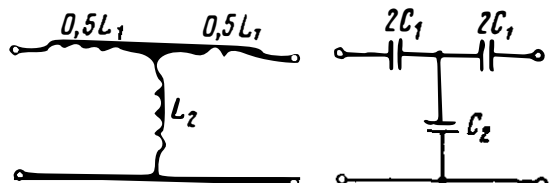


Рис. 7.2

Как было показано в главе 5, собственные параметры передачи этих четырехполюсников определяются по следующим уравнениям:

$$Z_{\Gamma} = \sqrt{Z_1 Z_2 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right)}; \quad (7.1)$$

$$Z_{\Pi} = \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}}; \quad (7.2)$$

$$\operatorname{sh} \frac{g}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}}. \quad (7.3)$$

Выражение (7.3) справедливо для Т- и П-образных четырехполюсников. Для Г-образного полувзвена постоянная передачи в 2 раза меньше.

Из определения электрического фильтра следует, что его затухание в полосе пропускания должно быть минимальным (теоретически равняться нулю), а в полосе задерживания — зависеть от частоты (быть максимальным). С учетом этого условия пропускания и задерживания цепочечных фильтров можно получить, анализируя зависимость постоянной передачи цепочечных схем от параметров схемы (7.3) в широком диапазоне частот.

Напомним, что собственная постоянная передачи $g = a + jb$ определяет затухание и фазовый сдвиг четырехполюсника в условиях согласованной нагрузки ($Z_H = Z_X$). Проанализируем выражение

$$\operatorname{sh} \frac{g}{2} = \operatorname{sh} \left(\frac{a}{2} + j \frac{b}{2} \right) = \operatorname{sh} \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} + j \operatorname{ch} \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}}. \quad (7.4)$$

При чисто реактивном характере сопротивлений Z_1 и Z_2 возможны два варианта их соотношений.

В а р и а н т 1. Величины Z_1 и Z_2 — реактивные сопротивления одного знака, в этом случае $\sqrt{Z_1/(4Z_2)} = \sqrt{x_1/(4x_2)}$ — положительное вещественное число, не зависящее от частоты.

Тогда из равенства (7.4) получим два уравнения:

$$\operatorname{sh} \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}}; \quad (7.5)$$

$$\operatorname{ch} \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} = 0.$$

Так как $\operatorname{ch} \frac{a}{2}$ не может быть равным нулю, то из уравнений (7.5) следует, что $\sin \frac{b}{2} = 0$, при этом $\cos \frac{b}{2} = 1$, а

$$\operatorname{sh} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}}. \quad (7.6)$$

Таким образом, четырехполюсники, сопротивления Z_1 и Z_2 которых имеют одинаковые реактивные знаки во всем диапазоне частот (рис. 7.2), не могут быть фильтрами, поскольку их затухание является постоянной не зависящей от частоты величиной. Это обычные делители напряжения.

В а р и а н т 2. Величины Z_1 и Z_2 — реактивные сопротивления различных знаков, тогда

$$\sqrt{Z_1/4Z_2} = \pm i \sqrt{|x_1/4x_2|} - \quad (7.7)$$

мнимое число, не зависящее от частоты. В этом случае равенство (7.4) распадается на два уравнения:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} &= 0; \\ \operatorname{ch} \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} &= \pm \sqrt{\left| \frac{x_1}{4x_2} \right|}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Система уравнений (7.8) допускает два решения.

Первое решение:

$$\operatorname{sh} \frac{a}{2} = 0; \quad a = 0; \quad \operatorname{ch} \frac{a}{2} = 1; \quad \sin \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\left| \frac{x_1}{4x_2} \right|} = f(\omega). \quad (7.9)$$

Второе решение:

$$\cos \frac{b}{2} = 0; \quad b = \pm \pi; \quad \sin \frac{b}{2} = \pm 1; \quad \operatorname{ch} = \frac{a}{2} \sqrt{\left| \frac{x_1}{4x_2} \right|} = f(\omega). \quad (7.10)$$

Здесь возможны два режима: режим пропускания, соответствующий первому решению, когда затухание $a = 0$, и режим задерживания, соответствующий второму решению, когда $a \neq 0$. Следовательно, четырехполюсник цепочечной схемы, образованный из реактивных сопротивлений Z_1 и Z_2 разных знаков, является электрическим фильтром.

Рассмотрим условия, при которых действует каждое из решений системы и соответственно имеет место пропускание или задерживание.

Так как выражение $\sin \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}}$ имеет смысл только на тех частотах, на которых $|x_1/(4x_2)| < 1$, то в этом случае действует решение (7.9). Это режим пропускания. Совокупность частот, на которых $|x_1| < |4x_2|$, образует полосу (или полосы) пропускания фильтра.

Выражение $\operatorname{ch} (a/2) = \sqrt{|x_1/4x_2|}$ имеет смысл только на частотах, для которых $|x_1/4x_2| > 1$, при этом действует решение (7.10). Это режим задерживания. Совокупность частот, на которых $|x_1| > |4x_2|$, образует полосу (или полосы) задерживания фильтра.

Частоту, на которой $|x_1| = |4x_2|$, называют **г р а н и ч н о й**, или **ч а с т о т о й с р е з а**.

Если Z_1 и Z_2 — взаимнообратные реактивные сопротивления, то $Z_1 Z_2 = k^2 = R^2$. Цепочечные фильтры, содержащие такие сопротив-

ления, называют фильтрами типа к. Условие их пропускания $|x_1/(4x_2)| < 1$ в этом случае можно также представить в виде

$$\left| \frac{x_1}{4x_2} \right| = \left| \frac{x_1^2}{4x_1 x_2} \right| = \left| \frac{x_1^2}{4R^2} \right| < 1 \quad \text{или} \quad |x_1| < 2R. \quad (7.11)$$

Частоту среза определяют из условия

$$|x_1| = 2R. \quad (7.12)$$

Величину R называют номинальным характеристическим сопротивлением фильтра.

Если сопротивления Z_1 и Z_2 не взаимнообратны, то они могут быть различными по знаку только в каком-либо конечном диапазоне частот. Вне этого диапазона схема не является фильтром, а представляет собой делитель напряжения.

Все выводы, вытекающие из анализа формулы (7.4), можно получить, рассматривая любую другую гиперболическую или показательную функцию от g . В ряде случаев, как это будет показано ниже, использование $\text{th} \frac{g}{2}$ или $e^{g/2}$ бывает более удобным.

7.2. ФИЛЬТР НИЖНИХ ЧАСТОТ ТИПА к

Фильтр нижних частот должен пропускать токи с $\omega < \omega_{\text{ср}}$, включая постоянный ток, и задерживать токи с более высокими частотами. Эти свойства имеет цепочечный четырехполюсник, у которого в качестве Z_1 включено индуктивное сопротивление, а в качестве Z_2 — емкостное. Варианты таких схем приведены на рис. 7.3.

Для них

$$Z_1 = j\omega L; \quad Z_2 = 1/(j\omega C); \quad Z_1 Z_2 = R^2; \quad R = \sqrt{L/C}. \quad (7.13)$$

Фильтры, схема которых приведена на рис. 7.3, а, оказывают нулевое затухание токам с частотами, для которых $|x| < 2R$, и конечное затухание токам с частотами, для которых $|x_1| > 2R$. Частоту среза $\omega_{\text{ср}}$ определяют из условия (7.12): $|x_1(\omega_{\text{ср}})| = 2R$.

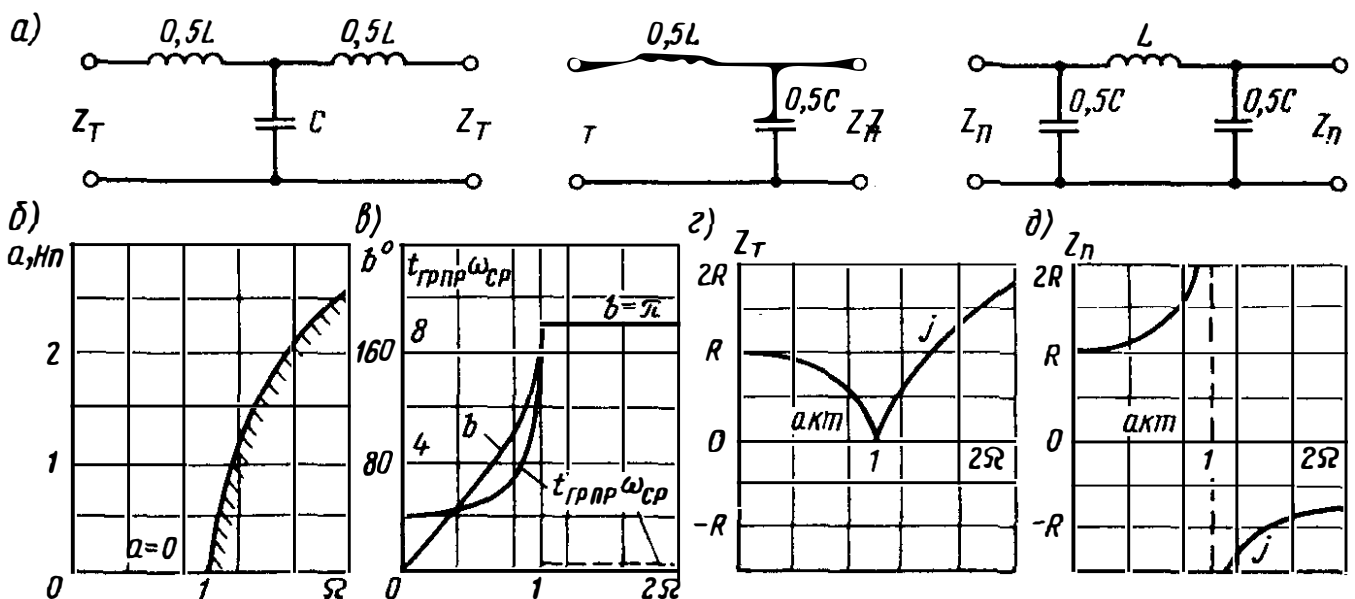


Рис. 7.3

Отсюда

$$|x_1(\omega_{\text{ср}})| = \omega_{\text{ср}} L = 2R = 2\sqrt{L/C}; \quad \omega_{\text{ср}} = 2/\sqrt{LC}. \quad (7.14)$$

Для определения характеристик фильтра по формулам (7.9) и (7.10) рассмотрим, как изменяется в зависимости от частоты отношение

$$\frac{Z_1}{4Z_2} = \frac{j\omega L}{4 \frac{1}{j\omega C}} = -\frac{\omega^2 LC}{4} = -\frac{\omega^2}{\omega_{\text{ср}}^2} = -\frac{f^2}{f_{\text{ср}}^2} = -\Omega^2, \quad (7.15)$$

где Ω — относительная, или нормированная, частота.

Следовательно, фильтр пропускает все частоты ниже $\omega_{\text{ср}}$, для которых $\Omega < 1$. Подставляя значения $Z_1 Z_2 = |x_1 x_2| = R^2$ и $Z_1/(4Z_2) = x_1/(4x_2) = -\Omega^2$ в выражения (7.9) и (7.10), найдем их конкретные формы для ФНЧ.

В полосе пропускания на частотах $\omega < \omega_{\text{ср}}$, $\Omega < 1$

$$\begin{aligned} a &= 0; \\ \sin \frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_{\text{ср}}^2}} = \frac{f}{f_{\text{ср}}} = \Omega. \end{aligned} \quad (7.16)$$

В полосе задерживания при $\omega > \omega_{\text{ср}}$, $\Omega > 1$

$$\operatorname{ch} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_{\text{ср}}^2}} = \frac{f}{f_{\text{ср}}} = \Omega; \quad b = \pi. \quad (7.17)$$

При $\Omega \gg 1$ $\operatorname{ch} \frac{a}{2} = \frac{1}{2} e^{\frac{a}{2}} = \Omega$; $a = 2 \ln \Omega + 2 \ln 2$.

Частотные зависимости затухания и фазовой постоянной звена ФНЧ приведены на рис. 7.3, б и в. Эти зависимости одинаковы для схем Т и П, так как их постоянная передачи задана одним и тем же выражением. Для схемы Г следует брать $a/2$ и $b/2$. Знак фазового сдвига выбран в соответствии с тем, что на частотах полосы пропускания ток, а следовательно, и напряжение на выходе отстают по фазе от этих величин, действующих на входе.

Из зависимостей $a = a(\Omega)$ и $b = b(\Omega)$ видно, что даже составленный из чисто реактивных сопротивлений идеальный фильтр в широком диапазоне частот не имеет желаемых характеристик. В полосе задерживания этого фильтра затухание растет довольно медленно, а его фазочастотная характеристика в полосе пропускания нелинейна. Последнее может приводить к фазовым искажениям сигналов, передаваемых через фильтр.

Наклон фазочастотной характеристики определяет время задержки сигнала на выходе фильтра по сравнению с сигналом на его входе. У фильтров с меньшей частотой среза это время больше.

Во многих случаях вместо зависимости от частоты фазового сдвига удобнее рассматривать зависимость от частоты группового времени прохождения:

$$t_{\text{гр пр}} = \frac{db(\omega)}{d\omega} \quad \text{или} \quad t_{\text{гр пр}} \omega_{\text{ср}} = \frac{db(\Omega)}{d\Omega}.$$

Имея в виду, что из выражения (7.17) следует $b = 2 \arcsin \Omega$, для $t_{\text{гр пр}} \omega_{\text{ср}}$ в полосе пропускания получим:

$$t_{\text{гр пр}} \omega_{\text{ср}} = \frac{db(\Omega)}{d\Omega} = \frac{d}{d\Omega} 2 \arcsin \Omega = 2 \frac{1}{\sqrt{1-\Omega^2}}.$$

В полосе задерживания $b = \pi$, $t_{\text{гр пр}} = 0$. Зависимость $t_{\text{гр пр}} \times \omega_{\text{ср}}(\Omega)$ приведена на рис. 7.3, в.

Кривые, определяющие зависимость от частоты собственных параметров передачи фильтров, состоят из различных участков, относящихся к частотным полосам пропускания и задерживания, что является их характерной особенностью. Важной характеристикой всякого четырехполюсника является его характеристическое сопротивление Z_x . Оно показывает желательные сопротивления генератора R_r и приемника R_n , при которых четырехполюсник (в рассматриваемом случае фильтр) нагружен согласованно и имеет собственное затухание a и фазовый сдвиг b . Если полного согласования добиться не удастся, сравнение характеристического сопротивления фильтра с сопротивлением генератора R_r и сопротивлением приемника R_n позволяет оценить вызванное несогласованностью изменение затухания a и соответствующее изменение b или $t_{\text{гр пр}}$. Для схем Т и П характеристические сопротивления неодинаковы. Схема Г имеет различные характеристические сопротивления: с одной стороны сопротивление схемы Т, а с другой — схемы П.

Для установления частотной зависимости характеристических сопротивлений ФНЧ по схемам Т и П воспользуемся выражениями (7.1) и (7.2). Подставляя вместо Z_1 и Z_2 их значения, получим:

$$Z_T = \sqrt{L/C} \sqrt{1 - (\omega^2/\omega_{\text{ср}}^2)} = R \sqrt{1 - \Omega^2}; \quad (7.18)$$

$$Z_{\text{П}} = \sqrt{\frac{L}{C} \frac{1}{\sqrt{1 - (\omega^2/\omega_{\text{ср}}^2)}}} = \frac{R}{\sqrt{1 - \Omega^2}}. \quad (7.19)$$

Зависимости Z_T и $Z_{\text{П}}$ от относительной частоты, соответствующие формулам (7.18) и (7.19), приведены на рис. 7.3, г и д. Из этих зависимостей следует, что характеристическое сопротивление схемы, составленной из чисто реактивных элементов, на частотах, лежащих в полосе пропускания, оказывается активным. Активное входное сопротивление означает, что фильтр способен воспринимать от генератора энергию с определенными частотами и передавать ее приемнику, поскольку в схеме фильтра нет элементов, способных ее поглощать. Такой фильтр аналогичен линии без потерь также с чисто активным волновым сопротивлением.

На частотах полосы задерживания сопротивление фильтра реактивно, он не воспринимает энергии от генератора. Знак реактивности легко устанавливается из следующих соображений: если реактивное сопротивление растет с частотой, то оно имеет индуктивный характер (для ФНЧ — Z_T), если уменьшается — емкостный (для ФНЧ — $Z_{\text{П}}$).

При постоянном токе ($\omega = 0$) характеристическое сопротивление фильтра $R = \sqrt{L/C}$. Это значит, что сопротивление фильтра со сторо-

ны входных зажимов равно сопротивлению нагрузки, подключенной к нему.

Дальнейшее изменение Z_x с увеличением частоты предполагает, что нагрузки с обоих концов остаются согласованными и сопротивления R_r и R_n изменяются с частотой так же, как и Z_x . На частотах полосы задерживания должны быть реактивны как R_r и R_n , так и $Z_{вх\phi} = Z_x$. На достаточно высоких частотах в случае схемы Т генератор и приемник как бы отключены от фильтра индуктивностями, имеющими на этих частотах очень большие сопротивления. В схеме П на высоких частотах генератор и приемник зашунтированы емкостями с соответственно малыми сопротивлениями.

Для определения значений индуктивности и емкости фильтра необходимо знать частоту среза и сопротивления нагрузок, между которыми фильтр должен работать. Так как характеристическое сопротивление фильтра не остается постоянным в пределах полосы пропускания и согласовать нагрузки на всех частотах нельзя, то в простейших случаях фильтр согласовывают по номинальному характеристическому сопротивлению. Это приводит к условию

$$\omega_{cp} L = 2R_n, \quad (7.20)$$

в котором

$$R_n = R = \sqrt{L/C}. \quad (7.21)$$

Из формул (7.20) и (7.21) получим

$$L = 2R/\omega_{cp} = R/(\pi f_{cp}); \quad C = L/R_2 = 2/(\omega_{cp} R) = 1/(\pi f_{cp} R). \quad (7.22)$$

Следует отметить, что формулы (7.22) дают полные значения элементов L и C , тогда как в схемы надо вводить также и $0,5L$ или $2C$ (см. рис. 7.3, а). Схемы Т и П называют звеньями ФНЧ, схему Г — полувзеном.

7.3. ФИЛЬТР ВЕРХНИХ ЧАСТОТ ТИПА k

Фильтр верхних частот должен пропускать с нулевым затуханием все токи с частотами выше заданной ($\omega > \omega_{cp}$) и задерживать токи с более низкими частотами и постоянный ток. Этим требованиям удовлетворяют цепочечные схемы Т, П, и Г с емкостным сопротивлением в качестве Z_1 и индуктивным в качестве Z_2 (рис. 7.4, а). Здесь

$$Z_1 = 1/(j\omega C), \quad Z_2 = j\omega L, \quad Z_1 Z_2 = L/C = R^2, \quad R = \sqrt{L/C}. \quad (7.23)$$

Пользуясь общим условием (7.12), характеризующим частоту среза $|x_1(\omega_{cp})| = 2R$, найдем:

$$|x_1(\omega_{cp})| = 1/(\omega_{cp} C) = 2R = 2\sqrt{L/C}; \quad \omega_{cp} = 1/(2\sqrt{LC}). \quad (7.24)$$

Для определения характеристик фильтра по формулам (7.9) и (7.10) рассмотрим, как изменяется в зависимости от частоты отношение

$$\frac{Z_1}{4Z_2} = -\frac{1}{4\omega^2 LC} = -\frac{\omega_{cp}^2}{\omega^2} = -\frac{f_{cp}^2}{f^2} = -\frac{1}{\Omega^2}, \quad (7.25)$$

где Ω — относительная, или нормированная, частота.

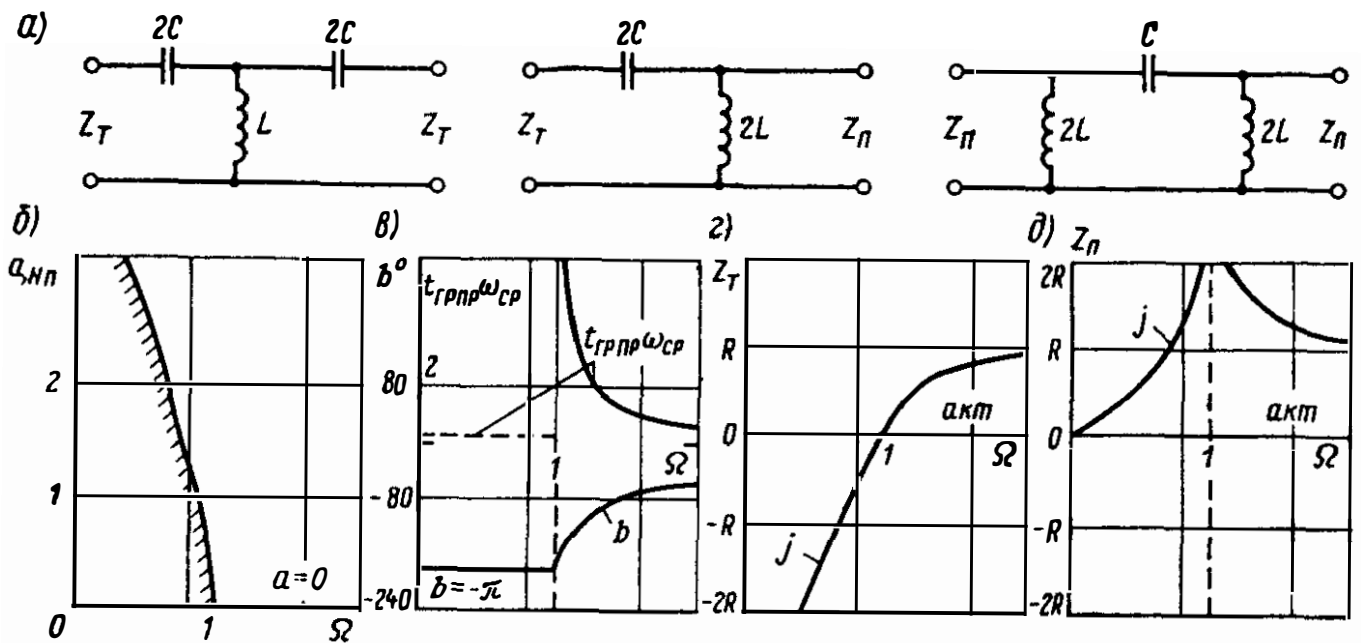


Рис. 7.4

Четырехполюсник пропускает все частоты выше $\omega_{ср}$, $\Omega > 1$.

Формулы, определяющие затухание и фазовый сдвиг ФВЧ, получим, если значение $Z_1/4Z_2 = -1/\Omega^2$ подставим в общие выражения (7.9) и (7.10).

В полосе пропускания при $\omega > \omega_{ср}$, $\Omega > 1$

$$a=0; \quad \sin \frac{b}{2} = -\sqrt{\frac{\omega_{ср}^2}{\omega^2}} = -\frac{1}{\Omega}. \quad (7.26)$$

В полосе задерживания при $\omega < \omega_{ср}$, $\Omega < 1$

$$\operatorname{ch} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\omega_{ср}^2}{\omega^2}} = \frac{1}{\Omega}; \quad b = -\pi. \quad (7.27)$$

Частотные зависимости затухания и фазовой постоянной ФВЧ приведены на рис. 7.4, б и в. Знак фазового сдвига выбран здесь противоположным знаком этой величины ФНЧ, поскольку, как это хорошо видно, в области достаточно высоких частот при последовательно включенных конденсаторах ток и напряжение на выходе опережают по фазе эти величины, действующие на входе.

Найдем выражение для группового времени прохождения.

Из выражения (7.26) для полосы пропускания найдем: $b = -2 \times \arcsin \frac{1}{\Omega}$.

Тогда

$$t_{гр \text{ пр } \omega_{ср}} = \frac{db(\Omega)}{d\Omega} = 2 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\Omega^2}}} \frac{1}{\Omega^2} = \frac{2}{\Omega \sqrt{\Omega^2 - 1}}. \quad (7.28)$$

В полосе задерживания $t_{гр \text{ пр}} = 0$ (см. рис. 7.4, в).

Рассмотрим характеристические сопротивления:

$$Z_{\text{Т}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \frac{\omega_{\text{ср}}^2}{\omega^2}} = \frac{R \sqrt{\Omega^2 - 1}}{\Omega}; \quad (7.29)$$

$$Z_{\text{П}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{\text{ср}}^2}{\omega^2}}} = \frac{R\Omega}{\sqrt{\Omega^2 - 1}}. \quad (7.30)$$

Частотные зависимости этих сопротивлений приведены на рис. 7.4 *г* и *д*.

Расчетные формулы для определения элементов получаются аналогично формулам для ФНЧ. Из условия $|x| = 2R$ на частотах $\omega = \omega_{\text{ср}}$ и $R = \sqrt{L/C}$ найдем:

$$C = \frac{1}{2R\omega_{\text{ср}}} = \frac{1}{4\pi f_{\text{ср}} R}; \quad L = CR^2 = \frac{R}{2\omega_{\text{ср}}} = \frac{R}{4\pi f_{\text{ср}}}. \quad (7.31)$$

Здесь в отличие от ФНЧ согласование с нагрузкой проводится на бесконечно большой угловой частоте ($\omega \rightarrow \infty$). В остальном о фильтре верхних частот можно повторить все, что было сказано о ФНЧ.

Характеристическое сопротивление ФВЧ на очень высоких частотах активно и равно $\sqrt{L/C}$. Это значит, что сопротивление фильтра со стороны входных зажимов равно сопротивлению подключенной к нему нагрузки.

На частоте среза имеют место резонанс напряжений в схеме Т и резонанс токов в схеме П, обращающие характеристическое сопротивление фильтра в нуль или бесконечность. Предполагается, что с дальнейшим понижением частоты нагрузка остается согласованной, т. е. реактивной, и, следовательно, входное сопротивление фильтра делается реактивным; фильтр не воспринимает энергии от генератора, причем в глубине полосы задерживания (т. е. на частотах, близких к нулю) в случае схемы Т генератор как бы отключен от фильтра конденсатором, имеющим при этом весьма большое сопротивление, в случае же схемы П генератор шунтируется индуктивностью, имеющей на этих частотах малое сопротивление.

В случаях параллельного соединения нескольких фильтров уменьшение до нуля входного сопротивления одного из них шунтирует и остальные, чем нарушает их работу. Поэтому фильтры для параллельной работы строят по схеме Т, в случае же индивидуального включения фильтр рекомендуется выполнять по схеме П. На выбор схемы может влиять также наличие реактивной составляющей в сопротивлении нагрузки. Схему фильтра следует выбирать так, чтобы избежать непредусмотренных резонансных явлений.

7.4. ПОЛОСОВОЙ ФИЛЬТР ТИПА *k*

Полосовым фильтром называют четырехполюсник, который пропускает без затухания электрические колебания с угловыми частотами, лежащими в полосе от ω_1 до ω_2 , и оказывает затухание колебаниям с

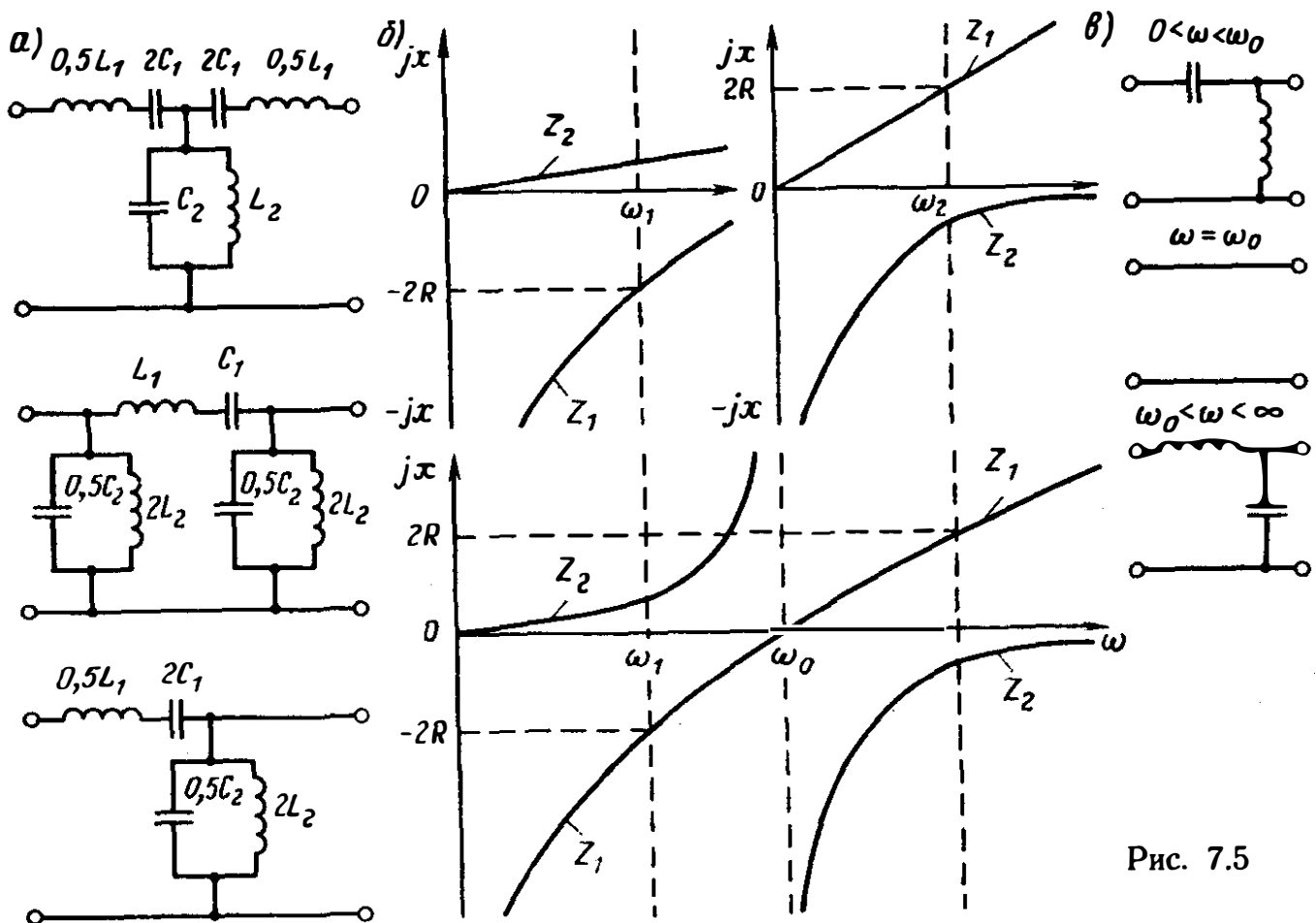


Рис. 7.5

частотами вне этой полосы. Схемы полосового фильтра типа k приведены на рис. 7.5, а. В последовательной их ветви содержится емкость, препятствующая прохождению тока с низкими частотами, и индуктивность, преграждающая путь току с высокими частотами. Емкость и индуктивность параллельного контура, наоборот, беспрепятственно пропускают токи с очень низкими и очень высокими частотами. На частотах, близких к резонансным, который наступает одновременно во всех ветвях на частоте ω_0 , последовательная ветвь имеет малое сопротивление, а параллельная — большое, и, таким образом, фильтр пропускает энергию относительно свободно.

Свойства ПФ можно определить сравнением его с ФВЧ и ФНЧ. На частотах ниже резонансной сопротивление Z_1 имеет емкостный характер, а сопротивление Z_2 — индуктивный. Поэтому на указанных частотах полосовой фильтр ведет себя как ФВЧ. На частотах выше резонансной сопротивление Z_1 носит индуктивный характер, а сопротивление Z_2 — емкостный, и полосовой фильтр ведет себя как ФНЧ. Сказанное иллюстрируется рис. 7.5, б, где приведены частотные зависимости сопротивлений Z_1 и Z_2 фильтров верхних, нижних частот и полосового. Из этого рисунка видно, что условие $|x_1| = 4|x_2|$ или $|x_1| = 2R$ для ПФ наблюдается дважды: на частоте ω_1 , меньшей ω_0 , и на частоте ω_2 , большей ω_0 . В первом случае имеет место переход от задерживания к пропусканию, а во втором, наоборот, от пропускания к задерживанию.

Таким образом, в каждой из частотных полос схему ПФ можно заменить более простой эквивалентной схемой, действительной для дан-

ной полосы. Такие эквивалентные схемы приведены на рис. 7.5, в. Из них следует, что характеристики ПФ представляют собой как бы соединение соответствующих характеристик ФВЧ и ФНЧ (рис. 7.6).

Согласно определению фильтров типа к сопротивления Z_1 и Z_2 должны быть взаимнообратны. Для ПФ это возможно при

$$\omega_0 = 1/\sqrt{L_1 C_1} = 1/\sqrt{L_2 C_2};$$

$$Z_1 = \frac{jL_1}{\omega} (\omega^2 - \omega_0^2) = j\omega_0 L_1 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right);$$
(7.32)

$$Z_2 = \frac{\omega}{jC_2} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{1}{j\omega_0 C_2} \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}.$$

Отсюда

$$R = \sqrt{Z_1 Z_2} = \sqrt{L_1/C_2} = \sqrt{L_2/C_1}. \quad (7.33)$$

Для угловых частот среза ω_1 и ω_2 , при которых $|x_1| = 2R$, с учетом формулы (7.32) получим:

$$\omega_0 L_1 \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1} \right) = -2R; \quad \omega_0 L_1 \left(\frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_2} \right) = 2R. \quad (7.34)$$

После преобразований с учетом формул (7.32) и (7.33) из уравнений (7.34) получаем выражения для угловых частот среза:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{L_1 C_2} + \frac{1}{L_1 C_1} - \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{L_1 C_2} + \frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}}}.$$

Из последних равенств следуют такие выражения:

$$\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2; \quad \omega_1 - \omega_2 = 2/\sqrt{L_1 C_2}. \quad (7.35)$$

Для аналитического исследования свойств ПФ с учетом уравнений (7.32) найдем отношение:

$$\frac{Z_1}{4Z_2} = -\frac{L_1 C_2}{4} \omega_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2.$$

Если учесть выражения (7.35) и ввести следующие обозначения: $n = \omega_0/(\omega_1 - \omega_2)$ и $\Omega = \omega/\omega_0$ — нормированная частота ПФ, то из предыдущего уравнения получим:

$$\frac{Z_1}{4Z_2} = -\left[n \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right) \right]^2 = -\eta^2. \quad (7.36)$$

Параметры a , b , Z_T и Z_{Π} ПФ можно определить по тем же формулам, что и параметры

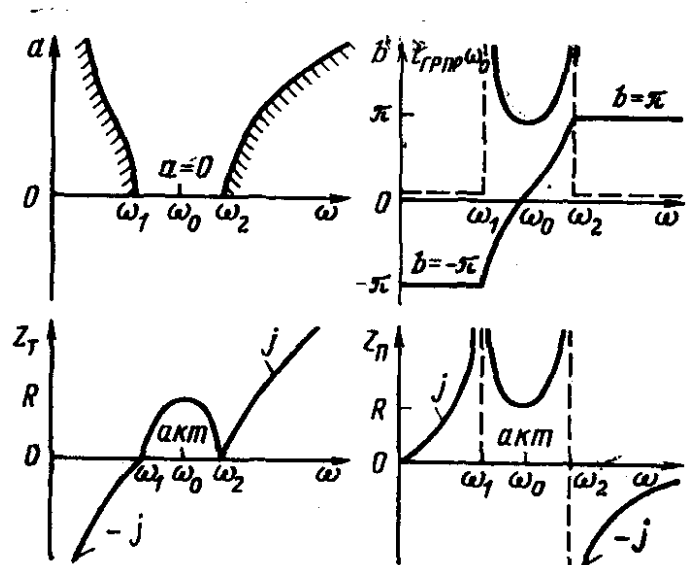


Рис. 7.6

ФНЧ, с заменой в них R и Ω в соответствии с выражениями (7.33) и (7.36). По ним и построены частотные зависимости на рис. 7.6.

Формулы для расчета параметров ПФ найдем по заданным частотам среза ω_1 , ω_2 и $R_H = R$ с учетом выражений (7.33), (7.34) и (7.35):

$$L_1 = \frac{2R}{\omega^2 - \omega_1} = \frac{R}{\pi(f_2 - f_1)}; \quad C_1 = \frac{1}{L_1 \omega_1 \omega_2} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_1 \omega_2 R} = \frac{f_2 - f_1}{4\pi f_1 f_2 R};$$

$$C_2 = \frac{L_1}{R^2} = \frac{2}{R(\omega_2 - \omega_1)} = \frac{1}{\pi R(f_2 - f_1)};$$

$$L_2 = \frac{L_1 C_1}{C_2} = \frac{R(\omega_2 - \omega_1)}{2\omega_1 \omega_2} = \frac{R(f_2 - f_1)}{4\pi f_1 f_2}. \quad (7.37)$$

При неодинаковых требованиях к ослаблению нежелательных частотных составляющих, лежащих ниже и выше полосы пропускания, часто применяют более простые схемы полосовых фильтров. Их строят исключением из схем, приведенных на рис. 7.5, а, какого-либо одного элемента. Если, например, из сопротивления Z_1 исключить катушку индуктивности L_1 , оставив конденсатор C_1 , то получаются схемы полосовых фильтров, обеспечивающих более сильное подавление частот, лежащих ниже полосы пропускания. Тот же эффект достигается при исключении из указанных схем конденсатора C_2 (рис. 7.7, а и б).

Обратный эффект — более сильное подавление частот, лежащих выше полосы пропускания, — получается при исключении C_1 или L_2 .

Схема (см. рис. 7.7, б) содержит соединения трех индуктивностей. Известно, что связанные индуктивности (рис. 7.7, в) могут быть заменены эквивалентной схемой (рис. 7.7, г). Используя эту эквивалентность, можно получить эквивалентную схему, приведенной на рис. 7.7, б, полосовой фильтр, если выполнить его по схеме (рис. 7.7, д). Преимущество этой схемы заключается в том, что при пробое конденсаторов вход и выход фильтра остаются изолированными друг от друга, вследствие чего этому способу реализации фильтров в ряде случаев

отдают предпочтение. Такой фильтр должен быть рассчитан как фильтр (см. рис. 7.7, б) по формулам:

$$L_1 = \frac{f_1 R}{\pi f_2 (f_2 - f_1)}; \quad C_1 = \frac{f_2 - f_1}{4\pi f_1 f_2 R};$$

$$L_2 = \frac{(f_1 + f_2) R}{4\pi f_1 f_2}. \quad (7.38)$$

Затем «звезда» из индуктивностей должна быть заменена эквивалентным трансформатором с индуктивностью обмоток $L = 0,5L_1 + L_2$ и коэффициентом взаимоиндукции $M = L_2$.

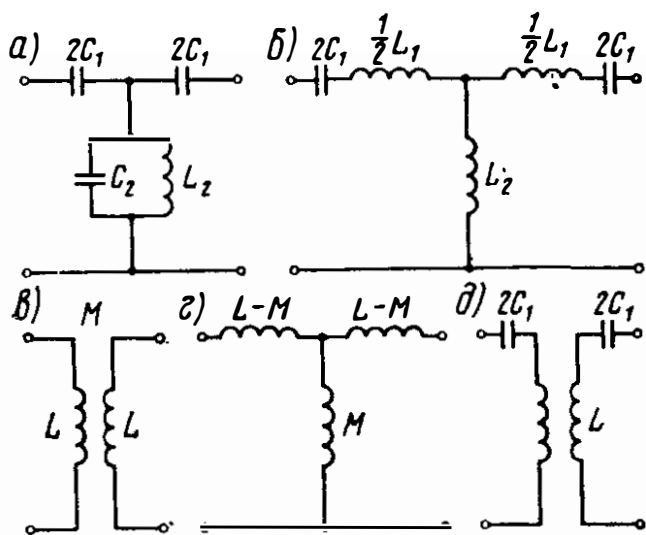


Рис. 7.7

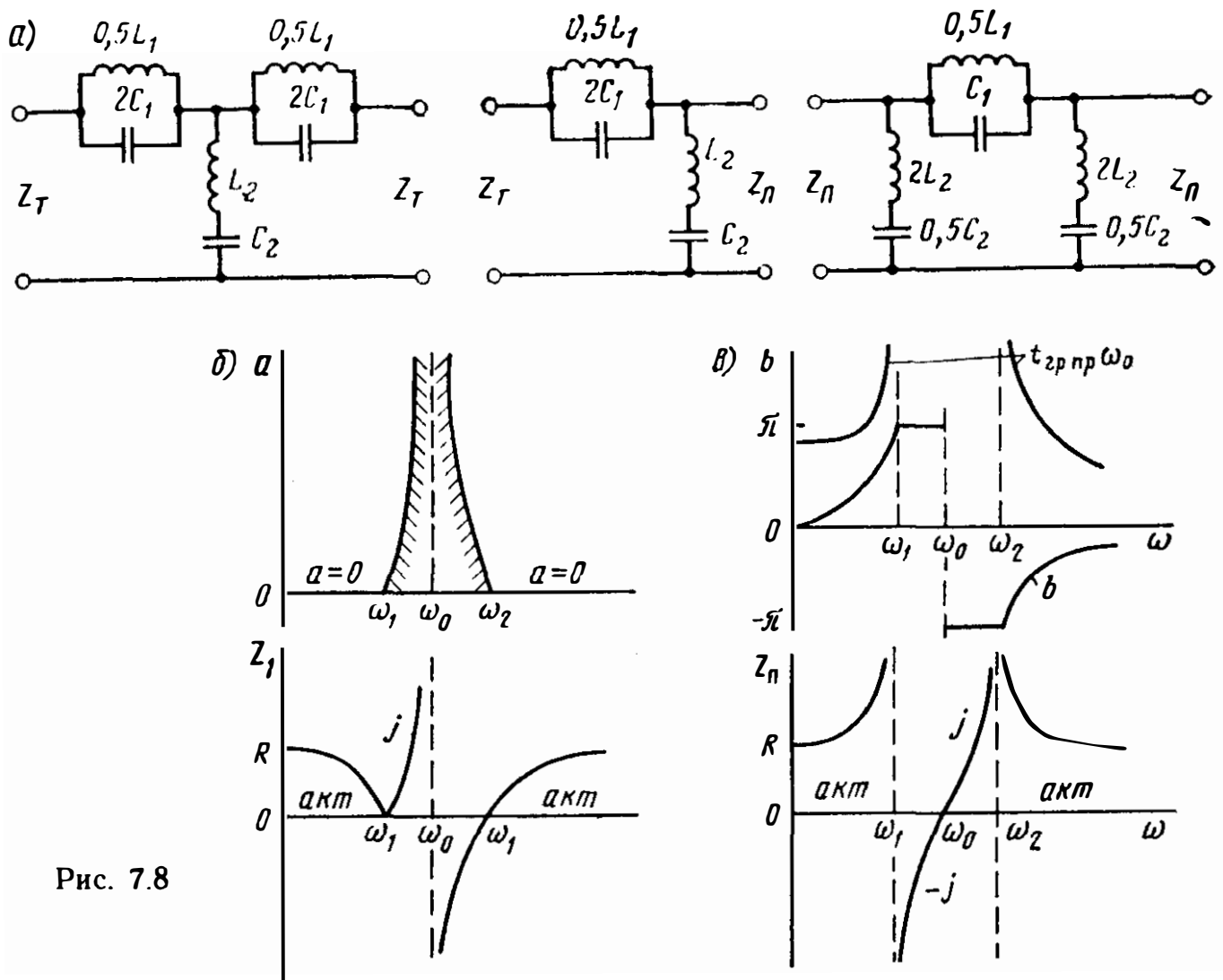


Рис. 7.8

Если в схемах Г, Т, и П в качестве Z_1 и Z_2 взять соответственно контуры резонансов токов и напряжений (рис. 7.8, а), то эти схемы будут пропускать все частоты ниже ω_1 и выше ω_2 и вносить затухание на частотах, удовлетворяющих условию $\omega_1 < \omega < \omega_2$. Такие четырехполюсники называют режекторными фильтрами (РФ) типа к. Их характеристики приведены на рис. 7.8, б и в.

7.5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАСШТАБА ЧАСТОТ

Из изложенного можно заключить, что все рассмотренные схемы фильтров исследуют одинаково. Задаваясь видом двухполюсников Z_1 и Z_2 , из которых составлена схема, выражения $Z_1/(4Z_2)$ представляют в виде функции от ω и затем строят характеристики затухания и фазы, руководствуясь соображением о значении $\left| \frac{x_1}{4x_2} \right|$ по сравнению с 1 или $|x_1|$ по сравнению с $2R$. Различия в свойствах отдельных схем обнаруживаются при этом в связи с соответствующей зависимостью сопротивлений Z_1 и Z_2 от частоты.

Замеченное обстоятельство позволяет при исследовании свойств фильтрующих четырехполюсных схем пользоваться преобразованием частот. Последнее заключается в следующем. Зная свойства какой-либо схемы, например ФНЧ, и желая определить свойства другой схемы,

Фильтр	$x_1(\omega)$	$x_2(\omega)$	Условие $ x_1(\omega_{\text{ср}}) = 2R$	Расчетные формулы из условия	
				$ x = 2R$	$ x = \frac{R_2}{ x_1 }$
ФНЧ	$x_1(\omega) = \omega L = \frac{\omega}{\omega_{\text{ср}}} 2R$	$x_2(\omega) = -\frac{1}{\omega C} = \frac{\omega_{\text{ср}}}{\omega} \frac{R}{2}$	$\omega_{\text{ср}} L = 2R$	$L = \frac{2R}{\omega_{\text{ср}}}$	$C = \frac{L}{R^2} = \frac{2}{\omega_{\text{ср}} R}$
ФВЧ	$x_1(\omega) = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{\omega_{\text{ср}}}{\omega} 2R$	$x_2(\omega) = \omega L = \frac{\omega}{\omega_{\text{ср}}} \frac{R}{2}$	$\frac{1}{\omega_{\text{ср}} C} = 2R$	$C = \frac{1}{2\omega_{\text{ср}} R}$	$L = CR^2 = \frac{R}{2\omega_{\text{ср}}}$
ПФ	$x_1 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega} L_1$	$x_2 = -\frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \frac{1}{C_2}$	$\frac{\omega_2^2 - \omega_0^2}{\omega_2} L_1 = 2R;$ $\omega_0^2 = \omega_1 \omega_2$	$L_1 = \frac{2R}{\omega_2 - \omega_1};$ $L_1 C_1 = \frac{1}{\omega_0^2}$	$C_2 = \frac{L_1}{R_2} = \frac{2}{(\omega_2 - \omega_1) R};$ $L_2 C_2 = \frac{1}{\omega_0^2}$
РФ	$x_1 = \frac{-\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \frac{1}{C_1}$	$x_2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega} L_2$	$\frac{-\omega_1}{\omega_1^2 - \omega_0^2} \frac{1}{C_1} = 2R$	$C_1 = \frac{1}{2R(\omega_2 - \omega_1)}$ $L_1 C_1 = \frac{1}{\omega_0^2}$	$L_2 = C_1 R^2 = \frac{R}{2(\omega_2 - \omega_1)};$ $L_2 C_2 = \frac{1}{\omega_0^2}$

получающейся заменой сопротивлений Z_1 и Z_2 другими, в формулах, характеризующих свойства первой схемы, угловую частоту ω заменяют функцией от ω , соответствующей выполненной замене сопротивлений.

Действительно, для ФНЧ $Z_1 = j\omega L$ и $Z_2 = 1/(j\omega C)$. Если заменить Z_1 на $1/(j\omega C)$, а Z_2 на $j\omega L$, то, как известно, получится ФВЧ. Его свойства легко устанавливаются, если во всех характеристиках ФНЧ $\omega/\omega_{ср}$ заменить на $\omega_{ср}/\omega$ или, что то же, Ω — на $1/\Omega$. Переход от ФНЧ к ПФ требует замены Ω величиной η .

Преобразование частоты при переходе от одного типа фильтра к другому иллюстрируются табл. 7.1. Применение преобразования частоты особенно удобно при исследовании сложных схем и количественном определении влияния потерь на свойства фильтров. При учете влияния потерь следует в рассматриваемых схемах чисто реактивные сопротивления, например $j\omega L_1$, заменить на $r_1 + j\omega L_1$. Получаемые изменения в свойствах схемы можно определить, заменяя угловую частоту ω комплексной величиной $\omega - j \frac{r_1}{L_1}$, которая при умножении на jL_1 дает полное сопротивление $r_1 + j\omega L_1$, так как в случае чисто реактивного сопротивления при умножении ω на jL получаем $j\omega L$.

7.6. ВЛИЯНИЕ ПОТЕРЬ И НЕСОГЛАСОВАННОСТИ НАГРУЗОК НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ФИЛЬТРОВ

Влияние потерь. Практически фильтры вследствие потерь в элементах имеют затухание в полосе пропускания, не равное нулю, а в полосе задерживания — меньшее, чем в идеальном фильтре. Обусловливается это в основном потерями в катушках индуктивности.

Потери в катушке оценивают ее добротностью:

$$Q = \omega L / r$$

или обратной величиной:

$$d = 1/Q = r/(\omega L),$$

называемой коэффициентом потерь. Величины Q и d катушек с ферромагнитными сердечниками в большой степени зависят от частоты (рис. 7.9).

Характеристики фильтра с учетом потерь можно рассчитать по тем же формулам, что и характеристики идеального фильтра с той только разницей, что относительная частота, определяемая из условия $\Omega^2 = Z_1/(4Z_2)$, в случае фильтра с потерями будет комплексным числом.

Например, для ФНЧ, у которого

$$Z_1 = r_1 + j\omega L_1 = j\omega L_1 (1 - jd) \quad \text{и} \quad Z_2 = 1/(j\omega C),$$

имеем:

$$\frac{Z_1}{4Z_2} = -\frac{\omega^2 LC}{4} (1 - jd) = -\Omega^2 (1 - jd).$$

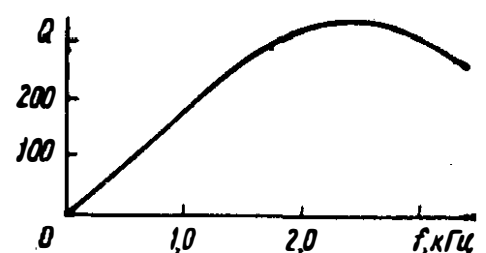


Рис. 7.9

Подставляя значение $Z_1/(4Z_2)$ в формулу (7.4), и другие, можно рассчитать условия передачи для фильтра с потерями в катушках индуктивности. Аналогично учитывают потери в конденсаторах.

Влияние несогласованности на затухание фильтра. Фильтры обычно работают между постоянными активными нагрузками. При расчете фильтров сопротивления нагрузок предполагали равными характеристическому сопротивлению фильтра во всем диапазоне частот. Несогласованность нагрузок дополнительно приводит к отклонению кривой затухания от теоретической.

В рабочих условиях затухание фильтра в полосе пропускания не равно нулю, а в полосе задерживания может быть меньше собственного затухания a , определяемого формулой (7.17).

Для вычисления рабочих параметров фильтра при $R_r = R_n = R$ воспользуемся выражением (5.51):

$$g_{\text{раб}} = a_{\text{раб}} + jb_{\text{раб}} = \ln \left\{ \operatorname{ch} g + \left(\frac{R}{2Z_x} + \frac{Z_x}{2R} \right) \operatorname{sh} g \right\}.$$

Из этой формулы следует, что

$$a_{\text{раб}} = \ln \left| \operatorname{ch} g + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{Z_x} + \frac{Z_x}{R} \right) \operatorname{sh} g \right|. \quad (7.39)$$

В полосе пропускания фильтра $a = 0$, $g = jb$, Z_x активно. Имея это в виду и учитывая, что $\operatorname{ch} jb = \cos b$ и $\operatorname{sh} jb = j \sin b$, получим:

$$a_{\text{раб}} = \ln \left| \cos b + j \frac{1}{2} \left(\frac{R}{Z_x} + \frac{Z_x}{R} \right) \sin b \right| = \frac{1}{2} \ln \left[\cos^2 b + \frac{1}{4} \left(\frac{R}{Z_x} + \frac{Z_x}{R} \right)^2 \sin^2 b \right] = \frac{1}{2} \ln \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{R}{Z_x} - \frac{Z_x}{R} \right)^2 \sin^2 b \right]. \quad (7.40)$$

Как видно, рабочее затухание фильтра в полосе пропускания не равно нулю и изменяется с частотой, поскольку от последней зависят фазовая постоянная b и Z_x .

Исследуем формулу (7.40) применительно к схеме Т ФНЧ. Для нее

$$Z_x = R \sqrt{1 - \Omega^2}; \quad \sin \frac{b}{2} = \Omega.$$

Отсюда

$$\cos \frac{b}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{b}{2}} = \sqrt{1 - \Omega^2};$$

$$\sin b = 2 \sin \frac{b}{2} \cos \frac{b}{2} = 2\Omega \sqrt{1 - \Omega^2};$$

$$\sin^2 b = 4\Omega^2 (1 - \Omega^2); \quad \cos^2 b = 1 - \sin^2 b = 1 - 4\Omega^2 (1 - \Omega^2);$$

$$a_{\text{раб}} = \frac{1}{2} \ln \left[1 - 4\Omega^2 (1 - \Omega^2) + \frac{1}{4} \left(\frac{R^2 + R^2 (1 - \Omega^2)}{R^2 \sqrt{1 - \Omega^2}} \right)^2 4\Omega^2 (1 - \Omega^2) \right] = \\ = \frac{1}{2} \ln [1 + \Omega^6]. \quad (7.41)$$

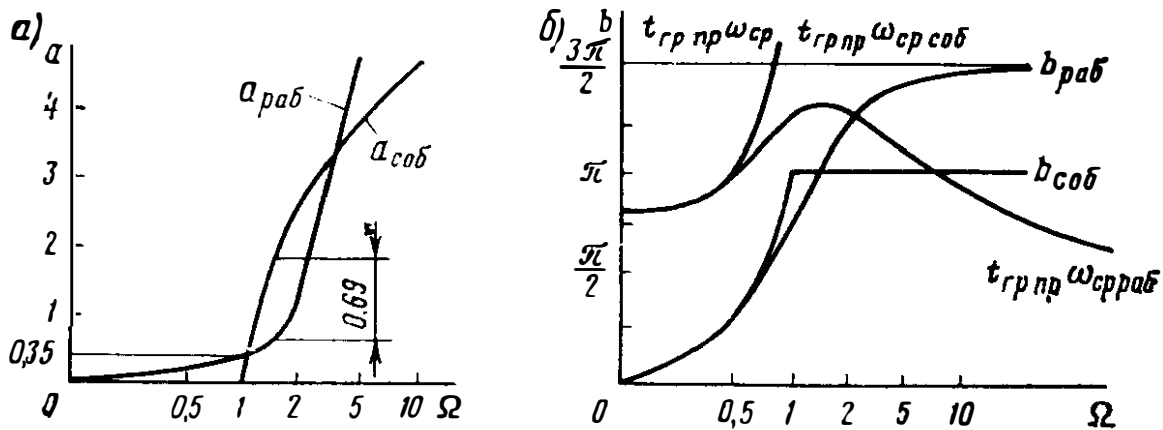


Рис. 7.10

Из формулы (7.40) можно видеть, что $a_{раб}$ будет иметь максимальное значение на тех частотах, на которых $\sin^2 b$ наибольшее. Поскольку максимальное значение $\sin^2 b = 1$, то наибольшее значение рабочего затухания в полосе пропускания

$$a_{раб} = \Delta a = \frac{1}{2} \ln \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{R}{Z_x} - \frac{Z_x}{R} \right)^2 \right] = \ln \frac{1}{2} \left[\frac{R}{Z_x} + \frac{Z_x}{R} \right]. \quad (7.42)$$

В частности, для частоты среза $\Omega = 1$ из выражения (7.41) получим: $a_{раб} = \frac{1}{2} \ln 2 = 0,35 \text{ Нп} = 3 \text{ дБ}$. В полосе задерживания $a \neq 0$, $b = +\pi$, $Z_x = jX_x = j|Z_x|$.

Из выражения (7.39) получим:

$$a_{раб} = \ln \left| \operatorname{ch} a + j \frac{1}{2} \left(\frac{|Z_x|}{R} - \frac{R}{|Z_x|} \right) \operatorname{sh} a \right|.$$

Имея в виду, что при больших затуханиях $\operatorname{cha} = \operatorname{sha} = \frac{1}{2} e^a$, найдем:

$$\begin{aligned} a_{раб} &= \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1}{4} e^{2a} + \frac{1}{4} \left(\frac{|Z_x|}{R} - \frac{R}{|Z_x|} \right)^2 \frac{1}{4} e^{2a} \right] = \\ &= \ln \frac{1}{4} e^a \left(\frac{R}{|Z_x|} + \frac{|Z_x|}{R} \right) = a + \ln \frac{1}{4} \left(\frac{R}{|Z_x|} + \frac{|Z_x|}{R} \right). \end{aligned} \quad (7.43)$$

Величина $\left(\frac{R}{|Z_x|} + \frac{|Z_x|}{R} \right)$, входящая в выражение (7.43), имеет минимум при $R = |Z_x|$ и равна 2. Этому соответствует наименьшее рабочее затухание в полосе задерживания:

$$a_{раб} = a - \ln 2 = a - 0,69 \text{ Нп} = a - 6 \text{ дБ}.$$

Возможность такого уменьшения рабочего затухания фильтра по сравнению с собственным следует учитывать при расчете.

Таким образом, вследствие потерь в элементах фильтра и несогласованности его с нагрузками кривая затухания фильтра в реальных условиях отличается от кривой собственного затухания идеального фильтра (рис. 7.10, а).

Влияние несогласованности на фазовый сдвиг. Несогласованность с нагрузкой фильтра вызывает также изменение частотных зависимо-

стей фазового коэффициента b и группового времени прохождения $t_{гр пр}$ по сравнению с собственными.

Воспользуемся выражением (5.51) и определим рабочий фазовый сдвиг для частот полосы пропускания. Имея в виду, что в полосе пропускания $g = jb$, из указанного выражения получим:

$$g_{раб} = \ln \left[\cos b + j \frac{1}{2} \left(\frac{R}{Z_x} + \frac{Z_x}{R} \right) \sin b \right].$$

Рабочий фазовый сдвиг $b_{раб}$ есть угол комплексного числа, стоящего под знаком логарифма,

$$b_{раб} = \arctg \left[\frac{1}{2} \left(\frac{R}{Z_x} + \frac{Z_x}{R} \right) \operatorname{tg} b \right]; \quad t_{гр пр} = t_{гр раб} = \frac{db_{раб}}{d\omega}. \quad (7.44)$$

В частности, для фильтра типа k , выполненного по схеме T , при $R_H = R$

$$Z_x = R \sqrt{1 - \Omega^2}; \quad \sin \frac{b}{2} = \Omega; \quad \operatorname{tg} \frac{b}{2} = \frac{\Omega}{\sqrt{1 - \Omega^2}};$$

$$\operatorname{tg} b = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{b}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{b}{2}} = \frac{2\Omega \sqrt{1 - \Omega^2}}{1 - 2\Omega^2}.$$

Подставляя эти значения в выражение (7.44), получим:

$$b_{раб} = \arctg \frac{(2 - \Omega^2) \Omega}{1 - 2\Omega^2}. \quad (7.45)$$

На рис. 7.10, б приведены рабочие характеристики $b_{раб}(\Omega)$ и $t_{гр пр} \omega_{ср раб}(\Omega)$ для ФНЧ, существенно отличающиеся от соответствующих собственных характеристик.

7.7. ФИЛЬТРЫ ТИПА m

Рассмотренные выше электрические фильтры типа k имеют два существенных недостатка. Первым из них является медленный рост затухания фильтров на частотах полосы задерживания, вторым — значительная зависимость их характеристических сопротивлений от частоты, не позволяющая достаточно точно согласовать фильтры с нагрузками на всех частотах полосы пропускания, вследствие чего затухание фильтра на этих частотах возрастает. Таким образом, фильтры типа k можно применять при невысоких требованиях к ослаблению нежелательных частот и согласованию.

Качественным следует считать фильтр, имеющий активное и независимое от частоты характеристическое сопротивление в полосе пропускания и достаточное постоянное затухание в полосе задерживания. Приближением к этому идеалу в известной степени являются комбинированные фильтры, содержащие звенья типа m . Принцип устройства таких фильтров рассмотрим на примере ФНЧ. Преобразование частоты все полученные результаты можно перенести на ФВЧ, ПФ и РФ.

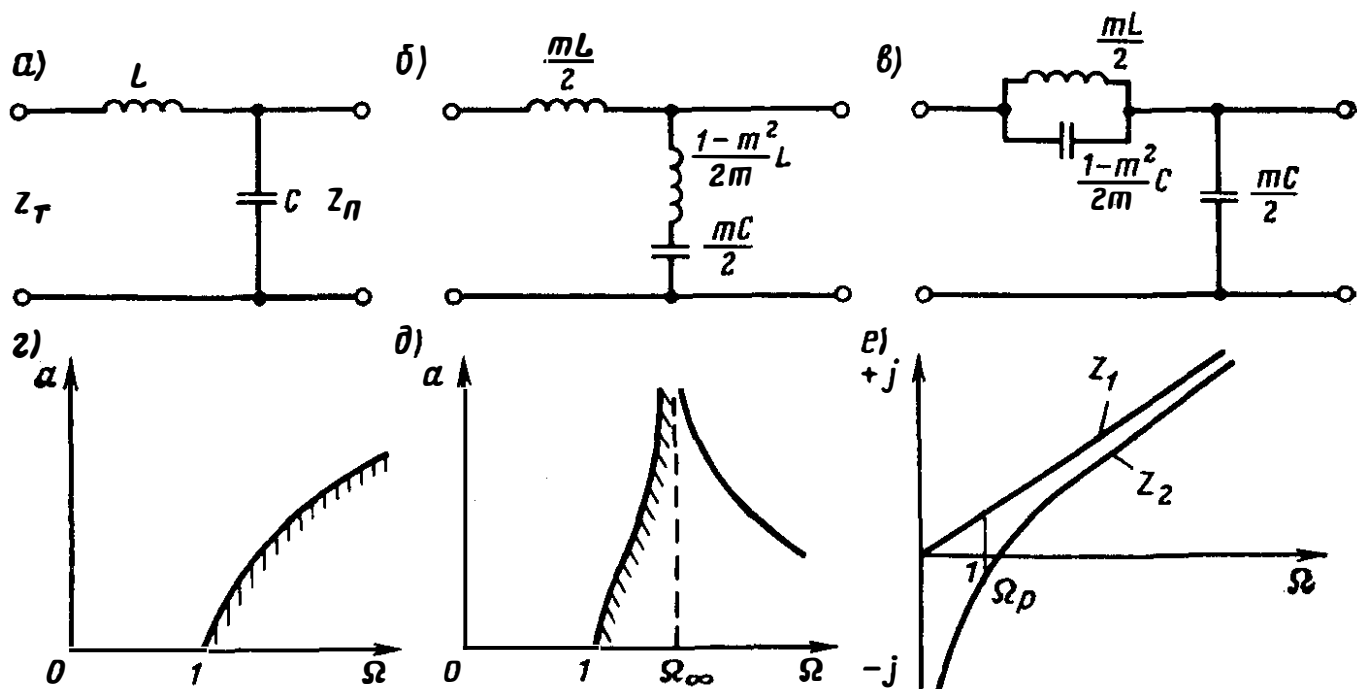


Рис. 7.11

Получение большего затухания на частотах, близких к частоте среза. Большее затухание, чем от ФНЧ (рис. 7.11, а), на частотах, близких к частоте среза, например на частоте 1200 Гц (когда $f_{ср} = 1000$ Гц), можно получить введением в схему ФНЧ резонансных ветвей, обрывающих или шунтирующих цепь тока на частоте 1200 Гц (рис. 7.11, б и в). Резкое увеличение затухания цепи на частоте резонанса, которую обозначим ω_p , называют в с п л е с к о м з а т у х а н и я. Применяя математическую терминологию, часто всплеск называют п о л ю с о м з а т у х а н и я. Изменяя частоту резонансов контуров, включенных в схему фильтра, можно менять соответственно требованиям крутизну кривой затухания.

На рис. 7.11, б приведена схема последовательно-производного полузвена типа m , а на рис. 7.11, в — параллельно-производного полузвена типа m . Смысл этих названий ясен из рисунков. На рис. 7.11, б и в показано также, какими должны быть значения элементов схемы. Вывод соответствующих выражений дается ниже.

Частотные зависимости затухания исходного фильтра, называемого в этом случае прототипом, и нового фильтра — производного фильтра типа m , приведены на рис. 7.11, г и д.

Собственное затухание фильтра типа m , кроме всплеска, характерно еще уменьшением своего значения на угловых частотах, превышающих резонансную частоту ω_p . Это объясняется тем, что на указанных частотах оба сопротивления, образующие схему фильтра, представляют собой реактивные сопротивления одного знака (рис. 7.11, е), так как сама схема преобразуется в делитель напряжения и теряет свойства фильтра. Рабочее затухание звена типа m при нагрузке его на активное сопротивление после некоторого уменьшения растет.

Фильтры типа m вследствие малости затухания, даваемого ими в глубине полосы задерживания, большей частью применяют не самостоятельно, а в комбинации с фильтрами типа k .

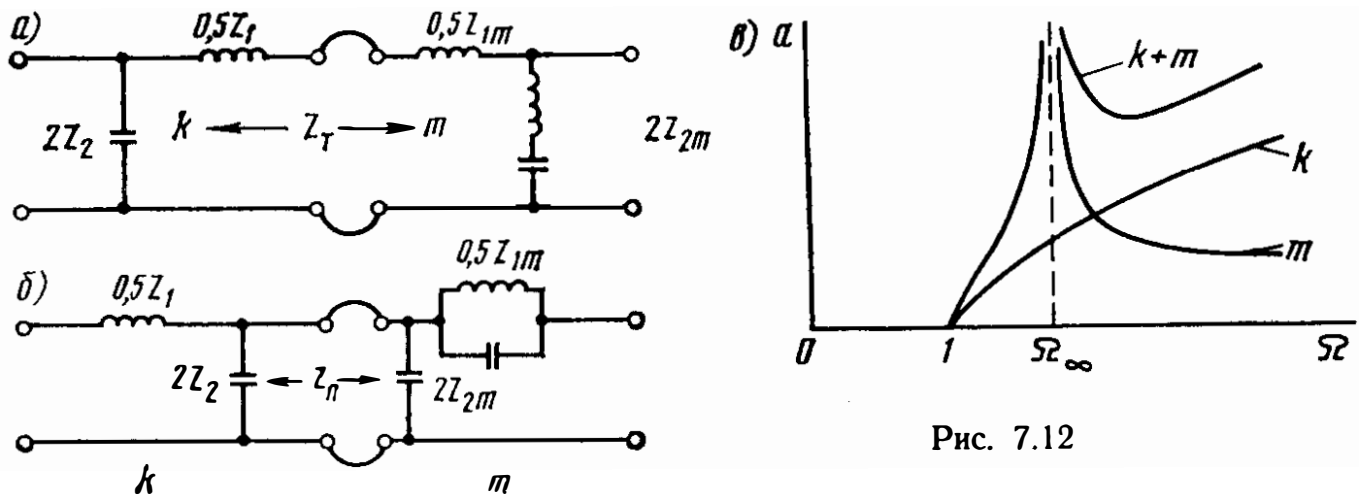


Рис. 7.12

На рис. 7.12 приведены варианты схем и частотная зависимость затухания ФНЧ, составленного из полувзвеньев типов k и m . Затухание имеет достаточную крутизну вблизи $\omega_{ср}$ и характеризует определенное затухание, вносимое ФНЧ токам всех частот полосы пропускания.

Однако для получения затухания комбинированного фильтра, равного сумме затуханий фильтров типов k и m , оба фильтра должны быть рассчитаны на одну и ту же частоту среза и иметь одинаковые характеристические сопротивления в месте соединения. В противном случае вследствие несогласованности увеличится затухание комбинированного фильтра в полосе пропускания. Согласование характеристических сопротивлений фильтров типа m с фильтрами типа k осуществляется специальным подбором их элементов.

Подбор элементов фильтров типа m . Комбинированный фильтр, частотная зависимость затухания которого приведена на рис. 7.12, в, можно получить цепочечным соединением полувзвена типа k с последовательно-производным (рис. 7.12, а) или параллельно-производным (рис. 7.12, б) полувзвеном типа m .

В первом случае фильтр строят по несимметричной схеме П, во втором случае — по несимметричной схеме Т. В месте соединения полувзвеньев необходимо согласовать их характеристические сопротивления. В схеме (см. рис. 7.12, а) должны быть согласованы сопротивления $Z_{Тк}$ и $Z_{Тm}$, а в схеме (см. рис. 7.12, б), имеющей ту же характеристику затухания, сопротивления $Z_{Пк}$ и $Z_{Пm}$.

Рассмотрим условия, которым должны удовлетворять элементы полувзвена типа m для равенства сопротивлений $Z_{Тк}$ и $Z_{Тm}$ на всех частотах.

Очевидно, что в соответствии с выражением (7.1) должно быть

$$Z_1 Z_2 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \right) = Z_{1m} Z_{2m} \left(1 + \frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}} \right),$$

где Z_{1m} и Z_{2m} — сопротивления, образующие схему типа m .

Поскольку сопротивления Z_1 и Z_{1m} одного знака, положим

$$Z_{1m} = mZ_1, \tag{7.46}$$

где m — постоянное число,

тогда

$$Z_2 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \right) = mZ_{2m} \left(1 + \frac{mZ_1}{4Z_{2m}} \right),$$

откуда

$$Z_{2m} = \frac{Z_2}{m} + Z_1 \frac{1-m^2}{4m}, \quad (7.47)$$

что и дает значения элементов, указанных на схеме, приведенной на рис. 7.11, б.

Формулы (7.46) и (7.47) показывают, что согласование характеристических сопротивлений возможно при различных значениях коэффициента m , который, однако, не должен быть больше единицы. В противном случае Z_{2m} содержит отрицательное сопротивление. При $m = 1$ получаем фильтр типа к.

Для определения элементов параллельно-производного полузвена следует приравнять сопротивления $Z_{\Gamma k}$ и $Z_{\Gamma m}$. Положив

$$Z_{2m} = Z_2/m, \quad (7.48)$$

найдем

$$\frac{1}{Z_{1m}} = \frac{1}{mZ_1} + \frac{1}{Z_2} \frac{1-m^2}{4m}, \quad (7.49)$$

(см. рис. 7.11, в).

Затухание и фазовый сдвиг звена типа m . Численные значения затухания и фазового сдвига полузвена ФНЧ типа m на различных частотах, как и всякой другой цепочечной схемы, определяются выражением (7.3):

$$\text{При } Z_{1m} = mZ_1 \text{ и } Z_{2m} = \frac{Z_2}{m} + Z_1 \frac{1-m^2}{4m}$$

получаем:

$$\text{sh} \frac{g}{2} = \sqrt{\frac{m^2 Z_1}{4Z_2 \left[1 + \frac{Z_1}{4Z_2} (1-m^2) \right]}} = \pm \frac{j m \Omega}{\sqrt{1-\Omega^2 (1-m^2)}}. \quad (7.50)$$

Если Z_1 и Z_2 представляют собой реактивные сопротивления разных знаков, то из формулы (7.50) следует:

$$\text{при } 0 < \omega < \omega_{\text{ср}} \quad a = 0;$$

$$\text{при } \omega_{\text{ср}} < \omega < \omega_{\infty} \quad \text{ch} \frac{a}{2} = \frac{m \Omega}{\sqrt{1-\Omega^2 (1-m^2)}}. \quad (7.51)$$

После частоты ω_{∞} знаки сопротивлений Z_{1m} и Z_{2m} становятся одинаковыми, и в соответствии с выражением (7.50) затухание следует рассчитывать по формуле

$$\text{sh} \frac{a}{2} = \frac{m \Omega}{\sqrt{1-\Omega^2 (1-m^2)}}.$$

$$\text{При } \omega \rightarrow \infty \text{ величина } \text{sh} \frac{a}{2} \rightarrow \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}.$$

Из выражения (7.50) видно, что $a \rightarrow \infty$ при $\Omega^2 = \Omega_\infty^2 = \frac{1}{1-m^2}$.

Отсюда

$$\omega_\infty = \omega_{\text{ср}} / \sqrt{1-m^2}; \quad m = \sqrt{1-1/\Omega_\infty^2}.$$

Таким образом, изменяя коэффициент m , можно перемещать всплеск затухания по оси частот. Общий характер зависимости a от Ω и m показан на рис. 7.13.

Рассмотрим зависимость от частоты фазового сдвига:

$$\begin{aligned} \text{при } 0 < \omega < \omega_{\text{ср}} \quad \sin \frac{b}{2} &= \frac{m\Omega}{\sqrt{1-\Omega^2(1-m^2)}}; \\ \text{при } \omega_{\text{ср}} < \omega < \omega_\infty \quad b &= \pi; \\ \text{при } \omega > \omega_\infty \quad b &= 0. \end{aligned} \quad (7.52)$$

Зависимость $b(\Omega)$ иллюстрируется рис. 7.14.

Частотные зависимости затухания и фазового сдвига для звеньев типа m сложнее, чем для звеньев типа k , и определяются величиной m .

Характеристические сопротивления фильтра типа m . Каждое полужвено фильтра типа m имеет два характеристических сопротивления, одно из которых является характеристическим сопротивлением прототипа. Так, согласно формуле (7.18) последовательно-производное полужвено ФНЧ со стороны T имеет характеристическое сопротивление: $Z_{Tm} = Z_{Tk} = R \sqrt{1-\Omega^2}$.

Найдем его характеристическое сопротивление со стороны Π по общей формуле (7.2):

$$\begin{aligned} Z_{\Pi m} &= \frac{\sqrt{Z_{1m} Z_{2m}}}{\sqrt{1 + \frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}}}} = \frac{\sqrt{mZ_1 \left(\frac{Z_2}{m} + Z_1 \frac{1-m^2}{4m} \right)}}{\sqrt{1 + \frac{mZ_1}{4 \left(\frac{Z_2}{m} + Z_1 \frac{1-m^2}{4m} \right)}}} = \\ &= \frac{\sqrt{Z_1 Z_2} \sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2} (1-m^2)}}{\sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \frac{m^2}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2} (1-m^2)}}} = Z_{\Pi k} \left[1 + \frac{Z_1}{4Z_2} (1-m^2) \right] = \\ &= \frac{R}{\sqrt{1-\Omega^2}} [1 - \Omega^2 (1-m^2)] = \frac{R (\Omega_\infty^2 - \Omega^2)}{\Omega_\infty^2 \sqrt{1-\Omega^2}}. \end{aligned} \quad (7.53)$$

Аналогичное выражение можно получить для Z_{Tm} параллельно-производного полужвена:

$$Z_{Tm} = \frac{R \sqrt{1-\Omega^2}}{[1 - \Omega^2 (1-m^2)]} = \frac{R \Omega_\infty^2 \sqrt{1-\Omega^2}}{(\Omega_\infty^2 - \Omega^2)}. \quad (7.54)$$

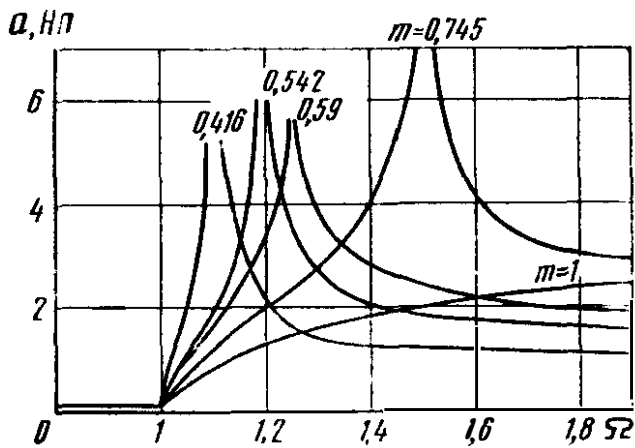


Рис. 7.13

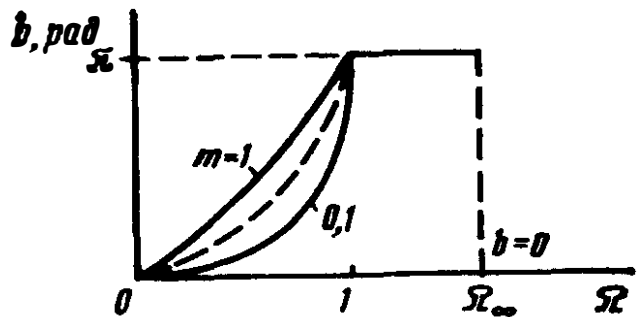


Рис. 7.14

Зависимости характеристических сопротивлений фильтра типов m от относительной частоты при различных значениях коэффициента m приведены на рис. 7.15. Из кривых видно, что при $m = 0,59 \div 0,61$ характеристические сопротивления меньше всего зависят от Ω в полосе пропускания. Это обстоятельство используют для согласования фильтров с нагрузками включением на входе и выходе многосвязных фильтров полувольев типа m с $m = 0,59$ или близким к нему значением.

В полосе непропускания на частоте ω_∞ сопротивление $Z_{Tm} \rightarrow \infty$, а $Z_{Пm} = 0$, так как $Z_{Tm}/R = R/Z_{Пm}$.

Из выражений (7.50), (7.53) и (7.54) следует, что при $m = 1$, $\Omega_\infty = \infty$ фильтр типа m преобразуется в фильтр типа k . Таким образом, фильтр типа k можно считать частным случаем фильтра типа m .

Переход от ФНЧ типа m к ФВЧ или полосовым фильтрам можно осуществить преобразованием частоты. Следует отметить, что при переходе от ФНЧ к ФВЧ заменой $\omega/\omega_{ср}$ на $\omega_{ср}/\omega$ в случае фильтра типа m в одноэлементном двухполюснике изменяется знак реактивного сопротивления. Второе сопротивление, образуемое двухэлементным двухполюсником, не меняется. Схемы ФВЧ и ПФ типа m , построенные в соответствии с выражениями (7.46)—(7.49), приведены на рис. 7.16, а и б.

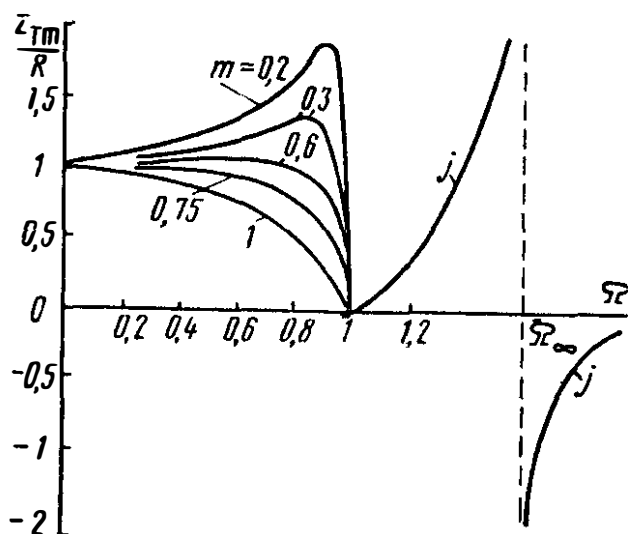


Рис. 7.15

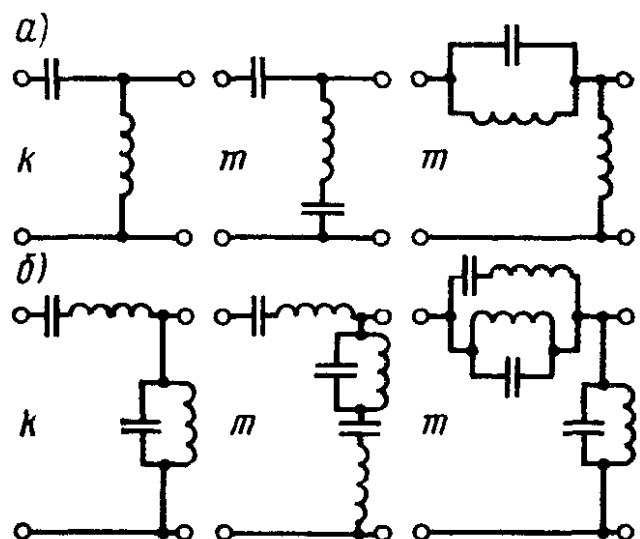


Рис. 7.16

7.8. ТРЕБОВАНИЯ К ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ФИЛЬТРАМ. ПРИМЕР РАСЧЕТА

Электрический фильтр должен пропускать без потерь электрические колебания с одними частотами (например, ФНЧ при $0 < \Omega < 1$) и оказывать сопротивление колебаниям с другими частотами. Для того чтобы фильтр на частотах полосы пропускания был приспособлен к отбору энергии от генератора и передаче ее нагрузке, он должен иметь активное и не зависящее от частоты в этом диапазоне характеристическое сопротивление.

На частотах полосы задерживания фильтр должен иметь постоянное затухание, соответствующее заданному ослаблению токов со всеми частотами полосы задерживания.

Поскольку электрические фильтры имеют зависящее от частоты характеристическое сопротивление и не дают постоянного затухания в полосе задерживания, при проектировании каждого фильтра следует устанавливать допустимые отклонения характеристик фильтра $Z_x(\Omega)$ в полосе пропускания (у ФНЧ при $0 < \Omega < 1$) и $a(\Omega)$ в полосе задерживания (у ФНЧ при $1 < \Omega < \infty$) от идеальных.

Характеристики фильтров по сопротивлению. Неравенство характеристического сопротивления фильтра Z_x сопротивлению нагрузки R_H на каких-либо частотах полосы пропускания приводит к появлению на этих частотах дополнительного затухания Δa , значение которого оценивается выражением (7.42):

$$\Delta a = a_{\text{раб}} = \ln \frac{1}{2} \left(\frac{R_H}{Z_x} + \frac{Z_x}{R_H} \right).$$

Эта величина равна нулю, если $R_H = Z_x$.

Из выражения (7.42) следует, что при проектировании фильтров необходимо добиваться возможного улучшения согласования его с нагрузкой. Последнее достигают двумя способами. Первым простейшим из них является расширение полосы пропускания фильтра по сравнению с полосой частот, которая должна быть пропущена фильтром с малым затуханием, и выбор оптимального сопротивления фильтра $Z_x(0)$ в соответствии с рис. 7.17, а (на примере фильтра ФНЧ, выполненного на схеме Т). Как видно из рисунка, сопротивление фильтра точно равно сопротивлению нагрузки R_H на некоторой средней частоте полосы пропускания $\Omega = k$. На краях полосы пропускания на частотах $\Omega = 0$ и $\Omega = k_1$ сопротивление фильтра в $Z_x(0)/R_H$ раз больше, или в $Z_x(0)/R_H$ раз меньше сопротивления нагрузки. Такой выбор $Z_x(0)$ при заданном R_H является оптимальным, поскольку обеспечивает наименьшее увеличение затухания при данном значении величины k_1 , называемой коэффициентом использования полосы пропускания. Чем точнее мы хотим согласовать фильтр с нагрузкой, тем меньшей следует выбирать величину k_1 .

Найдем связь между величинами $Z_x(0)/R_H$ и k_1 . Для фильтра типа к, выполненного по схеме Т,

$$Z_T(\Omega) = Z_x(\Omega) = Z_x(0) \sqrt{1 - \Omega^2}.$$

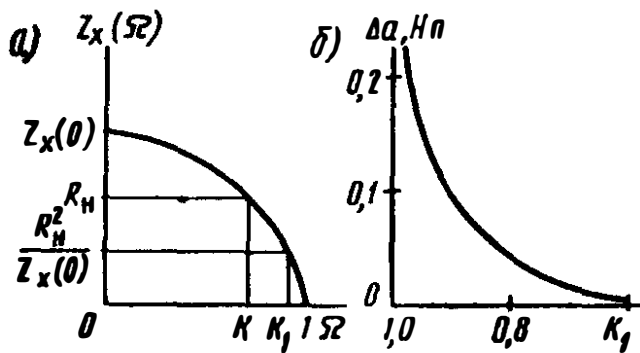


Рис. 7.17

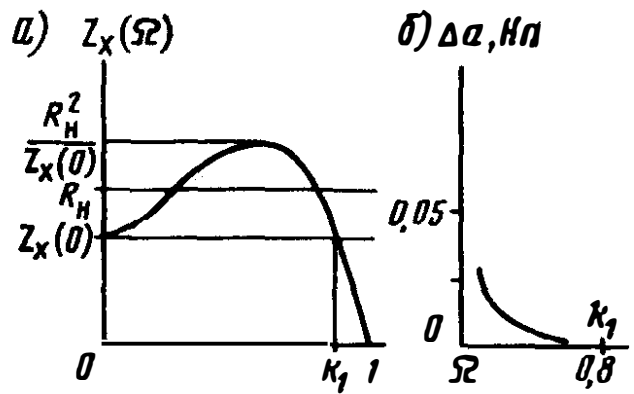


Рис. 7.18

При $\Omega = k_1$

$$Z_x(k_1) = Z_x(0) \sqrt{1 - k_1^2} = R_H^2 / Z_x(0).$$

Отсюда

$$Z_x(0) / R_H = 1 / \sqrt[4]{1 - k_1^2}. \quad (7.55)$$

Таким образом, для фильтра типа k при оптимальном выборе $Z_x(0)$ наибольшее рабочее затухание в полосе пропускания в соответствии с выражением (7.42)

$$\Delta a = \ln \frac{1}{2} \left(\frac{Z_x(0)}{R_H} + \frac{R_H}{Z_x(0)} \right) = \ln \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt[4]{1 - k_1^2}} + \sqrt[4]{1 - k_1^2} \right]. \quad (7.56)$$

Соответствующая выражению (7.56) зависимость Δa от k_1 приведена на рис. 7.17, б. Она позволяет по заданному значению Δa_{\max} найти необходимое значение k_1 . Как видно из этой зависимости, фильтры типа k дают хорошее согласование с нагрузкой и малое значение Δa только при весьма малом использовании полосы пропускания: $k_1 < 0,8$.

О фильтрах типа k и других, зависимость сопротивления от частоты которых подобна зависимости, приведенной на рис. 7.17, а, говорят, что они являются фильтрами первого класса по характеристическому сопротивлению.

Вторым более эффективным способом улучшения согласования фильтра с нагрузкой является построение фильтра с сопротивлением, как у фильтра типа m (рис. 7.18, а) (фильтры второго класса по характеристическому сопротивлению). Такой фильтр, как и фильтр типа k , можно рассчитывать на сопротивление $Z_x(0)$, равное R_H , или на оптимальное сопротивление, при котором можно получить равномерное отклонение $Z_x(\Omega)$ от R_H в полосе частот $0 < \Omega < k_1$.

Решение задачи определения оптимального значения $Z_x(0)$ в этом случае дает

$$\frac{Z_x(0)}{R_H} = \sqrt{\frac{2 \sqrt[4]{1 - k_1^2}}{1 + \sqrt[4]{1 - k_1^2}}}. \quad (7.57)$$

Как видно из выражения (7.57), фильтр второго класса по сопротивлению $Z_x(0)/R_H$ также можно представить в виде функции от k_1 . Это позволяет связать Δa с k_1 . Соответствующая зависимость для оптимального $Z_x(0)$ иллюстрируется рис. 7.18, б.

Характеристика фильтров по затуханию. Всякий фильтр, в том числе и фильтр типа k , на некоторых частотах может дать неограниченно большое затухание. Необходимо, однако, чтобы некоторое минимальное заданное затухание a_{min} поддерживалось постоянным на всех частотах полосы задерживания. Вследствие несогласованности Z_x и R_H в полосе задерживания в соответствии с формулой (7.43) $a_{раб}$ меньше собственного затухания a на 0,69 Нп. Это обстоятельство должно быть учтено при расчете фильтра. Требования к затуханию фильтра (как и при обеспечении характеристик фильтра по сопротивлению) выполняются ограничением полосы его пропускания и усложнением схемы.

На рис. 7.19, а на примере фильтра типа k показано, что затухание a_{min} обеспечивается фильтром на всех относительных угловых частотах, превышающих величину k_2 , называемую коэффициентом использования полосы задерживания. Более высокое затухание вносится тем же фильтром только при меньшем использовании полосы задерживания.

Применение комбинированных фильтров позволяет полнее использовать полосу задерживания или при том же использовании получить большее затухание (рис. 7.19, б). Приближением всплесков затухания к частоте среза увеличивается использование полосы задерживания, но уменьшается a_{min} и наоборот (см. рис. 7.13).

На практике приходится составлять фильтры, содержащие до двух, трех и более звеньев с разными значениями коэффициента m . Правильный выбор этих значений является одной из основных задач конструирования фильтра. Имеются аналитические методы расчета фильтров, основанные на использовании теории наилучших приближений и применяющиеся при проектировании фильтров многоканальной связи, в которой требования к фильтрам наиболее высоки. Однако наряду с методами аналитического синтеза фильтры рассчитывают и методом подбора.

Пример расчета фильтра методом подбора. Пусть требуется рассчитать фильтр для работы между генератором и приемником с сопротивлениями R_H по 600 Ом, который пропускал бы все токи частотами ниже 2400 Гц с затуханием не

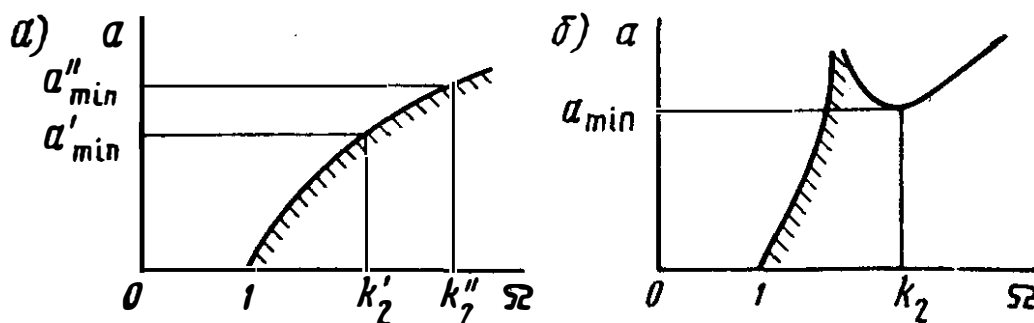


Рис. 7.19

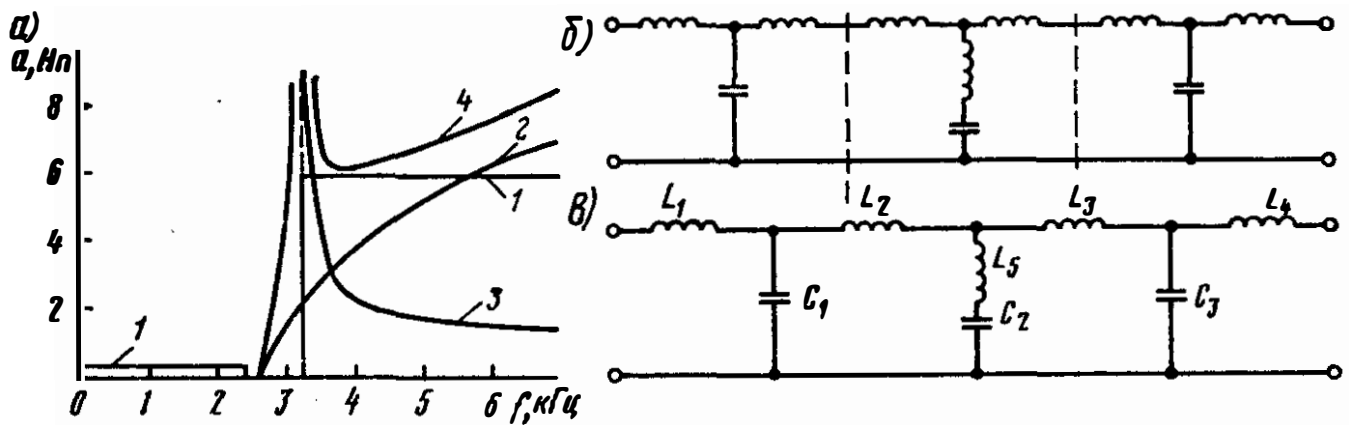


Рис. 7.20

более 0,15 Нп и оказывал бы токам с частотами свыше 3200 Гц затухание не менее 5,4 Нп. Фильтр будем рассчитывать по формулам, определяющим его характеристические параметры, учитывая влияние несогласованности фильтра с нагрузками. Последнее ведет к увеличению затухания фильтра в полосе пропускания, особо возрастающего вблизи частоты среза, и к уменьшению затухания в полосе задерживания до 0,69 Нп. Поэтому расчет следует вести по кривой затухания 1 (рис. 7.20, а) на $a_{\min} = 5,4 + 0,69 \approx 6,1$ Нп.

Не учитывая затухания, возникающего вследствие потерь в элементах фильтра, определим коэффициент использования полосы пропускания k_1 по кривой (см. рис. 7.17, б).

При $\Delta a = 0,15$ Нп, $k_1 = 0,94$

$$f_{\text{ср}} = 2400/0,94 = 2560 \text{ Гц.}$$

Соответствующее k_1 оптимальное сопротивление найдем по формуле (7.55):

$$Z_x(0) = \frac{R_H}{\sqrt{1-k_1^2}} = \frac{600}{\sqrt{1-(0,94)^2}} = 1050 \text{ Ом.}$$

Перейдем к обеспечению характеристики фильтра на частотах полосы задерживания. Поскольку для получения затухания в глубине задерживания необходимо включение в схему фильтра звена или полузвена типа к, рассчитаем элементы последнего по формулам (7.22):

$$L = \frac{R}{\pi f_{\text{ср}}} = \frac{Z_x(0)}{\pi f_{\text{ср}}} = \frac{1050}{3,14 \cdot 2560} = 0,131 \text{ Гн.}$$

$$C = \frac{1}{\pi f_{\text{ср}} R} = \frac{1}{\pi f_{\text{ср}} Z_x(0)} = \frac{1}{3,14 \cdot 2560 \cdot 1050} = 0,117 \cdot 10^{-6} \text{ Ф.}$$

По формуле $\text{ch} \frac{a}{2} = \Omega$ построим характеристику затухания звена типа к.

Задавая частоты, лежащие в полосе задерживания, и определяя x по $\text{ch} x$, получим:

f	2600	2800	3000	3200	3600	4400	6000
$\Omega = f/f_{\text{ср}}$	1,015	1,095	1,17	1,25	1,40	1,72	2,35
a	0,35	0,87	1,16	1,39	1,74	2,28	3,02

Сравнение затухания одного звена типа к с требуемым показывает, что в схему фильтра следует включить два звена; затухание этих звеньев характеризует кривая 2 (см. рис. 7.20, а).

Дальнейшее приближение кривой затухания фильтра к заданной можно получить, включив в схему фильтра звено типа м. Поскольку наибольшее приращение затухания должно быть на частоте $f = 3200$ Гц, примем эту частоту за f_{∞} .

Рассчитаем коэффициент m .

По кривой, приведенной на рис. 7.13, для $m = 0,59$ найдем затухание звена:

f	2600	2800	3000	3200	3600	4400	6000
$\Omega = f/f_{\text{ср}}$	1,015	1,095	1,17	1,25	1,40	1,72	2,35
a	0,6	1,7	2,7	—	2,7	2,0	1,6

(рис. 7.20, а, кривая 3).

Из кривой 4 (2 + 3) (см. рис. 7.20, а) видно, что наименьшее суммарное затухание будет на $f = 3500$ Гц: $a > 6,1$ Нп. Следовательно, заданные требования удовлетворены. Схема этого фильтра приведена на рис. 7.20, б.

Объединяя индуктивности звеньев типов k и m , получим схему (рис. 7.20, в), в которой в соответствии с параметрами звена типа m :

$$L_1 = L_4 = \frac{L}{2} = \frac{0,131}{2} \text{ Гн}; C_1 = C_3 = 0,117 \cdot 10^{-6} \text{ Ф};$$

$$L_2 = L_3 = \frac{L}{2} (1 + m) = 0,102 \text{ Гн}; L_5 = \frac{L}{2} \frac{1 - m^2}{m} = 0,059 \text{ Гн};$$

$$C_2 = \frac{C}{2} m = 0,0345 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}.$$

7.9. МОСТОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Условия пропускания и задерживания мостовых фильтров. В устройствах автоматики, телемеханики и связи находят применение мостовые реактивные фильтры, которые отличаются от цепочечных более разнообразными частотными характеристиками и позволяют добиваться существенного улучшения частотной характеристики затухания. Условия пропускания и задерживания мостовых фильтров отличаются от цепочечных. Если цепочечный фильтр не пропускает колебания благодаря обрыву или шунтированию цепи, то мостовой задерживает колебания при уравнивании моста.

Собственные параметры передачи симметричной мостовой, или, что то же, скрещенной, схемы (рис. 7.21, а) определяются следующим образом:

$$Z_M = \sqrt{Z_1 Z_2}; \quad \text{th} \frac{g}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}.$$

Так как $g = a + jb$, то

$$\text{th} \frac{g}{2} = \frac{\text{sh} a + j \sin b}{\text{ch} a + \cos b} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}. \quad (7.58)$$

Если Z_1 и Z_2 представляют собой реактивные сопротивления разных знаков, то из выражения (7.58)

$$\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} = \pm j \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}; \quad \frac{\text{sh} a}{\text{ch} a + \cos b} = 0; \quad a = 0;$$

$$\frac{\sin b}{1 + \cos b} = \text{tg} \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}.$$

Мостовая схема, составленная из реактивных сопротивлений разного знака, пропускает сигналы без затухания.

Если Z_1 и Z_2 — реактивные сопротивления одного знака, то из выражения (7.58)

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a + \cos b} = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}};$$

$$\frac{\sin b}{\operatorname{ch} a + \cos b} = 0.$$

Возможны два варианта решения полученной системы:

1. $b=0$; $\cos b=1$;

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a + 1} = \operatorname{th} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}.$$

Поскольку th не может быть больше единицы, данное решение возможно при $|x_1| < |x_2|$;

2. $b = \pm \pi$; $\cos b = -1$;

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a - 1} = \operatorname{cth} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}.$$

Так как cth больше единицы, то $|x_1| > |x_2|$.

Если $Z_1 = Z_2$; $\operatorname{th} \frac{a}{2} = \operatorname{cth} \frac{a}{2} = 1$, то $a \rightarrow \infty$, что соответствует полному равновесию плеч моста.

Для получения фильтрующих свойств Z_1 и Z_2 следует выбрать таким образом, чтобы на частотах полосы пропускания они были реактивными сопротивлениями разных знаков, а на частотах полосы задерживания — реактивными сопротивлениями одного знака.

Простейший мостовой фильтр нижних частот (рис. 7.21. б). Для этого фильтра

$$Z_1 = j\omega L_1; \quad Z_2 = \frac{jL_2}{\omega} (\omega^2 - \omega_{cp}^2).$$

На рис. 7.21. б, в и г соответственно даны распределения полюсов, и нулей функций сопротивлений Z_1 и Z_2 , зависимости их от частоты и характеристики фильтра. При равенстве сопротивлений Z_1 и Z_2 мост уравновешен и затухание фильтра $a = \infty$. По сопротивлению этот фильтр подобен фильтру типа к, затухание же его соответствует затуханию звена типа м. При $m = 1$ затухание соответствует таковому у фильтра типа к.

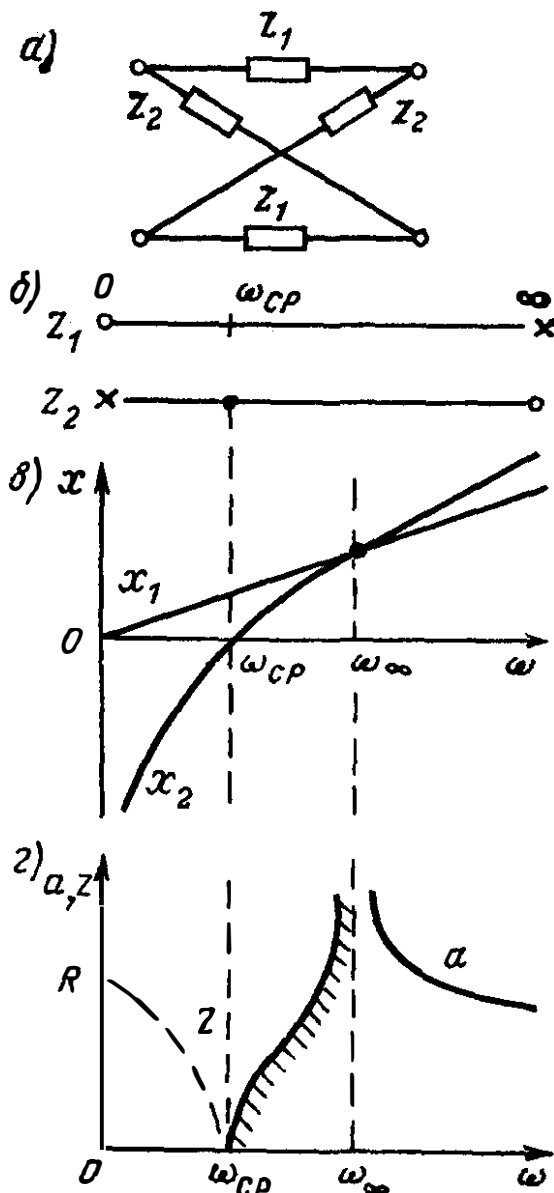


Рис. 7.21

Характеристики фильтра по сопротивлению и затуханию определяются выражениями:

$$Z_M = \sqrt{Z_1 Z_2} = \sqrt{L_1 L_2 (\omega_{cp}^2 - \omega^2)} = R \sqrt{1 - \Omega^2},$$

где $R = \sqrt{L_1/C_2}$; $\Omega = \omega/\omega_{cp}$,

[сравним с выражением (7.18)]:

$$\operatorname{th} \frac{g}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} = \sqrt{\frac{j\omega L_1}{\frac{jL_2}{\omega} (\omega^2 - \omega_{cp}^2)}} = \frac{m\Omega}{\sqrt{\Omega^2 - 1}},$$

где $m = \sqrt{L_1/L_2}$.

Поскольку затуханию $a = \infty$ соответствует значение $\operatorname{th} \frac{g}{2} = 1$, постольку относительная частота Ω_∞ удовлетворяет условию

$$\frac{m\Omega_\infty}{\sqrt{\Omega_\infty^2 - 1}} = 1 \quad \text{или} \quad m^2 = 1 - \frac{1}{\Omega_\infty^2}.$$

Из этого следует, что значение Ω_∞ определяется соотношением между значениями L_1 и L_2 , а входящий в выражение для $\operatorname{th} \frac{g}{2}$ коэффициент m имеет то же значение, что и для цепочечных фильтров типа m .

Вид характеристик мостового ФНЧ указывает на эквивалентность его однозвенному фильтру типа m (рис. 7.22, *a* и *б*). Схемы, приведенные на этих рисунках, по условиям передачи полностью эквивалентны друг другу на всех частотах, но физическая сущность изменения условий передачи в них различна. Например, всплеск по затуханию в мостовой схеме получается вследствие равенства сопротивлений Z_1 и Z_2 и уравновешивания моста, а в цепочечной схеме T — в результате обращения Z_2 в нуль и закорачивания тем самым тракта передачи. Таким образом, мостовые фильтры ФНЧ имеют цепочечный эквивалент в виде производных звеньев типа m , которые при $m = 1$ преобразуются в звенья типа k .

Сравнение схем мостового ФНЧ и последовательно-производного звена типа m ФНЧ показывает, что они имеют одинаковые свойства, но содержат различное число сопротивлений: в схему моста входят четыре сопротивления, а в схему T — только три. Это обстоятельство заставляет при изготовлении фильтров отказаться от схемы моста со сложными реактивными сопротивлениями в каждом плече и выполнять фильтры по другим эквивалентным схемам (рис. 7.22, *в* и *г*). Любую из схем (см. рис. 7.22) можно рассчитать как по формулам для звеньев типа m , так и по формулам, определяющим параметры передачи моста.

Выполнение фильтра по мостовой схеме требует более точного по сравнению с фильтром, построенным по цепочечной схеме, подбора индуктивностей и емкостей. Вследствие этого иногда отдают предпочтение цепочечным схемам.

Простейший фильтр верхних частот (рис. 7.23, *a*). Для этого фильтра $Z_1 = \frac{1}{j\omega C_1}$; $Z_2 = \frac{jL_2}{\omega} (\omega^2 - \omega_{cp}^2)$. На рис. 7.23, *б* и *в* приведены схемы

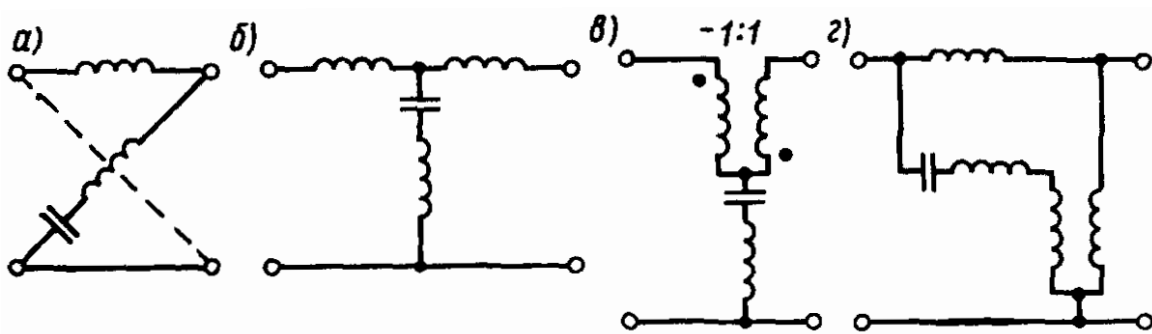


Рис. 7.22

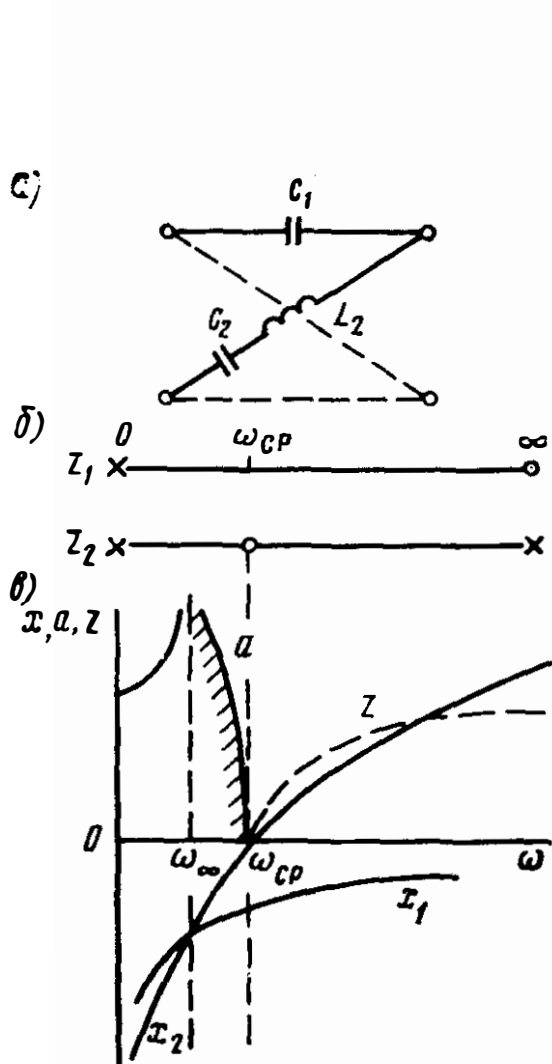


Рис. 7.23

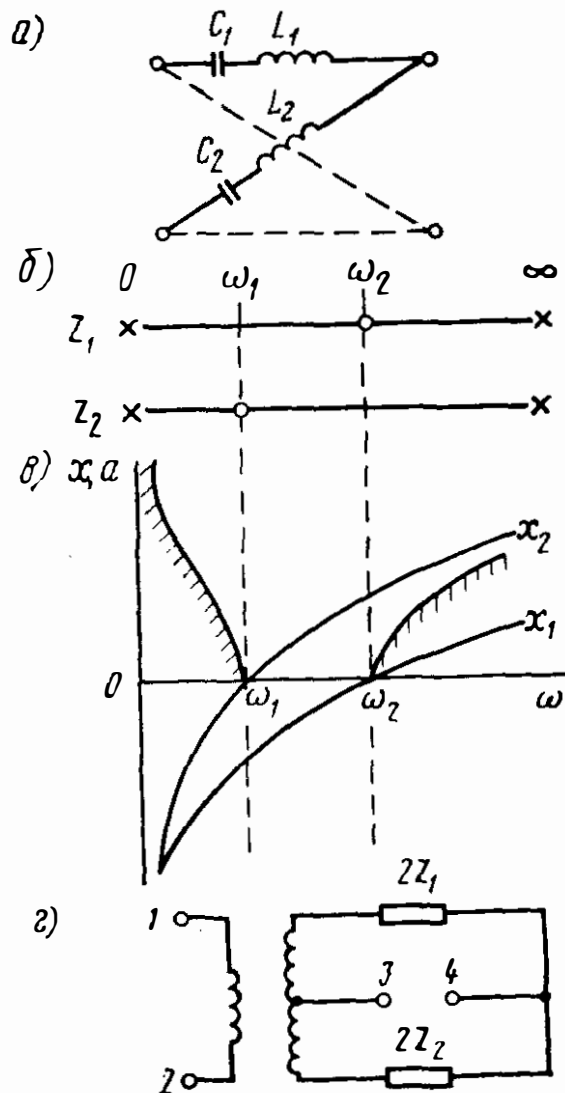


Рис. 7.24

расположения полюсов и нулей соответственно для Z_1 и Z_2 , зависимости их от частоты и характеристики фильтра.

Простейший мостовой ПФ. Схема фильтра и его характеристики приведены на рис. 7.24, а—в. В отличие от простейших мостовых ФНЧ и ФВЧ простейший мостовой ПФ эквивалентен ПФ типа к. Его затухание не имеет всплесков. На практике мостовые полосовые фильтры строят по схеме, приведенной на рис. 7.24, г.

Построение мостовых фильтров с более совершенными характеристиками. Затухания ФНЧ, построенных по схемам (см. рис. 7.22), имеют один всплеск и затем уменьшаются. Для получения более постоян-

ного затухания в какой-либо полосе частот в случае выполнения фильтра по цепочечной схеме следует последовательно первому звену включить второе с такой же частотой среза, но имеющего всплеск затухания на другой частоте. При выполнении фильтра по мостовым схемам тот же эффект увеличения затухания в полосе задерживания может быть достигнут усложнением сопротивлений Z_1 и Z_2 . Это является одной из особенностей мостовых схем.

Рассмотрим схему (рис. 7.25, а). Она является схемой ФНЧ, но с более сложными образующими его сопротивлениями. В данном случае

$$Z_1 = \frac{jL_1}{\omega} (\omega^2 - \omega_{\Pi}^2); \quad Z_2 = j\omega L_2 \frac{\omega^2 - \omega_{\text{ср}}^2}{\omega^2 - \omega_{\Pi}^2},$$

где ω_{Π} — резонансная угловая частота в полосе пропускания.

Распределение нулей и полюсов функции сопротивлений, а также зависимости $Z_1(\omega)$, $Z_2(\omega)$, $a(\omega)$, $Z_M(\omega)$ приведены на рис. 7.25, б, в и г.

Характеристики фильтра определяются выражениями:

$$Z_M = \sqrt{Z_1 Z_2} = \sqrt{-L_1 L_2 (\omega^2 - \omega_{\text{ср}}^2)} = R \sqrt{1 - \Omega^2}; \quad R = \sqrt{L_1 / C_2};$$

$$\text{th} \frac{g}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2} \frac{(\omega^2 - \omega_{\Pi}^2)^2}{(\omega^2 - \omega_{\text{ср}}^2)^2}} = \frac{H_1 (\Omega^2 - \alpha^2)}{\Omega \sqrt{\Omega^2 - 1}}; \quad (7.59)$$

$$H_1 = \omega_{\text{ср}} \sqrt{L_1 / L_2}; \quad \alpha = \omega_{\Pi} / \omega_{\text{ср}}.$$

Характеристика сопротивления этого фильтра по-прежнему подобна характеристике фильтра типа k , характеристика же его затухания соответствует двухзвенному фильтру типа m .

Таким образом, усложнение частотных зависимостей сопротивлений Z_1 и Z_2 введением в них резонанса на угловой частоте ω_{Π} , лежащей в полосе пропускания, эквивалентно добавлению в схему цепочечного фильтра звена типа m с другим значением коэффициента m , определяемым величиной a .

Для выявления возможности изменения свойств мостового фильтра по сопротивлению рассмотрим схему (рис. 7.26, а). Для нее

$$Z_1 = \frac{k_1}{j\omega} \frac{\omega^2 - \omega_{\Pi}^2}{\omega^2 - \omega_3^2}; \quad Z_2 = \frac{k_2}{j} \frac{\omega^2 - \omega_{\text{ср}}^2}{(\omega^2 - \omega_{\Pi}^2)(\omega^2 - \omega_3^2)}.$$

Здесь зависимости сопротивлений Z_1 и Z_2 от частоты содержат резонансные частоты ω_{Π} и ω_3 , где ω_3 — частота, лежащая в полосе задерживания (рис. 7.26, б). Зависимости $Z_1(\omega)$, $Z_2(\omega)$, $a(\omega)$, $Z_M(\omega)$ для этой схемы приведены на рис. 7.26, в и г.

Характеристики фильтра определяются выражениями:

$$Z_M = \sqrt{Z_1 Z_2} = \sqrt{-k_1 k_2 \frac{\omega^2 - \omega_{\text{ср}}^2}{(\omega^2 - \omega_3^2)^3}} = \frac{\sqrt{\Omega^2 - 1}}{H (\Omega^2 - \beta^2)}, \quad (7.60)$$

где $H = \omega_{\text{ср}} / (j \sqrt{k_1 k_2})$, $\beta = \omega_3 / \omega_{\text{ср}}$,

Сравним с выражением (7.54), определяющим Z_{T_m} ;

$$\operatorname{th} \frac{g}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} = \sqrt{\frac{k_1}{k_2} \frac{(\omega^2 - \omega_{\Pi}^2)^2}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_{\text{CP}}^2)}} = \frac{H_1 (\Omega^2 - \alpha^2)}{\Omega \sqrt{\Omega^2 - 1}},$$

где $H_1 = \omega_{\text{CP}} \sqrt{k_1/k_2}$; $\alpha = \omega_{\Pi}/\omega_{\text{CP}}$.

ФНЧ (см. рис. 7.26) имеет такую же характеристику затухания, что и фильтр (см. рис. 7.25). Усложнение сопротивлений Z_1 и Z_2 введением резонансов на угловой частоте ω_3 изменило характеристику этого фильтра по сопротивлению, превратив его в эквивалентное Z_{T_m} . В этом проявляется вторая особенность мостовых фильтров, заключающаяся в возможности изменения свойств фильтра по сопротив-

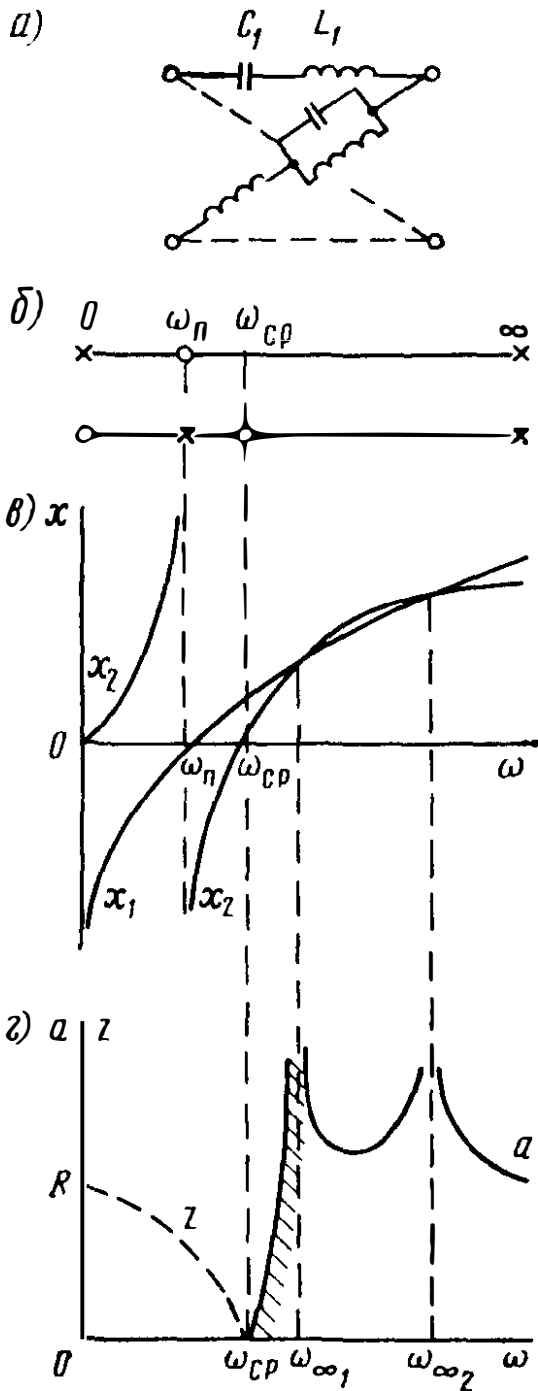


Рис 7.25

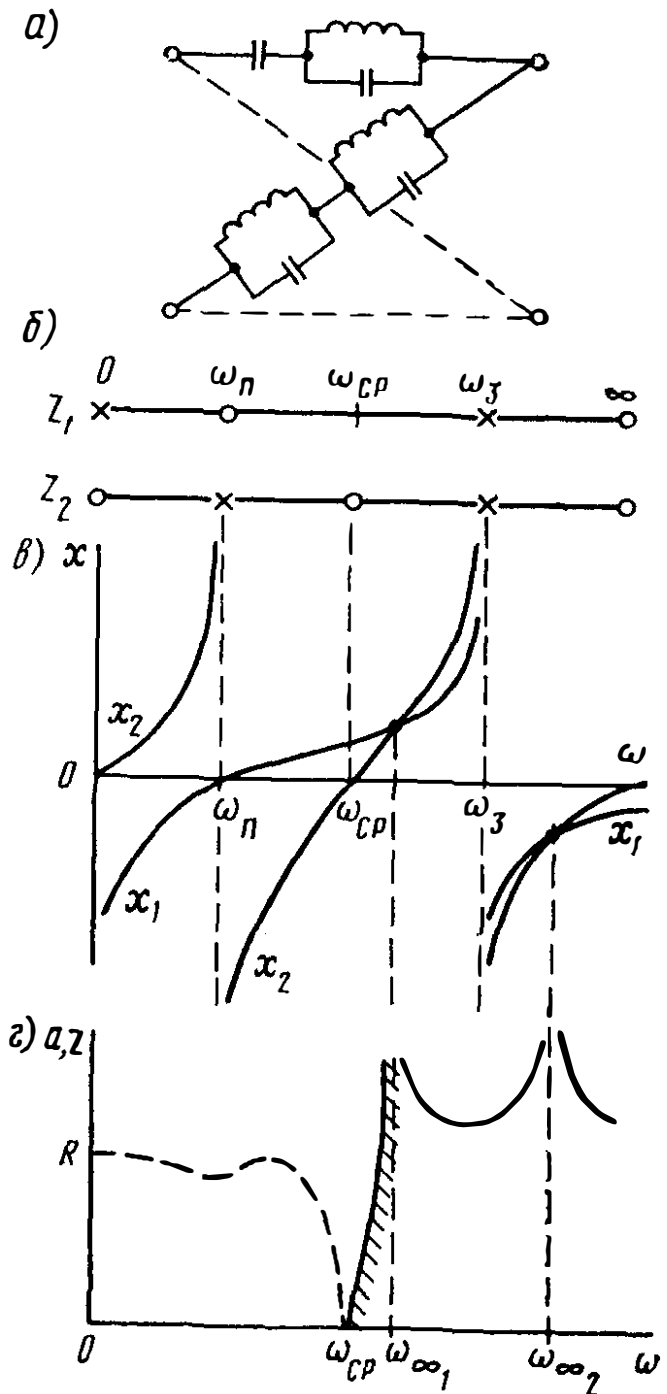


Рис. 7.26

лению независимо от его свойств по затуханию, и наоборот. Для фильтров, выполненных по цепочечным схемам, это невозможно.

Как следует из формул (7.59) и (7.60), свойства фильтра по затуханию определяются резонансными угловыми частотами ω_n для Z_1 и Z_2 , лежащими в полосе пропускания и называемыми контрольными частотами полосы пропускания, а свойства фильтра по сопротивлению — контрольными частотами ω_3 полосы задерживания.

Для получения необходимого затухания в полосе задерживания приходится строить многозвенные цепочечные схемы или мостовые схемы с многоэлементными сопротивлениями, для которых функция $\text{th} \frac{g}{2}$ содержит несколько контрольных частот.

Все сказанное о мостовых ФНЧ при преобразовании частоты переносится на ФВЧ и ПФ. Например, для получения из схемы ФНЧ (см. рис. 7.21, б) равноценного по характеристикам ФВЧ следует во всех характеристических выражениях $\omega/\omega_{ср}$ заменить на $\omega_{ср}/\omega$, т. е. в качестве Z_1 вместо катушки применить конденсатор. Схема Z_2 при указанном преобразовании частот не меняется. ПФ можно получить, заменив в схеме (см. рис. 7.21, б) ω на $(\omega^2 - \omega_0^2)/\omega$, т. е. включив в схему в качестве Z_1 вместо катушки колебательный контур и соответственно усложнив Z_2 . Совокупность схем полосовых мостовых фильтров не исчерпывается схемами, которые можно получить такими преобразованиями из схем ФНЧ, однако установленные выше общие закономерности сохраняют силу для всех мостовых фильтров.

Пьезоэлектрические и механические фильтры. Многие кристаллы, такие как кварц, турмалин и др., обладают пьезоэлектрическим эффектом. Последний заключается в появлении на поверхности определенным образом вырезанной из кристалла пластины электрических зарядов одного знака при механическом ее сжатии и противоположного при растяжении. Пластина при заряде сжимается или расширяется в зависимости от знаков заряда.

Кварцевая пластина, помещенная между плоскими электродами (обкладками), к которым подведено переменное напряжение, совершает колебательные движения и ведет себя как электрическая колебательная система. Благодаря большой механической прочности и упругости кварца полученные таким образом колебательные системы ока-

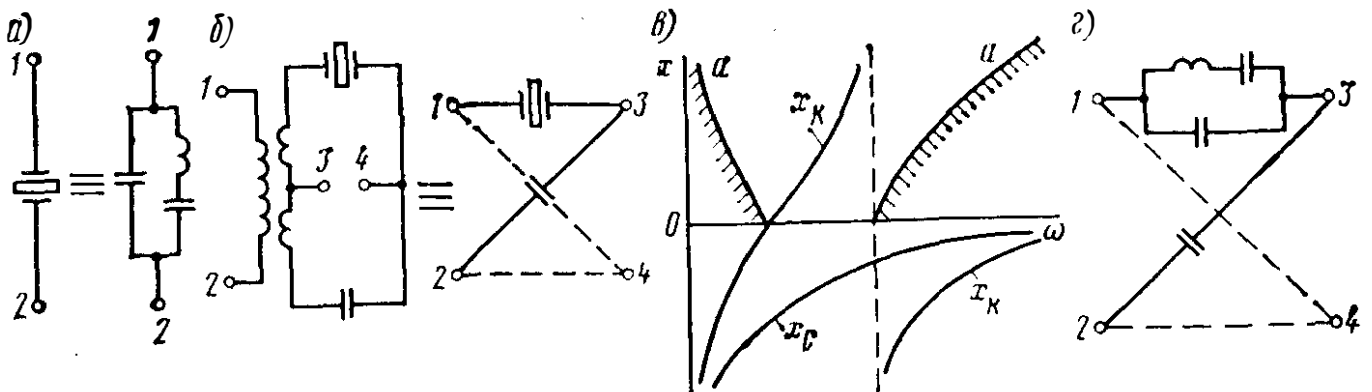


Рис. 7.27

зываются надежными и высокодобротными.

На рис. 7.27, а приведены условное изображение кварцевой пластины с обкладками и ее эквивалентная схема. При подключении к зажимам 1-2 переменного напряжения кварц ведет себя как высокодобротный трехэлементный двухполюсник LC с двумя резонансными частотами.

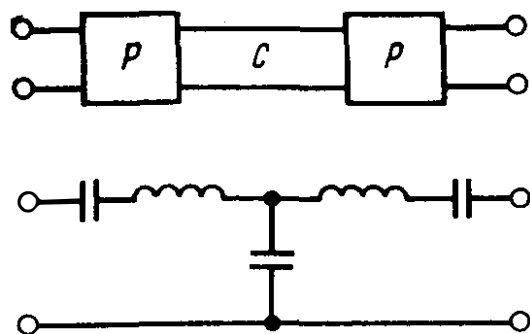


Рис. 7.28

Это свойство кварца привело к широкому использованию его для стабилизации частоты автоколебаний и при построении частотных электрических фильтров. Наибольшее распространение получили полосовые кварцевые фильтры, широко применяемые в аппаратуре связи и телемеханики. Пример схемы такого фильтра и его характеристика затухания приведены на рис. 7.27, б и в. Расчет фильтра по эквивалентной схеме кварцевого резонатора не отличается от расчета мостового фильтра LC (рис. 7.27, г).

В последнее время в качестве резонаторов стали применять механические системы. Соответствующие фильтры получили название м е х а н и ч е с к и х. Такие механические системы изготовляют в виде пластин и стержней, в которых возбуждаются механические колебания. Особо удобным оказалось использование металлических (из сплавов инварной группы) стержней, в которых возбуждаются крутильные колебания. Распространение крутильных колебаний в стержнях круглого сечения подчинено тем же законам, что и распространение электрических колебаний в линиях без потерь.

В качестве основных конструктивных элементов механических фильтров используют стержни двух разных диаметров, одни из которых представляют собой резонаторы, а другие — связки. Фильтр составляют из цепочки чередующихся резонаторов и связок с электромеханическими преобразователями на входе и выходе.

Пример построения звена такого фильтра и его эквивалентная схема приведены на рис. 7.28.

7.10. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ФИЛЬТРУЮЩИХ И КОРРЕКТИРУЮЩИХ ЦЕПЕЙ НА ОСНОВЕ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Теория выравнивающих контуров и электрических фильтров представляет собой раздел ТЛЭЦ, рассматривающий задачу построения цепи по заданным частотным характеристикам. Свойства цепи можно отображать также временными характеристиками. Поэтому всякую цепь, например электрический фильтр, можно строить на основе заданной временной характеристики.

Пусть требуется построить электрическую цепь, в которой при воздействии на ее вход единичным скачком или импульсом напряжения возникает ток, изменяющийся во времени по закону $i = f(t)$. Здесь $f(t)$ — произвольная функция времени, заданная уравнением или

графиком. Она может быть характеристикой фильтра, выравнителя или другого устройства.

При построении цепи, ток в которой должен изменяться точно по заданному закону $i = f(t)$, в общем случае может появиться необходимость сделать эту цепь бесконечно сложной. Поэтому при проектировании электрической цепи с заданной временной характеристикой следует прежде всего определить допустимую погрешность в воспроизведении функции $f(t)$.

Точность воспроизведения заданной функции $f(t)$ в линейных цепях можно выразить различными способами в зависимости от способа представления самой функции. Например, если функция представлена рядом Фурье в виде суммы синусоидальных составляющих, точность воспроизведения ее вполне определяется числом и точностью воспроизведения отдельных гармонических составляющих. Если функция имеет вид ступенчатой линии, полученной суммированием отдельных прямоугольников, то точность воспроизведения функции определяется числом и точностью воспроизведения ординат. Оба способа представления функции вполне равноценны и могут быть использованы для решения поставленной задачи.

Рассмотрим построение цепи, переходная проводимость которой получается суммированием гармонических составляющих (рис. 7.29). Если все конденсаторы в цепи, представляющей собой сложный реактивный двухполюсник с сопротивлением $Z(\omega)$, заряжены до напряжения U и затем разряжаются через индуктивности на сопротивление R , то полный ток разряда $i(t)$ равен сумме токов отдельных ветвей. Ток каждой ветви изменяется по закону затухающих колебаний с частотой, равной частоте резонанса ветви.

При малых потерях и незначительном затухании колебаний ток в каждом резонансном контуре

$$I_K = \frac{d\dot{q}}{dt} = \frac{d}{dt} C_K \dot{U} = \omega_0 C_K \dot{U} = \frac{C_K \dot{U}}{\sqrt{L_K C_K}}$$

или

$$I_K = \dot{U} \sqrt{C_K/L_K} = U/(\omega_0 L_K).$$

Выбором сопротивлений отдельных ветвей $Z_K = \sqrt{L_K/C_K}$ можно изменять токи с отдельными частотами в соответствии со спектральным составом функции $f(t)$. Сумма всех синусоидальных токов приближенно дает требуемую функцию. Электрические колебания с теми же частотами и амплитудами возникают в ветвях цепи при подключении

ее к постоянному напряжению и без предварительного заряда конденсатора.

Таким образом, цепь имеет необходимую переходную проводимость при единичном напряжении:

$$A(t) = i(t) = \sum_{k=1}^N I_K \sin \omega_{0k} t. \quad (7.61)$$

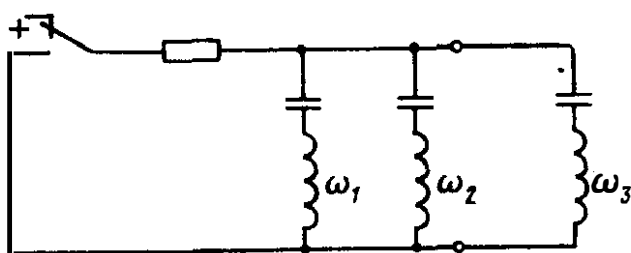


Рис. 7.29

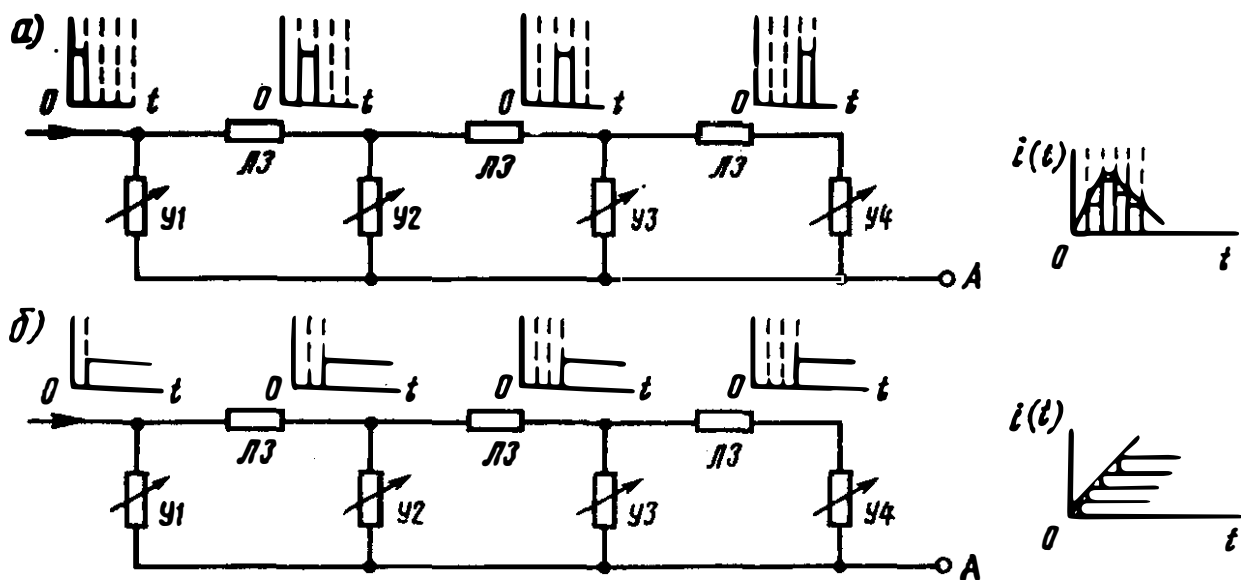


Рис. 7.30

Точность воспроизведения функции $f(t)$ зависит от числа слагаемых в разложении (7.61), т. е. от числа контуров в формирующей цепи. Очевидно, что в качестве формирующих цепей можно использовать также реактивные двухполюсники других схем.

Теперь обратимся к построению цепи, переходная проводимость которой получается способом суммирования ординат (рис. 7.30, а). На этом рисунке ЛЗ — линии задержки с временем задержки, равным длительности входного импульса τ , У1—У4 — устройства, изменяющие значение напряжения импульса.

Если значения напряжения импульса на выходе каждого из устройств У1—У4 установить равным $f(k\tau)$, то полный ток, появляющийся на выходе всей системы в точке А, будет как раз представлять собой приближенно функцию $f(t)$. Чем больше число линий задержки и чем меньше длительность импульса, подаваемого на вход формирующей цепи, тем точнее будет воспроизведена функция $f(t)$.

Точно так же можно строить функции переходной проводимости при единичном напряжении (рис. 7.30, б).

7.11. ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ

Расчет по рабочему параметру передачи. Временные характеристики фильтров широко используют при исследовании условий передачи импульсных сигналов и вполне определяются их частотными или операторными характеристиками. Для простейших фильтров (рис. 7.31, а и б) временные характеристики определяют отысканием L- или F-преобразования соответствующих функций передачи, что является несложной задачей. Однако трудности быстро возрастают с усложнением схемы.

Рассмотрим для примера схему (рис. 7.31, в). Это звено ФНЧ типа m , нагруженное на постоянные активные сопротивления R .

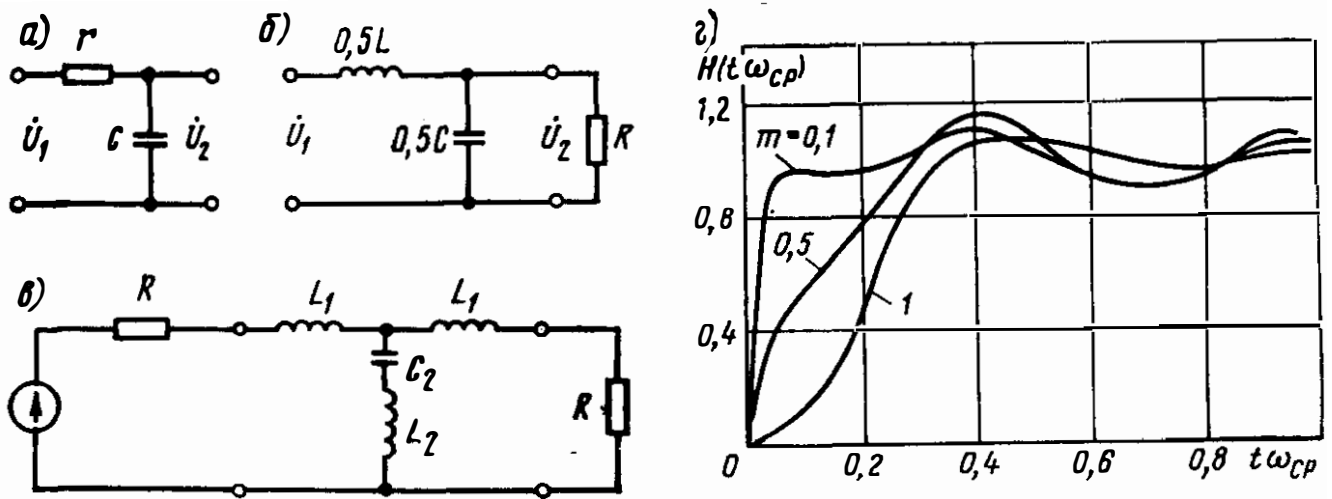


Рис. 7.31

Рабочий коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению

$$k_{pU} = \frac{\dot{E}}{2\dot{U}_2} = \frac{Z_{\text{прив}}}{2R};$$

соответствующая функция передачи

$$F_{pU} = \frac{1}{k_{pU}} = \frac{2\dot{U}_2}{\dot{E}} = \frac{2R}{Z_{\text{прив}}},$$

где в соответствии с выражением (2.118)

$$Z_{\text{прив}} = \frac{(Z_{11} + R)(R + Z_{22}) - Z_{12}Z_{21}}{Z_{21}}.$$

Имея в виду, что в рассматриваемом случае

$$Z_{11} = Z_{22}; \quad Z_{12} = Z_{21}; \quad Z_{11} = j\omega L_1 + Z_{12}; \quad Z_{12} = j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2},$$

найдем:

$$Z_{\text{прив}} = (R + j\omega L_1) \left[2 + \frac{R + j\omega L_1}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} \right];$$

$$F_{pU} = \frac{2R}{Z_{\text{прив}}} = \frac{2}{\left(1 + \frac{j\omega L_1}{R}\right) \left[2 + \frac{R \left(1 + \frac{j\omega L_1}{R}\right)}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} \right]}.$$

Сопоставляя схемы, приведенные на рис. 7.31, в и 7.11, б, заметим, что

$$L_1 = \frac{mL}{2}; \quad C_2 = mC; \quad L_2 = L \frac{1-m^2}{4m}; \quad m^2 = \frac{L_1}{L_1 + 2L_2};$$

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{2}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{2m^2}{L_1 C_1}} = \sqrt{\frac{2}{C_2 (L_1 + 2L_2)}}; \quad Z_x(0) = \sqrt{L/C} = \sqrt{2L_1/C_2}.$$

Введем $\tau = \frac{\sqrt{L/C}}{\omega_{\text{ср}} R}$ и $v = \frac{Z_x(0)}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$, а также нормированную частоту $\eta = \tau \omega = v \frac{\omega}{\omega_{\text{ср}}}$.

Тогда

$$\frac{\omega L_1}{R} = m\eta, \quad \frac{2L_1}{C_2 R^2} = v^2.$$

Имея в виду последние соотношения, представим F_{pU} в виде

$$F(\eta) = \frac{v^2 - \eta^2 (1 - m^2)}{(1 + jm\eta) [v^2 - \eta^2 (1 - m^2) + jm\eta (1 + jm\eta)]}.$$

Вводя $p = j\eta$, получим:

$$F(p) = \frac{v^2 + p^2 (1 - m^2)}{(1 + mp) (v^2 + mp + p^2)}. \quad (7.62)$$

Выражение (7.62) есть нормированная рабочая функция передачи фильтра. Найдем корни многочлена знаменателя этого выражения и представим его в виде суммы простых дробей.

Знаменатель выражения (7.62) имеет нули при

$$p_1 = -\frac{1}{m}; \quad p_{2,3} = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - v^2}.$$

Рабочую функцию передачи фильтра теперь можно представить в виде

$$F(p) = \frac{A}{p - p_1} + \frac{B}{p - p_2} + \frac{C}{p - p_3}.$$

Если на вход фильтра воздействовать единичным напряжением $1(t)$, изображение которого по Лапласу $L[1(t)] \doteq U(p) = 1/p$, то выходное напряжение численно будет равно переходной проводимости при единичном напряжении: $H(t) = L^{-1}[\frac{1}{p} F(p)]$.

На рис. 7.31, г приведены зависимости нормированных значений функции $H(t\omega_{\text{ср}})$ для различных значений коэффициента m . Уменьшение значения m соответствует снижению индуктивности в схеме (см. рис. 7.31, в) и приводит к ускорению нарастания тока в сопротивлении R .

Для фильтра верхних частот (рис. 7.32, а) аналогичными рассуждениями получаем:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{2m^2}{1 - m^2}; \quad pC_1 R = P; \quad \frac{Z_x(0)}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2L_2}{C_1}} = v;$$

$$F(P) = \frac{P}{v^2 + P} \frac{v^2 (1 - m^2) + m^2 P^2}{v^2 + m^2 P + m^2 P^2}. \quad (7.63)$$

Кривые, характеризующие соответствующую выражению (7.63) переходную проводимость $H(t) = L^{-1}[\frac{1}{p} F(p)]$, приведены на рис. 7.32, б.

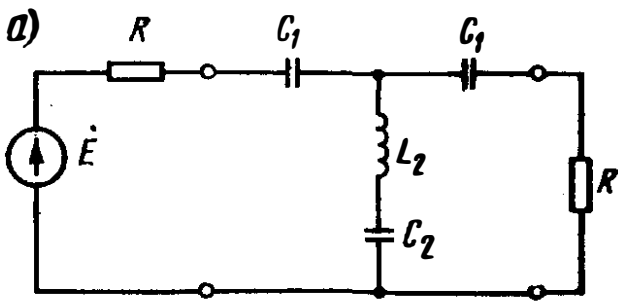
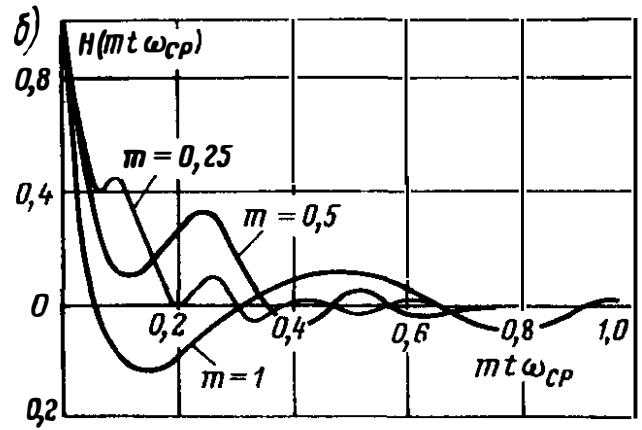


Рис. 7.32



Рассмотренные решения являются точными, вполне отражающими свойства исходных схем.

Расчет по характеристическим параметрам передачи. Если тот же способ решения — определение $F_{\text{раб}}(p)$ и $H(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{p} F(p) \right]$ — применить для многосвязных фильтров, то решение будет затруднено громоздкостью выражения для $F(p)$. Поэтому при определении временных характеристик многосвязных фильтров выгоднее предполагать согласованность нагрузки и пользоваться параметрами передачи g и Z_x . Для примера рассмотрим схему ФНЧ (рис. 7.33, а). Фильтр состоит из трех звеньев и предполагается нагруженным согласованно.

Для ФНЧ на основании выражения (7.18)

$$Z_x = Z_T = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 + \frac{p^2}{\omega_{\text{ср}}^2}},$$

где $\omega_{\text{ср}}$ — угловая частота среза.

Изображение для тока на входе фильтра при действии единичного напряжения

$$i_1(t) = \frac{\dot{U}(p)}{Z_x(p)} = \frac{\dot{U}(p)}{\sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 + \frac{p^2}{\omega_{\text{ср}}^2}}} = \frac{\omega_{\text{ср}}}{p \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{p^2 + \omega_{\text{ср}}^2}}.$$

По таблице операционных соотношений (см. табл. 1.1) находим:

$$1/\sqrt{p^2 + a^2} \doteq J_0(at),$$

где J_0 — функция Бесселя.

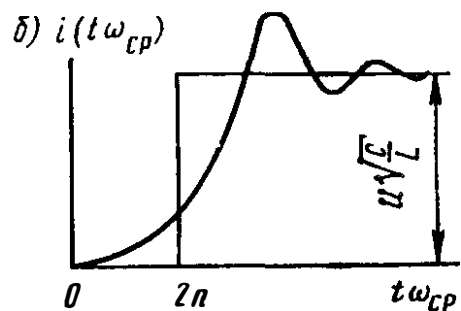
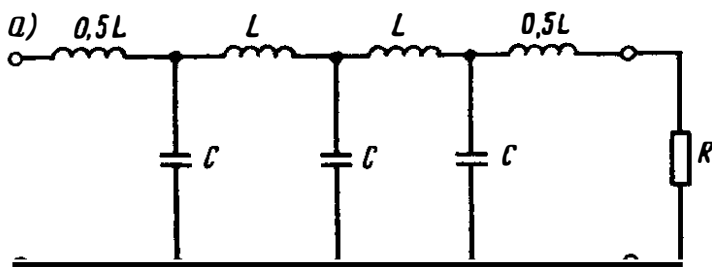


Рис. 7.33

Множитель $1/\rho$ в изображении соответствует интегрированию по t :

$$i_1(t) = \sqrt{C/L} \int_0^{\omega_{\text{ср}} t} J_0(\omega_{\text{ср}} t) d(\omega_{\text{ср}} t).$$

Изображение тока на выходе фильтра

$$i_2(t) \doteq \frac{\omega_{\text{ср}}}{\rho \sqrt{L/C} \sqrt{\rho^2 + \omega_{\text{ср}}^2}} e^{-ng},$$

где n — число звеньев фильтра;

$$\begin{aligned} e^{-g} &= \text{ch } g - \text{sh } g = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} - \sqrt{\left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right)^2 - 1} = \\ &= 1 + 2 \frac{\rho^2}{\omega_{\text{ср}}^2} - 2 \frac{\rho}{\omega_{\text{ср}}} \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{\omega_{\text{ср}}^2}}. \end{aligned}$$

Следовательно, e^{-g} можно представить так:

$$e^{-g} = \left[\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{\omega_{\text{ср}}^2}} - \frac{\rho}{\omega_{\text{ср}}} \right]^2; \quad e^{-ng} = \left[\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{\omega_{\text{ср}}^2}} - \frac{\rho}{\omega_{\text{ср}}} \right]^{2n}.$$

Тогда изображение тока на выходе фильтра

$$i_2(t) \doteq \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{[\sqrt{\rho^2 + \omega_{\text{ср}}^2} - \rho]^{2n}}{\rho \sqrt{\rho^2 + \omega_{\text{ср}}^2}}.$$

По таблице операционных соотношений (см. табл. 1.1) найдем:

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} \left(\frac{\sqrt{\rho^2 + a^2} - \rho}{a} \right)^n \doteq J_n(at); \quad n > 1.$$

Отсюда

$$i_2(t) = \sqrt{C/L} \int_0^{\omega_{\text{ср}} t} J_{2n}(\omega_{\text{ср}} t) d(\omega_{\text{ср}} t).$$

Характер изменения тока на выходе ФНЧ тот же, что и тока на входе (рис. 7.33, б), однако с увеличением числа звеньев в фильтре повышается порядок функции $J_n(\omega_{\text{ср}} t)$. При этом удлиняется промежуток времени до начала значительного роста тока и уменьшается частота его колебаний.

При $x < n$ функция Бесселя $J_n(x)$ весьма мала. Ее заметный рост начинается только при $x > n$. Это соответствует используемому при построении линий задержки свойству ФНЧ. Время, после которого начинается заметный рост тока на выходе, возрастает с увеличением числа звеньев.

Однако неправильно было бы считать, что ток на выходе фильтра имеет место только при $t > 2n/\omega_{\text{ср}}$. Так как фильтр составлен из сосредоточенных сопротивлений, то ток на его выходе появляется одно-

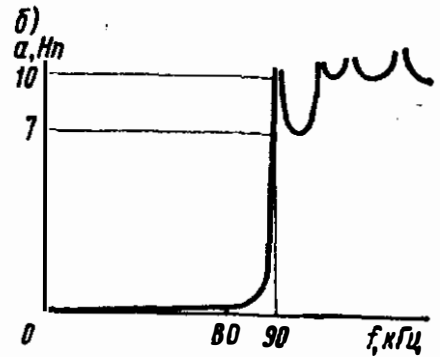
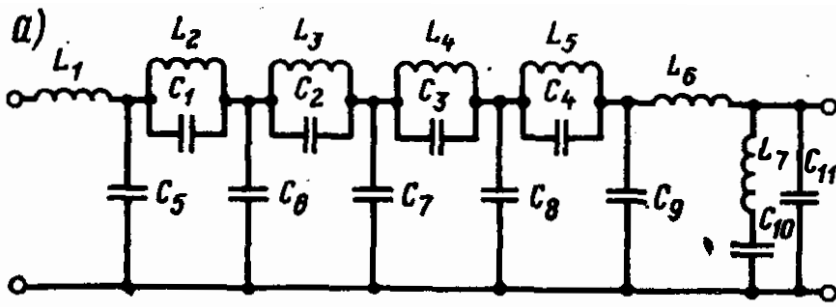


Рис. 7.34

временно с током на входе, но нарастание его во времени идет сначала очень медленно и становится практически заметным только при $t > > 2n/\omega_{\text{ср}}$.

Рассмотренное решение основано на известной идеализации — предположении согласованности нагрузки, а также идентичности всех звеньев фильтра. Сложность решения не зависит от числа последних.

Расчет по идеализированным характеристикам затухания a и фазы b , не учитывающим условия физической реализации. Практически фильтры содержат звенья типов k и m , различающиеся своими параметрами. Практически существующая схема фильтра и его характеристика приведены на рис. 7.34, a и b .

Совершенно очевидно, что в данном случае для расчета переходной функции оба рассмотренных выше способа не годятся. Здесь отказываются от исследования влияния каждого элемента схемы и аппроксимируют свойства передающей системы целиком.

Характеристика фильтра по затуханию показывает, что с известной степенью приближения можно считать, что

$$a = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < \omega < \omega_{\text{ср}} \\ \infty & \text{при } \omega > \omega_{\text{ср}} \end{cases}, \quad b = \tau_3 \omega; \quad Z_x = R. \quad (7.64)$$

Пусть на вход фильтра действует единичное напряжение. Представим его интегралом Фурье:

$$u_1(t) = 1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega.$$

Каждая частотная составляющая, лежащая в полосе $0 < \omega < \omega_{\text{ср}}$, будет передана через фильтр без изменения амплитуды, но со сдвигом по фазе на угол $b(\omega) = \tau_3 \omega$, что соответствует сдвигу соответствующей синусоиды по времени на $db/d\omega = \tau_3$. Все частотные составляющие, для которых $\omega > \omega_{\text{ср}}$, не будут переданы вовсе.

Таким образом, выражение для $U_2(t) = H(t)$ будет иметь вид:

$$u_2(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_{\text{ср}}} \frac{\sin \omega (t - \tau_3)}{\omega} d\omega. \quad (7.65)$$

Подстановкой $\omega(t - \tau_3) = x$ интеграл в выражении (7.65) сводится к интегральному синусу:

$$\int_0^z \frac{\sin x}{x} dx = Si z,$$

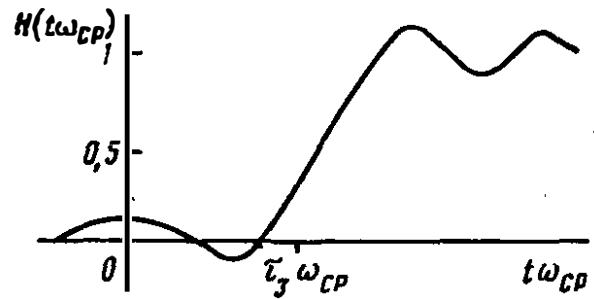


Рис. 7.35

для которого имеются таблицы.

График $u_2(t) = H(t\omega_{cp})$ приведен на рис. 7.35.

Хотя полученное решение в ряде случаев и с достаточной точностью отображает процессы, оно имеет один существенный недостаток. Напряжение $u_2(t)$ не равно нулю для отрицательных значений t . Это значит, что оно появилось на выходе фильтра до включения напряжения $u_1(t)$ на его входе. Это несоответствие объясняется тем, что характеристики $a(\omega)$ и $b(\omega)$, которые мы приписали фильтру, являются характеристиками физически неосуществимой системы.

Несмотря на этот недостаток, решение (7.65) широко используют для оценки влияния ширины полосы пропускания фильтра на скорость нарастания сигнала, а также как первое приближение, на основе которого могут быть получены другие более точные решения.

Если на вход фильтра действует напряжение в виде единичного импульса

$$u_1(t) = \delta(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega t d\omega,$$

то на его выходе получим:

$$\delta(t, \omega_{cp}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_{cp}} \cos \omega t' d\omega = W(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \omega_{cp} t'}{t'}; t' = t - \tau_3. \quad (7.66)$$

Решение (7.66), полученное для идеального ФНЧ, можно использовать для построения соответствующей характеристики ПФ.

Перепишем соотношения (7.64) в виде

$$F(\omega) = 1 \text{ при } 0 < \omega < \omega_{cp}; F(\omega) = 0 \text{ при } \omega > \omega_{cp}.$$

Аналогичная характеристика для ПФ будет:

$$F(\omega) = 0 \text{ при } 0 < \omega < \omega_1; F(\omega) = 1 \text{ при } \omega_1 < \omega < \omega_2; F(\omega) = 0 \text{ при } \omega > \omega_2.$$

Она может быть рассмотрена как разность двух функций $F_2(\omega)$ и $F_1(\omega)$, каждая из которых есть характеристика ФНЧ (рис. 7.36). На основании этого временная характеристика ПФ получается как разность временных характеристик ФНЧ.

Представление характеристики передачи фильтра в виде нескольких слагаемых можно использовать и для улучшения решения (7.65) более точным представлением характеристик ФНЧ.

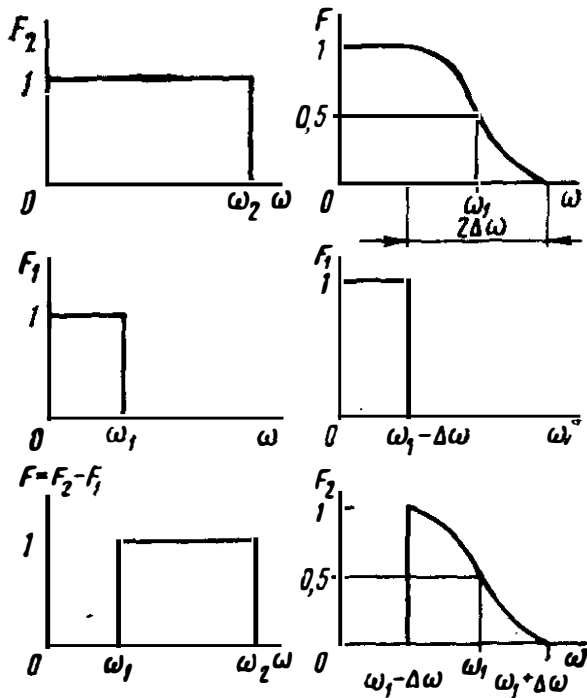


Рис. 7.36

Рис. 7.37

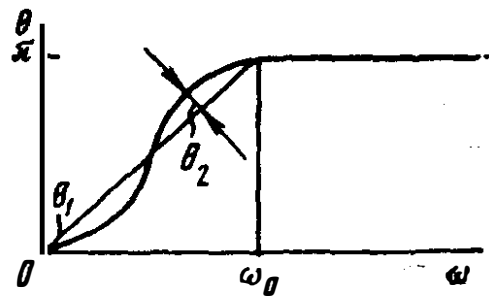


Рис. 7.38

Так, например, амплитудно-частотную характеристику фильтра с пологим срезом $F(\omega)$ можно представить в виде суммы двух слагаемых $F_1 + F_2$ (рис. 7.37); F_1 — это характеристика идеального ФНЧ; $\omega_{\text{ср}} = \omega_1 - \Delta\omega$.

F_2 определяется соотношениями:

$$F_2(\omega) = \frac{1}{2} \left(1 - \sin \frac{\pi(\omega - \omega_1)}{2\Delta\omega} \right) \text{ при } |\omega - \omega_1| < \Delta\omega;$$

$$F_2(\omega) = 0 \text{ при } |\omega - \omega_1| > \Delta\omega.$$

Это хорошая аппроксимация реальных характеристик, которая приводит к простым выражениям для $H(t)$ и $W(t)$.

В частности, при $\delta(t)$ на входе получаем:

$$W(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \omega_1 t'}{t'} \frac{\cos \Delta\omega t'}{1 - \left(2 \frac{\Delta\omega t'}{\pi} \right)^2}.$$

Суммой двух слагаемых можно представить и фазовую характеристику фильтра. Так, на рис. 7.38 показано, как фазовая характеристика ФНЧ в полосе пропускания θ может быть представлена в виде суммы двух слагаемых θ_1 и θ_2 , где $\theta_1 = \omega\tau_0$ и $\theta_2 = b \sin \omega\tau$.

Характеристика передачи в этом случае

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\omega\tau_0 - b \sin \omega\tau} = |F(\omega)| e^{j\omega\tau_0} e^{-b \sin \omega\tau} = F(\omega)_{\text{ид}} e^{-b \sin \omega\tau}.$$

Интеграл Фурье с такой функцией может быть вычислен. Вычисление приводит к следующему выражению для $W(t)$:

$$W(t) = J_0(b) W_0(t) + J_1(b) [W_0(t + \tau) - W_0(t - \tau)] + J_2(b) [W_0(t + 2\tau) + W_0(t - 2\tau)] + J_3(b) [W_0(t + 3\tau) - W_0(t - 3\tau)] + \dots, \quad (7.67)$$

где J_i — функция Бесселя первого рода ($i = 1, 2, 3$ и т. д.); $W_0(t)$ — импульсная переходная характеристика для идеализированной системы с характеристикой $F(\omega)_{\text{ид}}$.

Таким образом, отклонение фазочастотной характеристики от линейной вызывает появление парных эхо-импульсов с амплитудами, определяемыми выражением (7.67).

Рассмотренные в этой главе приемы определения искажений сигналов при прохождении их через системы передачи с различными характеристиками являются основой специальной дисциплины, называемой обычно теорией систем.

В этом параграфе мы рассмотрели приемы определения временных характеристик электрических фильтров. Эти приемы весьма разнообразны и в подавляющем большинстве достаточно сложны. Объем необходимых вычислений во всех случаях резко возрастает с усложнением схемы фильтра. Этим и объясняется наличие многих приемов, различающихся детальностью учета исходных данных.

Развитие автоматики, телемеханики и связи идет по пути использования все более и более сложных фильтров, в связи с чем возрастает роль методов, заключающихся в замене реальных амплитудно- и фазочастотных характеристик фильтров идеализированными, временные характеристики для которых определяются более просто.

Наряду с представлением характеристик в виде, показанном на рис. 7.36, 7.37, и 7.38, широко используют также метод, основанный на замене логарифмических амплитудно-частотных характеристик асимптотическими характеристиками, образованными отрезками прямых. Этот последний метод нашел особо широкое применение в теории автоматического регулирования и хорошо разработан. В справочной литературе можно найти большое количество таблиц и графиков, позволяющих относительно просто и быстро получать приближенные временные характеристики фильтров и других четырехполюсных цепей, амплитудно-частотные характеристики которых представлены ломаными прямыми.

Глава 8

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

8.1. ПОНЯТИЕ О ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ. ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

Цифровую обработку сигналов проводят с целью оценки их параметров или преобразования в другую форму средствами вычислительной техники. Достигнутый в настоящее время уровень технологии позволяет создавать устройства цифровой обработки сигналов с высокими быстродействием и надежностью, малыми габаритными размерами и низкой стоимостью. Это способствует расширению областей применения цифровой обработки сигналов, которую используют при автоматическом регулировании процессов в промышленности и на транспорте. Устройства, осуществляющие линейную фильтрацию сигналов цифровыми методами (т. е. с использованием средств цифровой вычислительной техники), получили название **цифровых фильтров**.

Если определена функция передачи $F(z)$ цифрового фильтра, свойства которого повторяют свойства аналогового фильтра-прототипа с функцией передачи $F(p)$, то по ней просто строится каноническая схема, которую можно рассматривать как алгоритм обработки сигнала. Цифровую фильтрацию сигналов осуществляют на основе выполнения операций только трех типов: задержки, сложения и умножения. Поэтому алгоритм цифровой обработки может быть реализован двумя способами: универсальной ЭВМ, выполняющей цифровую обработку по специальной программе, или специализированным вычислительным устройством, выполняющим только три указанные выше операции. Первый способ реализации алгоритма цифровой фильтрации называют программным, второй — аппаратным.

Программный способ реализации эффективен при моделировании различных систем цифровой обработки сигналов, так как позволяет легко изменять алгоритм фильтрации. Цифровые фильтры, предназначенные для работы в системах автоматики, телемеханики и связи, должны обрабатывать сигналы в реальном масштабе времени, т. е. за время, не большее периода дискретизации входных сигналов, что является их особенностью. Использование универсальных ЭВМ для этих целей практически невозможно из-за их сравнительно низкого быстродействия и значительной стоимости. Аппаратная реализация цифровых фильтров основана на использовании цифровых интегральных схем, представляющих собой регистры сдвига, сумматоры, умножители и т. п. Она стала возможной в связи с появлением в последние годы больших интегральных схем, имеющих большие функциональные возможности и высокое быстродействие.

По сравнению с аналоговыми цифровые фильтры имеют ряд достоинств, к которым относят высокую стабильность параметров, простоту изменения характеристик, хорошую их повторяемость в процессе производства. При использовании цифровых фильтров не возникает задачи согласования нагрузок, они могут работать в диапазоне от сверхнизких частот до частот, измеряемых мегагерцами. Вместе с тем цифровым фильтрам присущи и некоторые специфические особенности, обусловленные цифровым характером обработки сигналов.

Цифровые фильтры используют в системах управления различными объектами и процессами, где алгоритмы обработки могут быть настолько сложными, что аналоговыми устройствами реализованы быть не могут. Другая важная область применения цифровых фильтров — это обработка низко- и инфранизкочастотных сигналов, когда использование аналоговых устройств затруднено из-за больших габаритных размеров катушек индуктивностей и конденсаторов. Области применения цифровых фильтров будут непрерывно расширяться в связи с появлением и широким распространением микропроцессоров, специализированных БИС и т. п., уменьшением их стоимости и повышением быстродействия.

На железнодорожном транспорте цифровые методы обработки сигналов, и в частности цифровые фильтры, смогут найти применение в перспективных системах связи, например в устройствах сопряжения систем передачи с частотным и временным разделением каналов (трансмultipлексорах), во вновь разрабатываемых устройствах железнодорожной автоматики.

8.2. ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА. НЕРЕКУРСИВНЫЕ И РЕКУРСИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ

Понятие фильтр будем использовать в широком смысле как устройство для обработки сигнала заданным способом. Как отмечалось, частотные фильтры, пропускающие определенные полосы частотных составляющих, являются одной из разновидностей фильтров.

Поскольку цифровой фильтр обрабатывает сигналы на основе использования вычислительной техники, то сигнал, поступающий на вход вычислительного устройства, должен быть цифровым, т. е. дискретным и квантованным. Как правило, исходный, подлежащий обработке сигнал является аналоговым, поэтому на первом этапе цифровой обработки его преобразуют в цифровой дискретизацией и квантованием, что осуществляет устройство, называемое **а н а л о г о - ц и ф р о в ы м п р е о б р а з о в а т е л е м (АЦП)**.

Д и с к р е т и з а ц и я представляет собой замену непрерывного во времени сигнала последовательностью отсчетов (выборок), взятых через определенные интервалы времени. Ранее отмечалось, что дискретизация должна осуществляться с частотой, достаточной для сохранения точности представления непрерывного сигнала. **К в а н т о в а н и е** — это замена выборок напряжения дискретного сигнала, каждая из которых может принимать бесчисленное множество значений, выборками напряжения, принимающими одно из конечного числа зна-

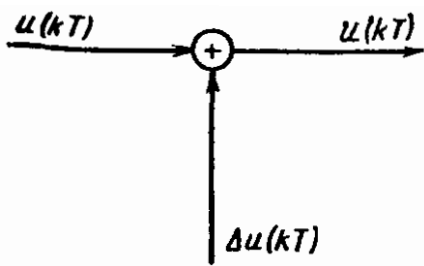


Рис. 8.1

чений. Квантование эквивалентно округлению числа при вычислениях и должно осуществляться с необходимой для решения задачи точностью. В результате выполнения операций дискретизации и квантования сигнал на выходе АЦП есть последовательность выборок сигнала, представленных в виде, пригодном для обработки вычислительным устройством.

Квантование отсчета (выборки) можно рассматривать как появление в тракте обработки сигнала некоторой помехи, максимальное значение которой не превышает половины шага квантования. Последнее можно представить схемой (рис. 8.1), где $u_{кв}(kT)$ — квантованное значение выборки; $\Delta u(kT)$ — погрешность представления выборки сигнала $u(kT)$, обусловленная квантованием. Если погрешность квантования пренебрежимо мала, то можно считать, что фильтр осуществляет преобразования точных значений выборок дискретизированного сигнала. Такой фильтр называют **д и с к р е т н ы м**. Если требуется учет погрешности, вызванной квантованием выборок дискретизированного аналогового сигнала, то возникновение и преобразование этой погрешности цифровым фильтром следует рассматривать совместно с преобразованием квантованных отсчетов, пользуясь при этом представлением выборок сигнала, показанным на рис. 8.1.

Таким образом, в обоих случаях можно рассматривать прохождение через фильтр последовательности отсчетов дискретного сигнала. При этом, как отмечалось в главе 1, для цепей, находящихся под воздействием дискретных сигналов, можно использовать те же характеристики, что и для аналоговых цепей. Реакцию цепи на единичный импульс называют **импульсной характеристикой** цепи. Для аналоговых цепей она представляет собой непрерывную функцию $G(t)$. Если единичный импульс

$$x(kT) = \delta(kT) = \begin{cases} 1 & \text{при } k=0 \\ 0 & \text{при } k \neq 0 \end{cases}$$

подать на вход цифрового фильтра, то сигнал на его выходе будет представлять собой дискретную последовательность значений, следующих с интервалом T , называемым **интервалом дискретизации**. Этот сигнал является **импульсной характеристикой** цифрового фильтра.

При воздействии на цепь с импульсной характеристикой $G(kT)$ сигналом, представляющим собой последовательность значений $x(kT)$, выходной сигнал по аналогии с интегралом свертки (1.14) определяется дискретной сверткой:

$$y(kT) = \sum_{l=0}^k x(lT) G(kT-lT) = \sum_{l=0}^k x[(k-l)T] G(lT). \quad (8.1)$$

Формула (8.1) определяет значение k -й выходной выборки. Для нахождения выходного сигнала ее следует применить многократно для последовательного вычисления $y(0)$; $y(T)$; $y(2T)$ и т. д.

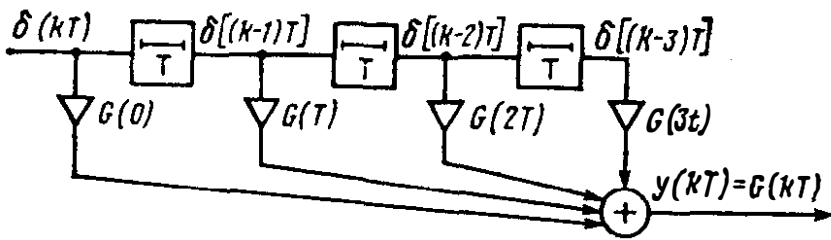


Рис. 8.2

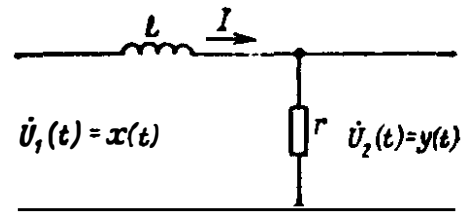


Рис. 8.3

Реакция фильтра на единичный импульс:

$$y(kT) = G(kT) = \sum_{l=0}^k x[(k-l)T] g(lT) = \sum_{l=0}^k \delta[(k-l)T] g(lT). \quad (8.2)$$

Если реакция фильтра на единичный импульс представлена конечным числом отсчетов, то $G(kT)$ состоит из конечного числа членов K . В этом случае и реакция фильтра $y(kT)$ на сигнал, представляемый конечным числом отсчетов $x(kT)$, имеет конечное число отсчетов. Так, например, при $K = 3$ импульсная характеристика фильтра определяется четырьмя значениями:

$$y(kT) = G(kT) = \delta(kT) g(0) + \delta[(k-1)T] g(T) + \delta[(k-2)T] g(2T) + \delta[(k-3)T] g(3T). \quad (8.3)$$

Последнему выражению соответствует схема (рис. 8.2), которая входную последовательность отсчетов $x(kT)$ преобразует в выходную $y(kT)$ и представляет собой дискретный фильтр с импульсной характеристикой $G(kT)$. Эта схема является также моделью цифрового фильтра, в которой не учитываются погрешности квантования. Такую модель называют *линейной*. На схему, приведенную на рис. 8.2, можно смотреть и как на форму представления алгоритма преобразования $x(kT)$ в $y(kT)$ в соответствии с выражением (8.1). Рассмотренный фильтр не имеет цепей обратной связи и называется *нерекурсивным*.

Для практической реализации нерекурсивного фильтра импульсная характеристика $G(kT)$ должна представлять собой последовательность с конечным числом членов.

Если импульсная характеристика содержит бесконечное число отсчетов, быстро убывающих по значению, то можно, отбросив отсчеты с малыми значениями, ограничиться конечным их числом. Если же отсчеты импульсной характеристики не убывают по значению, то нерекурсивный фильтр реализовать невозможно.

Пусть, например, необходимо создать цифровой фильтр, эквивалентный цепи (рис. 8.3), которую в этом случае называют *фильтром-прототипом*. Такая цепь была рассмотрена в § 1.1, а ее импульсная характеристика (см. § 1.5) имеет вид:

$$G(t) = \frac{r}{L} e^{-\frac{r}{L}t} = \alpha e^{-\alpha t}.$$

Импульсная характеристика дискретного фильтра:

$$G(kT) = \alpha e^{-\alpha kT}; \quad k = 0, 1, 2. \quad (8.4)$$

Как видно, она содержит бесконечное число отсчетов. Соответствующий фильтр можно построить двумя способами:

заменить бесконечную последовательность конечной, отбросив отсчеты, значением которых можно пренебречь, и построить по ней не-рекурсивный фильтр (см. рис. 8.2), где $G(0) = \alpha$; $G(T) = \alpha e^{-\alpha T}$; $G(2T) = \alpha e^{-2\alpha T}$; $G(3T) = \alpha e^{-3\alpha T}$ и т. д.;

охарактеризовать цепь дифференциальным уравнением, которое (см. § 1.2) имеет вид:

$$dy/dx = -\alpha y + \alpha x; \quad \alpha = r/L \quad (8.5)$$

и перейти от него к разностному.

В § 1.1, переходя к разностному уравнению, мы заменяли $\frac{dU}{dt}$ на $\frac{U[(k+1)T] - U(kT)}{T}$, а в теории цифровой фильтрации $\frac{dU}{dt}$ заменяют на $\frac{U(kT) - U[(k-1)T]}{T}$.

При этом дифференциальное уравнение (8.5) переходит в разностное:

$$y(kT) + \alpha T y(kT) = y[(k-1)T] + \alpha T x(kT); \quad (8.6)$$

$$y(kT) = \frac{1}{1 + \alpha T} y[(k-1)T] + \alpha T x(kT) = ay[(k-1)T] + bx(kT).$$

Имея в виду, что αT — малая величина, $1 + \alpha T$ можно рассматривать как приближенное представление $e^{\alpha T} = 1 + \alpha T + \frac{(\alpha T)^2}{2} + \dots$ и положить $a = e^{-\alpha T}$.

Коэффициент $x(kT)$ при $b = \alpha T$ обеспечивает физическую эквивалентность при замене непрерывного воздействия $x(t)$ последовательностью импульсов с амплитудами $x(kT)$. Таким должен быть коэффициент b при дискретной фильтрации. При цифровой обработке сигналов физическое значение импульсов несущественно, множитель T в выражении коэффициента b является масштабным и может быть принят равным единице и тогда $b = \alpha$.

Уравнение (8.6) можно переписать в виде

$$y(kT) = e^{-\alpha T} y[(k-1)T] + \alpha x(kT). \quad (8.7)$$

Выражению (8.7) соответствует схема (рис. 8.4). При подаче на ее вход сигнала

$$x(kT) = \delta(kT) = \begin{cases} 1 & \text{при } k=0 \\ 0 & \text{при } k \neq 0 \end{cases}$$

на выходе последовательно будут получаться:

$$y(0) = G(0) = \alpha; \quad y(T) = G(T) = \alpha e^{-\alpha T}; \quad y(2T) = G(2T) = \alpha e^{-2\alpha T}.$$

Рассматриваемый фильтр имеет требуемую импульсную характеристику. У него есть цепь обратной связи и он представляет собой так называемый рекурсивный фильтр. Этот фильтр эквивалентен нерекурсивному фильтру (см. рис. 8.2). Однако, как видно из

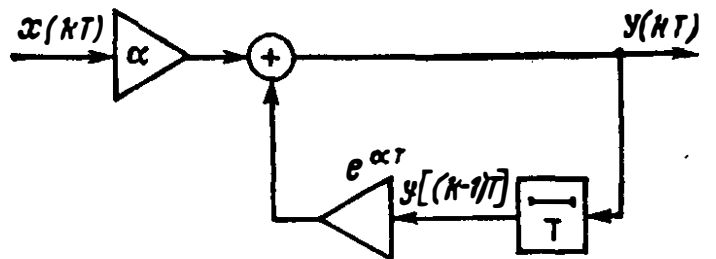


Рис. 8.5

рис. 8.4, схема и соответственно алгоритм рекурсивного фильтра проще, чем нерекурсивного. Так, для определения одного значения выходного сигнала для нерекурсивного фильтра требуется выполнить $2K$ операций, а для рекурсивного — только две операции. Поэтому если импульсная характеристика цифрового (дискретного) фильтра должна иметь большое число отсчетов, то целесообразно использовать рекурсивные схемы. Нерекурсивную схему следует применять при реализации фильтров с импульсной характеристикой, содержащей небольшое число отсчетов. В технической литературе, посвященной цифровым и дискретным фильтрам, использована и другая терминология: фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтры) и с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтры). Любой реальный нерекурсивный фильтр является и КИХ-фильтром. Рекурсивные фильтры, как правило, есть БИХ-фильтры, однако возможно построение рекурсивных фильтров, представляющих собой КИХ-фильтры.

8.3. ОПЕРАТОРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И КАНОНИЧЕСКИЕ СХЕМЫ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

В главе 1 при рассмотрении способов представления сигналов и характеристик цепей было показано, что в дискретном случае преобразованию Лапласа, переводящему функции времени $x(t)$ в $X(p)$, соответствует z -преобразование, переводящее $x(kT)$ в $X(z)$, где $z = e^{pT}$. Физически оператору $z^{-1} = e^{-pT}$ соответствует задержка сигнала на время T .

Применим z -преобразование к разностному уравнению (8.7):

$$y(kT) = e^{-\alpha T} z^{-1} y(kT) + \alpha x(kT). \quad (8.8)$$

Соответствующая выражению (8.8) схема приведена на рис. 8.5. Применяя к этой схеме правило определения передаточной функции цепи с обратной связью, найдем:

$$F(z) = \frac{y(kT)}{x(kT)} = \frac{\alpha}{1 - z^{-1} e^{-\alpha T}} = \frac{\alpha z}{z - e^{-\alpha T}}. \quad (8.9)$$

Функция (8.9) и схема, приведенная на рис. 8.5, представляют собой фильтр первого порядка. Функция $F(z)$ является рациональной дробью относительно z и называется системной или передаточной функцией фильтра. Более сложные фильтры имеют и более сложные характеристики.

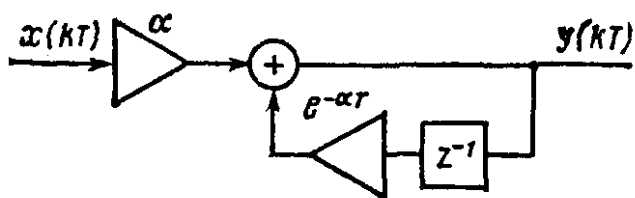
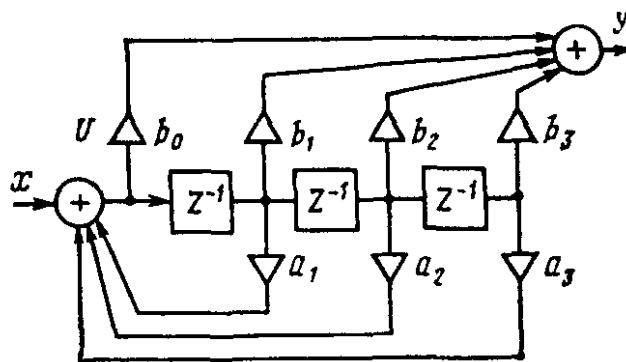


Рис. 8.4

Рис. 8.6



В общем по аналогии с $F(p)$ функцию $F(z)$ можно представить в виде

$$F(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_n z^{-n}}. \quad (8.10)$$

По аналогии с каноническими схемами передающих цепей, рассмотренными в § 2.24, составим каноническую схему цифрового (дискретного) фильтра третьего порядка (рис. 8.6) с характеристикой

$$F(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - a_3 z^{-3}}. \quad (8.11)$$

Для пояснения ее действия введем промежуточную переменную U . Из условия равновесия для левого сумматора найдем:

$$X(z) = U(1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - a_3 z^{-3});$$

$$U = \frac{X(z)}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - a_3 z^{-3}}.$$

Выход $Y(z)$ в свою очередь равен $U(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3})$. Отсюда $F(z) = Y(z)/X(z)$ дает выражение (8.11).

Очевидно, что для построения цифровых фильтров могут быть использованы и другие канонические схемы, и, в частности, схемы каскадного и параллельного соединений нескольких фильтров первого или второго порядка.

8.4. ПРИЕМЫ ПОСТРОЕНИЯ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ ПО ЗАДАНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

Как отмечалось, задача построения нерекурсивного фильтра по заданной импульсной характеристике решается просто. Однако чаще бывает задана его частотная (или операторная) характеристика. Поскольку методы аппроксимации желательных характеристик частотных фильтров рациональными функциями передачи $F(p)$ с максимально плоскими и равноволновыми характеристиками хорошо разработаны (см. § 6.8), то будем считать, что требуемая характеристика задана функцией $F(p)$ вида

$$F(p) = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m}{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}. \quad (8.12)$$

Она является характеристикой аналогового фильтра-прототипа. Задача заключается в переходе от функции $F(p)$ к функции $F(z)$. По $F(z)$, как было показано, строится одна из канонических схем, чем и определяется алгоритм работы цифрового фильтра.

Сложность перехода от $F(p)$ к $F(z)$, несмотря на сходство формул (8.10) и (8.12), заключается в однозначном соответствии функции $F(p)$ дифференциальному уравнению, а функции $F(z)$ разностному уравнению. При переходе от дифференциального уравнения к разностному меняются значения коэффициентов, как это было видно из рассмотренного в § 2.8 простого примера.

Коэффициент α в дифференциальном уравнении преобразовался в $e^{-\alpha T}$, $F(p) = \frac{\alpha}{p + \alpha}$ — в $F(z) = \frac{\alpha z}{z - e^{-\alpha T}}$. В ряде простых случаев можно пользоваться таблицей соответствий между L - и z -преобразованиями (см. табл. 1.2).

Иногда функцию $F(p)$ можно разложить на простые дроби вида $\alpha/(p + \alpha)$ и воспользоваться известными соответствиями, но в большинстве практически важных случаев приходится искать другие приемы преобразования $F(p)$ в $F(z)$.

На практике применяют так называемое билинейное z -преобразование, при котором используют подстановку

$$p = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1}. \quad (8.13)$$

Это преобразование было найдено формально математически при поисках способа преобразования комплексной плоскости p в плоскость z . Пояснить его можно так. Заметим, что частотные характеристики дискретных фильтров, как и спектры дискретных сигналов, периодичны. Проиллюстрируем это на примере простого нерекурсивного фильтра (рис. 8.7, а). Для него

$$y(kT) = x(kT) (g_0 + g_1 z^{-1});$$

$$F(z) = Y/X = g_0 + g_1 z^{-1}.$$

Имея в виду, что $z = e^{pT}$ и $p = j\omega$, получим:

$$F(\omega) = g_0 + g_1 e^{-j\omega T}. \quad (8.14)$$

Выражение (8.14) содержит два слагаемых: вектор g_0 , направленный вдоль вещественной оси, и вращающийся вектор $g_1 e^{-j\omega T}$. Модуль функции $F(\omega)$ будет периодически изменяться от $g_0 + g_1$ до $g_0 - g_1$ (рис. 8.7, б).

Таким образом, задачу перехода от функции $F(p)$ к функции $F(z)$ можно сформулировать как задачу перехода от непериодической частотной характеристики к периодической. Характеристика должна повторяться далеко вне рабочего диапазона частот. Это легко достигается выбором периода дискретизации соответственно малым (см. рис. 8.7, б). И поскольку повторение характеристики происходит вне рабочего диапазона, как она повторяется — безразлично.

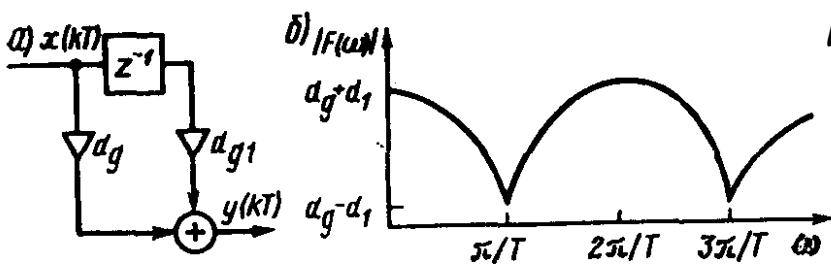


Рис. 8.7

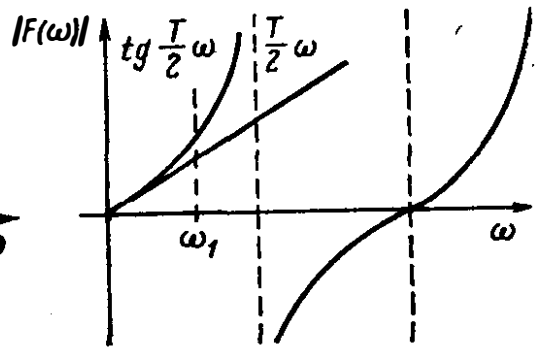


Рис. 8.8

Рассмотрим теперь функции $|F(p)| = ap \frac{T}{2} p$, $|F(\omega)| = \frac{T}{2} \omega$. Пусть рабочий диапазон кончается в точке ω_1 . Введем теперь периодичность, заменив $|F(\omega)| = \frac{T}{2} \omega$ на $|F_{\text{пер}}(\omega)| = \text{tg} \frac{T}{2} \omega$ (рис. 8.8). В рабочем диапазоне частот, т. е. при $\omega < \omega_1$

$$\left| \text{tg} \frac{T}{2} \omega \right| = \left| \frac{T}{2} \omega \right|. \quad (8.15)$$

Равенству (8.15) соответствует соотношение

$$\text{th} \frac{pT}{2} = p \frac{T}{2}, \quad (8.16)$$

$$\text{но th} \frac{pT}{2} = \frac{e^{\frac{pT}{2}} - e^{-\frac{pT}{2}}}{e^{\frac{pT}{2}} + e^{-\frac{pT}{2}}} = \frac{e^{pT} - 1}{e^{pT} + 1} = \frac{pT}{2}$$

и, следовательно,

$$\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} = p.$$

Из рис. 8.8 видно, что вблизи ω_1 происходит расхождение между x и $\text{tg}x$. Его можно уменьшить введением преобразования масштаба частот:

$$\omega_a = \frac{2}{T} \text{tg} \frac{\omega_{\text{ц}} T}{2}, \quad (8.17)$$

где ω_a — частота среза аналогового фильтра-прототипа;

$\omega_{\text{ц}}$ — частота цифрового фильтра, на которой характеристики фильтров должны совпадать.

Как видно, при $\text{tg} x = x$ выражение (8.17) дает $\omega_a = \omega_{\text{ц}}$. В соответствии с выражением (8.17) следует пересчитывать частоты среза и частоты, на которых должно гарантироваться определенное ослабление. С учетом сказанного, а также, имея в виду, что $F(z)$ должны быть представлены в виде функции от z^{-1} , дробно-рациональное преобразование (8.15) для ФНЧ имеет вид:

$$p = k \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} = \gamma \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}. \quad (8.18)$$

Пусть, например, требуется рассчитать цифровой фильтр нижних частот с максимально плоской характеристикой в полосе пропускания и затуханием 3 дБ на частоте среза $f_c = 1$ кГц, ослаблением не менее 20 дБ на частоте $f_2 = 2$ кГц и частотой дискретизации $f_n = 10$ кГц. Сначала определим характерные частоты фильтра-прототипа. Частоте среза цифрового фильтра $\omega_c = \omega_{ц1}$ соответствует частота среза ω_{a1} фильтра-прототипа:

$$\omega_{a1} = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{2\pi f_c T}{2},$$

где $T = 1/f_n = 10^{-4}$ с — интервал дискретизации.

Подставляя числовые данные, получим $\omega_a = 6,498 \cdot 10^3$ 1/с. Аналогично частоте $\omega_{ц2}$ цифрового фильтра соответствует частота ω_{a2} фильтра-прототипа:

$$\omega_{a2} = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{2\pi f_2 T}{2} = 1,453 \cdot 10^4 \text{ 1/с.}$$

Таким образом, фильтр-прототип должен иметь затухание 3 дБ на частоте $\omega_{a1} = 6,498 \cdot 10^3$ 1/с и затухание не менее 20 дБ на частоте $\omega_{a2} = 1,453 \cdot 10^4$ 1/с.

Определим теперь частотную характеристику фильтра-прототипа. Вспомним, что максимально плоскую характеристику имеют фильтры Баттерворта, описываемые выражением

$$|K(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}}. \quad (8.19)$$

Найдем порядок фильтра-прототипа, удовлетворяющего указанным требованиям. Отношение частот $\omega_{a1}/\omega_{a2} = 2,236$. Задаваясь на частоте ω_{a2} ослаблением не менее 20 дБ (т. е. в 10 раз), из выражения (8.19) определим порядок фильтра: $(1 + 2,236^{2n}) \geq 100$, откуда $n \geq 2,85$. Принимаем $n = 3$. Фильтр Баттерворта третьего порядка на частоте ω_{a2} обеспечивает ослабление сигнала, равное $10 \lg [1 + (2,236)^6] \approx 21$ дБ, что превышает заданные требования к фильтру. Найдем теперь передаточную функцию фильтра-прототипа — фильтра Баттерворта третьего порядка. Согласно табл. 6.3 можно написать:

$$K(p) = \frac{1}{1 + 2\rho_n + 2\rho_n^2 + \rho_n^3}. \quad (8.20)$$

Откуда

$$K(z) = 0,018 \frac{(1+z^{-1})^3}{(1-0,509z^{-1})(1-1,250z^{-1}+0,545z^{-2})}. \quad (8.21)$$

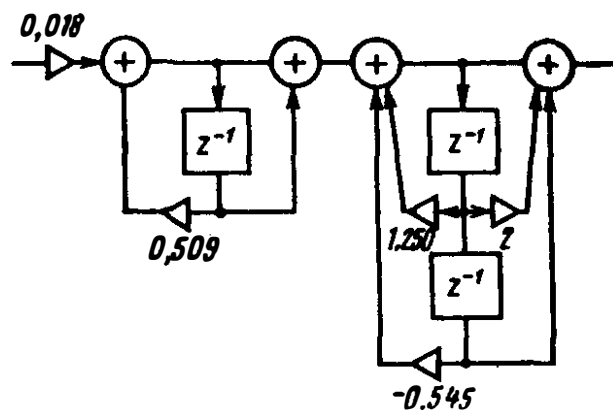


Рис. 8.9

Системная функция (8.21) может быть реализована в виде цепочечного соединения двух фильтров первого и второго порядка, для чего эту функцию представим в виде произведения двух системных функций:

$$K(z) = 0,018 \frac{1+z^{-1}}{1-0,509z^{-1}} \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-1,250z^{-1}+0,545z^{-2}}. \quad (8.22)$$

Схема цифрового фильтра, соответствующая системной функции (8.22), приведена на рис. 8.9.

8.5. ТОЧНОСТЬ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ. ИСТОЧНИКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ В ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРАХ И ИХ ОЦЕНКА

В реализованном цифровом фильтре выходной сигнал отличается от теоретически ожидаемого вследствие наличия специфических погрешностей, обусловленных операциями дискретизации и квантования, выполняемых в процессе обработки аналогового сигнала. В цифровых фильтрах входной и выходной сигналы являются последовательностью чисел, представляемых с конечной точностью, которая определяется числом разрядов вычислительного устройства, выполняющего обработку входного сигнала. Это приводит к появлению особого рода погрешностей, отсутствующих в аналоговых или дискретных устройствах. Источниками этих погрешностей являются следующие факторы: квантование отсчетов входных сигналов, неточные (округленные) значения параметров (коэффициентов) фильтров, округление или усечение результатов промежуточных вычислений, а также так называемые предельные циклы низкого уровня сигнала, поясняемые ниже. Кроме того, вследствие конечной длины регистров в некоторых случаях в цифровых фильтрах может возникать переполнение. Суммарная погрешность обработки сигналов, а следовательно, и точность цифровых фильтров зависят от многих факторов: формы (канонической, прямой, параллельной и т. п.) реализации фильтра, способа представления чисел в вычислительном устройстве, вида фильтра (рекурсивный или не-рекурсивный), характера входного сигнала и т. д.

Анализ погрешностей, вызванных всеми указанными факторами, является одним из самых сложных вопросов теории цифровых фильтров. Здесь мы ограничимся лишь краткой характеристикой различных погрешностей, возникающих в цифровых фильтрах. Более подробное изложение этих вопросов можно найти в специальной литературе.

Поскольку погрешности цифровых фильтров зависят от способа представления чисел в вычислительном устройстве, напомним, что применяют два таких способа: с фиксированной запятой и плавающей запятой. В универсальных ЦВМ и специализированных устройствах для представления чисел, как правило, используют двоичную систему. Поэтому числа представляют последовательностью двоичных разрядов, в которой запятой отделяют цифры целой и дробной частей числа. В системе с фиксированной запятой положение двоичной запятой во всех регистрах фиксировано. Недостатком такой системы является неболь-

шой диапазон представления чисел. Вместе с тем такие устройства проще по структуре, легче поддаются анализу.

В системе счисления с плавающей запятой положительное число F представляется в виде произведения двух чисел: $F = 2^c M$, где M — мантисса, c — порядок, который может быть положительным, или отрицательным.

В устройствах, использующих числа с плавающей запятой, диапазон представления чисел практически неограничен, однако анализ погрешностей квантования в них значительно сложнее. Так, например, значение погрешности округления зависит не только от числа разрядов, но и порядка округляемого числа. Поскольку в цифровых фильтрах числа, как правило, представляют с фиксированной запятой, далее будут рассмотрены погрешности, возникающие в цифровых фильтрах, использующих данный способ представления чисел.

Анализ погрешностей является очень важным этапом проектирования цифрового фильтра, поскольку на его основе выбирают число разрядов регистров, используемых для представления чисел и выполнения арифметических операций.

Погрешности, связанные с квантованием входного сигнала, усечением или округлением результатов арифметических операций, как правило, анализируют на основе модели цифрового фильтра с введенными в нее источниками погрешностей, называемыми шумами округления или квантования. На рис. 8.10 приведена такая модель для нерекурсивного фильтра (см. рис. 8.2, а), на рис. 8.11 — для рекурсивного (см. рис. 8.6). На этих рисунках квантованный сигнал $x(kT)$ на входе цифрового фильтра представлен в виде суммы дискретизированного неквантованного сигнала $\tilde{x}(kT)$ и шума квантования $e_0(kT)$ (шума АЦП), $e_{ji}(kT)$ — погрешность на выходе j -го сумматора,

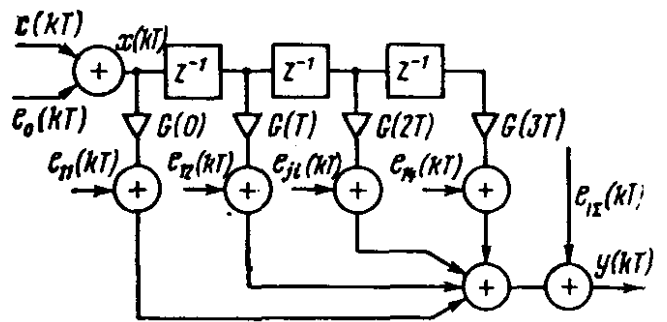


Рис. 8.10

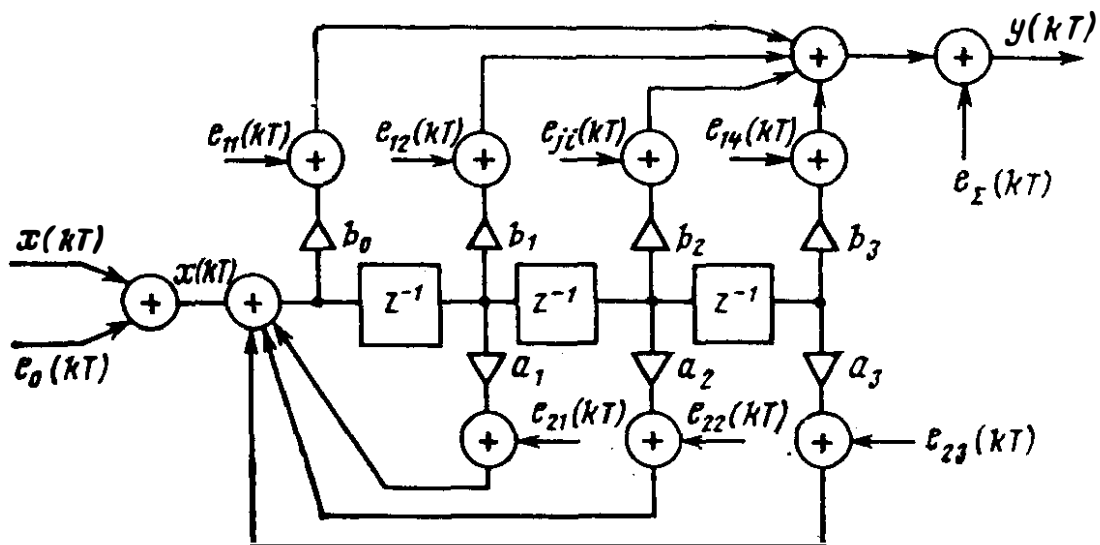


Рис. 8.11

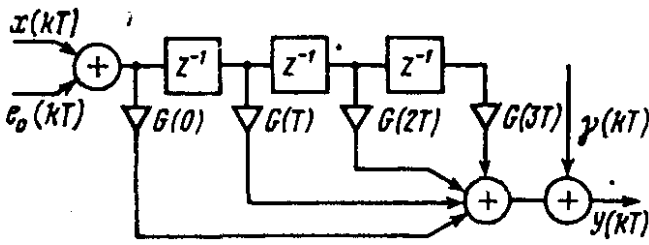


Рис. 8.12

к которому подключен соответствующий i -й источник шума, возникающего в результате выполнения операции умножения на соответствующую константу (a_i или b_i). Если к j -му сумматору подключено несколько источников шума $e_{ji}(kT)$, то их можно заменить одним эквивалентным источником $\gamma_j(kT)$ (рис. 8.12).

На основе такой модели оценка диапазона изменения выходного шума фильтра $e_B(kT)$ может быть получена из выражения

$$\max |e_B(kT)| \leq \Sigma \max |e_{ji_B}(kT)|,$$

где $e_{ji_B}(kT)$ — составляющая, обусловленная i -м источником.

Одним из источников погрешности обработки сигналов в цифровом фильтре является квантование значений выборок входного сигнала АЦП. Погрешность квантования входного сигнала проявляется в виде шума на выходе фильтра. Шум квантования представляет собой последовательность дискретных значений $e_0(kT)$, не превышающих по модулю половины шага квантования Δ , связанного с числом разрядов АЦП r соотношением $\Delta = 2^{-r}$. Поскольку фильтр линейный, прохождение через него сигнала и шума квантования можно рассматривать независимо друг от друга. При определении выходного шума фильтра, обусловленного погрешностью, вносимой АЦП, предполагают, что расчет фильтра выполняют точно, без погрешности округления (усечения), т. е. учитывают только один источник выходного шума — шум квантования.

Один из возможных методов оценки диапазона изменения выходного шума рассмотрим на примере нерекурсивного фильтра, представленного моделью (см. рис. 8.9). Рассматривая прохождение шума квантования через фильтр, можно сказать, что каждое дискретное значение $e_0(kT)$ вызывает на выходе фильтра реакцию $e_{0B}(kT)$, которую в соответствии с формулой (8.3) можно представить следующим образом

$$e_{0B}(kT) = e_0(kT) G(0) + e_0(kT) G(T) + e_0(kT) G(2T) + e_0(kT) G(3T). \quad (8.23)$$

Так как величина $e_0(kT)$ ограничена и не превышает половины шага квантования, можно написать, что

$$\max |e_0(kT)| \leq \frac{1}{\xi} 2^{-r}, \quad (8.24)$$

где $\xi = 2$ при использовании округления и $\xi = 1$ в случае применения усечения при представлении чисел на выходе АЦП. Тогда с учетом выражения (8.23) можно считать, что

$$\max |e_{0B}(kT)| \leq \max |e_0(kT)| |G(0) + G(T) + G(2T) + G(3T)|$$

или

$$\max |e_{0B}(kT)| \leq \max |e_0(kT)| \sum_{k=0}^K |G(kT)|, \quad (8.25)$$

где $G(kT)$ — импульсная реакция цифрового фильтра.

Для фильтра с импульсной характеристикой бесконечной длины на основании формулы (8.25) можно написать:

$$\max |e_{0B}(kT)| \leq \max |e_0(kT)| \left| \sum_{k=0}^{\infty} |G(kT)| \right|. \quad (8.26)$$

Очевидно, что выражение для выходного шума фильтра, вызванного квантованием выборок входного сигнала, не зависит от структуры фильтра, поскольку шум квантования проходит через весь фильтр. Подставив в формулу (8.26) выражение (8.24), можно получить оценку диапазона изменения выходного шума цифрового фильтра, обусловленную квантованием выходного сигнала, в виде

$$\max |e_{0B}(kT)| \leq \frac{1}{\varepsilon} 2^{-r} \sum_{k=0}^{\infty} |G(kT)|. \quad (8.27)$$

Из последнего выражения может быть определено число разрядов АЦП, необходимое для представления выходного сигнала с требуемой точностью:

$$r = \text{int} \log_2 \frac{\sum_{k=0}^{\infty} |G(kT)|}{\varepsilon \max |e_{0B}(kT)|}, \quad (8.28)$$

где $\text{int}(B)$ означает наименьшее целое число, не меньшее числа B . Определение числа разрядов АЦП является очень важным моментом построения цифрового фильтра, поскольку при большом значении r практически невозможно или экономически нецелесообразно реализовать АЦП.

Погрешность, вызванная округлением или усечением результатов промежуточных вычислений, является следствием конечной длины регистров арифметических устройств. В вычислительных устройствах, использующих представление чисел с фиксированной запятой, сложение чисел не увеличивает число разрядов, необходимое для представления результата. Однако при каждом умножении число разрядов должно возрастать, и поэтому возникает необходимость округления. Таким образом, каждое умножение приводит к погрешности, эквивалентной шуму квантования, и следовательно, число источников шума цифрового фильтра равно числу умножений, необходимых для получения выходного сигнала. Поскольку это число при различных реализациях фильтра может отличаться, данная погрешность в значительной степени зависит от фильтра (рекурсивный или нерекурсивный), формы его реализации (каноническая параллельная или иная), а также порядка фильтра. Наиболее просто погрешность, вызванная округ-

лением или усечением результатов промежуточных вычислений, может быть определена для нерекурсивных фильтров. При этом, как правило, полагают, что разрядности регистров в умножителях и сумматорах равны r_s , тогда, например, в соответствии с рис. 8.7 можно считать, что

$$\max |e_{1\Sigma}(kT)| \leq (K+1) \max |e(kT)|,$$

при этом по аналогии с выражением (8.24) $\max |e(kT)| \leq \frac{1}{\xi} 2^{-r_s}$ и следовательно,

$$\max |e_{1\Sigma}(kT)| \leq \frac{(K+1)}{\xi} 2^{-r_s}.$$

Из последнего выражения можно определить необходимое число разрядов для представления выходного сигнала с требуемой точностью по аналогии с выражением (8.28). При рекурсивной реализации цифрового фильтра (см. рис. 8.11) составляющие шума от разных источников (умножителей) проходят на выход непосредственно и через петли обратной связи. Поэтому диапазон изменения выходного шума, обусловленного данной погрешностью, определяется более сложными выражениями, зависящими от структуры фильтра. В процессе проектирования цифрового фильтра при выборе формы реализации, позволяющей выполнять требования к точности в каждом конкретном случае, погрешности рассчитывают аналогично рассмотренному ранее. Результаты более глубокого анализа шумов округления дают основания сделать вывод, что в большинстве случаев меньший уровень шумов обеспечивает каскадная форма реализации фильтра.

Погрешность, вызванная неточными значениями постоянных параметров (коэффициентов) фильтра, также является следствием ограниченного числа разрядов регистров, предназначенных для хранения значений коэффициентов. Поэтому полученные в результате расчета значения коэффициентов приходится округлять.

В результате этого фактические параметры фильтра несколько отличаются от расчетных. Погрешности такого рода играют наибольшую роль в рекурсивных фильтрах, где осуществляют многократные умножения на константы. Поэтому в процессе разработки цифровых фильтров обязательно исследуют влияние неточности параметров. Особенно это важно для фильтров высоких порядков, где такое влияние может быть очень значительным. Поэтому обычно стараются такие фильтры заменить параллельным или каскадным соединением звеньев первого или второго порядка.

Ограничение числа разрядов регистров цифрового фильтра является источником специфических процессов на выходе фильтра, называемых предельными циклами низкого уровня сигнала. Это явление возникает на выходе фильтра вследствие округления результатов вычисления при малом входном сигнале. Поясним это на примере. Рассмотрим рекурсивный фильтр первого

порядка, описываемый разностным уравнением: $y(kT) = x(kT) - 0,9 y(kT - T)$. Пусть на входе этого фильтра действует сигнал:

$$x(kT) = \begin{cases} 10 & \text{при } k = 0 \\ 0 & \text{при } k \neq 0. \end{cases}$$

Если результаты вычислений не округляются, то на выходе фильтра получается последовательность $+10; -9; +8,1; -7,29; +6,561; -5,8949; +4,8054; -4,32486 \dots$ Абсолютные значения выходного сигнала убывают, стремясь к нулю. При округлении результатов, например до целочисленных значений на выходе фильтра возникает последовательность $+10; -8; +8; -7; +6; -5; +5; -5; +5; -5 \dots$ Через время $5T$ после подачи входного сигнала на выходе фильтра устанавливаются периодические колебания, амплитуда которых в данном случае равна 5.

Такое явление очень нежелательно, так как оно приводит к появлению паразитных колебаний на выходе фильтра, уровень которых может значительно превысить уровень шума квантования. Предельные циклы обычно возникают с прекращением действия сигнала на выходе фильтра. Поэтому существование таких циклов следует учитывать при разработке систем передачи, в входных сигналах которых могут наблюдаться паузы. Анализ предельных циклов низкого уровня весьма сложен вследствие зависимости этого режима фильтра от структуры и формы реализации.

Кроме предельных циклов низкого уровня, в цифровых фильтрах могут возникать сильные колебания предельного цикла, обусловленные переполнением. Это вызывает появление значительных погрешностей на выходе фильтра и даже может привести к периодическому изменению выходного сигнала фильтра между предельными значениями максимальной амплитуды. Такие предельные циклы называют колебаниями переполнения, а для их устранения в схему фильтра вводят так называемые масштабные множители, нормирующие входной сигнал так, чтобы избежать эффекта переполнения регистров цифрового фильтра.

Все рассмотренные выше погрешности являются следствием ограниченного числа разрядов регистра, используемых для представления входного сигнала, выполнения арифметических операций и т. д. Поэтому для уменьшения этих погрешностей следует увеличивать число разрядов чисел, обрабатываемых фильтром. Однако это приводит к усложнению фильтров, что может сделать их применение экономически неоправданным или технологически неосуществимым. Поэтому практически цифровые фильтры реализуют на основе компромиссных решений, выбирая соответствующую структуру фильтра и число разрядов регистров вычислительного устройства, которые обеспечивают выполнение требований, предъявляемых к точности обработки сигналов цифровыми фильтрами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Белецкий А. Ф. Теория линейных электрических цепей. М.: Радио и связь, 1986. 544 с.

Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Сов. радио, 1977. 608 с.

Завеке Г. В. Основы теории цепей. М.: Энергия, 1975. 751 с.

Ионкин П. А. Основы инженерной электрофизики, том 2, М.: Высшая школа, 1972. 634 с.

Карташев В. Г. Основы теории дискретных сигналов и цифровых фильтров. М.: Высшая школа, 1982. 109 с.

Нейман Л. Р., Демирчан К. С. Теоретические основы электротехники, том 1. Л.: Энергия, 1967. 522 с.

Путевая блокировка и авторегулировка / Н. Ф. Котляренко, Ю. Ф. Соболев, И. З. Скрыпин и др.; под ред. Н. Ф. Котляренко. М.: Радио и связь, 1984. 320 с.

Хьюлсман Л. П., Аллен Ф. Е. Введение в теорию и расчет активных фильтров. М.: Радио и связь, 1984. 320 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Указатель построен по принципу использования ключевого слова, в качестве которого выбрано общее понятие «Фильтр», «Параметр». Определения к этому слову приведено, как правило, после него: «Фильтр активный» и т. д.

А

Аналого-цифровой преобразователь 313
Аппроксимация Баттерворта 253
— функции 253
— Чебышева 254
— эллиптическая 256

Б

База элементная 6
Баттерворта многочлен 254
Бел 164
Бруне функция 227

В

Варикап 32
Ветви графа 39
Воздействие 13
Волна напряжения и тока 6
— бегущая 121
— земляная 156
— междуфазовая 156
— отраженная 121
— падающая 118—120
— стоячая 126
Время прохождения групповое 121, 263

Г

Граф цепи ориентированный 39
Гиратор 83

Д

Двухполосник 50
— активный 11
— обратный 59
— реактивный 214
— эквивалентный 58, 215
Дерево графа 39
Диаграмма прохождения сигналов 106
— спектральная 167, 168
— уровней 166
Дискретизация 313
Длина волны 121
Добротность катушки индуктивности 281

Е

Единицы затухания 163

З

Замыкания графа 39
Затухания вносимое 182
— километрическое 120, 161
— рабочее 178, 184
— собственное 164
— фильтра 270, 271, 274
— четырехполосника 183—186
Звено 101, 102
— дифференцирующее 7
— интегрирующее 7
— системы автоматического регулирования 101
— фильтра 270

И

- Импульс напряжения и тока 24
- напряжения единичный 15
- Интеграл вероятности 173
- наложения 16
- Интегратор 81
- Интервал дискретизации 314
- Искажения сигналов 168
- амплитудно-частотные 169
- линейные 170
- нелинейные 170
- фазочастотные 169
- Источник напряжения 11
- тока 11
- графа 39
- распределенный 142

К

- Кабель коаксиальный 117
- симметричный 159
- Квантование 313
- Колебания переполнения 327
- Контур резонансный 213
- Корректор 208
- искажений амплитудно-частотных 257
- — фазочастотных 263
- Критерии качества 9
- Коэффициент бегущей волны 126
- изменения тока тракта передачи 189
- использования полосы пропуска-ния 290
- — — задерживания 292
- колометрический затухания 120
- отражения 125
- передачи мощности 180
- — напряжения 99
- — рабочий 202
- — тока 99
- — рабочий 202
- распространения волны 117
- фазы 120, 135

Л

- Линия без потерь 129
- искусственная 137, 138
- многопроводная 149
- несимметричная 113—115
- рельсовая 161
- симметричная 149, 155
- согласованная 125, 128
- с распределенными источниками 142
- экспоненциальная 148
- электрически длинная 129
- — короткая 131

М

- Матрица волновая 140, 203
- — рассеяния 141
- неопределенная 84
- параметров четырехполюсника 41—43
- проводимостей 42, 62
- соединения цепи 43
- транспонированная 44
- Метод Крамера 40
- символический 19
- Многополюсник 49
- Модель цепи линейная 11
- Моделирование цепи 11, 12
- Модуляция 32
- Мостовые схемы 193
- Мощность приемника активная 9

Н

- Напряжение единичное 23
- импульсное 24
- накачки 30
- Непер 164
- управляющее 30
- Нуль функции 57

О

- Отражение волн 125
- Отсчет 8
- Параметрон 36
- Параметры линии взаимные 150
- — волновые 115
- — первичные 115
- — рабочие 174
- передачи четырехполюсника рабо-чие 98, 100, 190
- — — собственные 94, 196
- — — характеристические 196
- — схем замещения 67
- — моста 74

П

- Полос затухания 285
- функции 57, 58
- Постоянная передачи линии 177
- — собственная 197
- Правила Кирхгофа 46
- Максвелла 47
- Представление сигналов временное 15, 16
- — операторное 15, 18
- — частотное 13, 16
- Преобразование Гильберта 107
- дискретное 18

- Лапласа 15
- Фурье 14
- частот 32, 279
- Преобразователь мощности идеальный 84
- отрицательных сопротивлений 81, 83
- Проводимость входная 40
- передачи 201
- переходная 28
- проводов линии взаимная 150
- — — собственная 150
- цепи переходная при единичном импульсе напряжения 23—25

Р

- Реакция цепи 13
- цифрового фильтра 325
- Реализация развязывания 246
- цепи 252
- Ребра графа 39
- Режим работы усилителя синхронный 35

С

- Свертка 16
- Свойство обратности 41
- Связь между характеристиками цепи 27
- обратная отрицательная 104
- — — положительная 103
- Синтез 50
- реактивных двухполюсников 229
- Согласование сопротивлений 10, 94, 290, 273, 181
- Соединение четырехполюсников встречное 103
- — параллельное 88
- — последовательное 86
- — с обратной связью 103
- — цепочечное 91
- Сопротивление линии волновое 118, 122
- — входное 41, 174
- — короткого замыкания 175, 176
- передачи 41, 201
- — холостого хода 175
- проводов линии взаимное 150
- — собственное 150
- двухполюсника 224
- четырехполюсника повторное 197
- — характеристическое 97, 195, 270
- — частотнозависимое 250
- электрическое 11
- Спектр 14
- Схема активного автономного четырехполюсника 147
- двухполюсника 51—53

- замещения линии 155
- — — с распределенными источниками 143
- — — четырехполюсника необратимого 78
- — — обратимого 68
- мостовая 193
- передающей системы с интеграторами 111
- «перекрытое Т» 87, 194, 195
- скрещенная 193
- цепи эквивалентная 12

Т

- Тракт межпроводный 156
- неоднородный 183
- провод—земля 156
- Трансформатор идеальный 77
- переходный 76

У

- Удлинитель 138
- Узлы графа 39
- Управление дифференциальное линии 116
- — состояния цепи 112
- — равновесия напряжения и токов 40
- — четырехполюсника 60
- — — необратимого 78, 79
- — — обратимого 60—64
- Уровень абсолютный 165
- измеряемой величины 164
- мощности 164
- напряжения 164
- относительный 165
- тока 164
- Усилитель операционный 79
- с обратной связью 103—105
- параметрический 35
- Условие минимума потерь в линии 162
- отсутствия искажений 169
- пропускания электрического фильтра 267, 294
- реализуемости функции передачи 107
- — физической реализуемости 58

Ф

- Фазовая скорость 120
- Фильтр 208
- активный 246
- верхних частот 240
- дискретный 314
- идеальный 283, 240, 241
- комбинированный 286
- мостовой 241

- настраиваемый 252
- нижних частот 237
- оптимальный 208
- полосовой 241
- прототип 315
- реализуемый
- типа К 270
- формирующий 208
- цепочечный 267
- цифровой не рекурсивный 315
- — рекурсивный 317
- Фильтрующие цепи 242
- Функция входная 41
- действительная положительная 227
- единичная 23
- передачи 22, 100
- передаточная 41
- системная 26
- сопротивления 223
- физически реализуемая 56, 57
- Фурье интеграл 14
- ряды 17

Х

- Характеристика цепи волновая 159
- — временная 170
- — импульсная 314
- — логарифмическая 199
- — операторная 21
- — частотная 20
- фильтра по сопротивлению 290
- — по затуханию 292

Ц

- Цепь дифференцирующая 23
- интегрирующая 23
- минимально-фазовая 108

- неразветвленная 11
- параметрическая 36
- разветвленная 39, 112
- резонансная 241
- рельсовая 10, 161
- с параметрами распределенными 114
- — — сосредоточенными 113
- — распределенными источниками 142
- физически реализуемая 56, 57
- электрическая 5, 12
- Цикл предельный 327

Ч

- Частота контрольная 300
- несущая 32
- среза 269
- Четырехполюсник активный автономный 147
- мостовой схемы 74
- необратимый 78
- неполный 73
- обратимый 60, 78
- пассивный 78
- симметричный 61
- скрещивания 74
- уравновешенный 67

Ш

- Шум квантования 323

Э

- Элемент цепи 11
- активный 11
- идеальный 11
- параметрический 36

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
--------------------	---

Глава 1

Условия работы и характеристики электрических цепей

1.1. Особенности условий работы, критериев оценки качества и методов анализа и синтеза электрических цепей	5
1.2. Линейная электрическая цепь как модель	11
1.3. Частотное и временное представления непрерывных воздействий и реакций	13
1.4. Временное и частотное представления импульсных сигналов	16
1.5. Характеристики электрических цепей	19
1.6. Определение реакции цепи на произвольные воздействия. Связи между характеристиками	27
1.7. Параметрические цепи	29

Глава 2

Приемы анализа и синтеза электрических цепей

2.1. Примеры разветвленных цепей в устройствах железнодорожной телемеханики и связи	37
2.2. Граф электрической цепи	38
2.3. Определение входных сопротивлений (проводимостей) и сопротивлений (проводимостей) передачи электрических цепей	39
2.4. Матрицы (Z) и (Y) разветвленной цепи	41
2.5. Матрицы соединений (инциденций) цепи	43
2.6. Определение входных и передаточных функций по графу цепи	45
2.7. Электрическая цепь как многополюсник. Двух- и четырехполюсники	49
2.8. Канонические схемы пассивных двухполюсников	51
2.9. Свойства функций входных сопротивлений (проводимостей) пассивных двухполюсников	56
2.10. Приемы построения схемы двухполюсника по заданной функции $Z(p)$ или $Y(p)$	58
2.11. Уравнения электрической цепи как четырехполюсника. Схемы замещения четырехполюсников	59
2.12. Уравнения передачи четырехполюсника	64
2.13. Направления практического использования теории четырехполюсника	67
2.14. Параметры схем замещения обратимых четырехполюсников	68
2.15. Схемы замещения и параметры необратимых четырехполюсников	78
2.16. Соединения четырехполюсников и определение параметров соединений	86
2.17. Цепочечное соединение четырехполюсников при согласованных нагрузках. Собственные параметры передачи	93

2.18. Смешанные соединения четырехполюсников	94
2.19. Входные и передаточные функции четырехполюсников	96
2.20. Рабочие коэффициенты и функции передачи напряжения, тока и мощности четырехполюсника	99
2.21. Звенья систем автоматического регулирования управления и связи. Соединения звеньев	101
2.22. Общие свойства функции передачи обратимых четырехполюсных цепей	107
2.23. Приемы синтеза обратимых четырехполюсников по заданной передаточной функции	108
2.24. Канонические схемы соединений интегрирующих звеньев с заданными передаточными функциями	110
2.25. Разветвленная электрическая цепь как динамическая система	112

Глава 3

Электрические цепи с распределенными параметрами (электрические линии)

3.1. Параметры и уравнения однородной уединенной электрической цепи	113
3.2. Волновые процессы в линии. Волновые параметры	118
3.3. Распределение напряжений и токов вдоль линии	127
3.4. Однородная уединенная линия как четырехполюсник	132
3.5. Волновые матрицы однородной линии	139
3.6. Линия, возбуждаемая распределенными источниками	142
3.7. Неоднородные линии	147
3.8. Волновые процессы в несимметричной двухпроводной линии	148

Глава 4

Частотные и временные характеристики цепей с распределенными параметрами

4.1. Волновые параметры линий телемеханики и связи и их частотные зависимости	159
4.2. Единицы затухания и уровни сигнала	163
4.3. Передача по линии широкополосных сигналов. Искажения сигналов	167
4.4. Временные характеристики однородной линии связи	170
4.5. Рабочие параметры передачи однородной линии связи	174
4.6. Рабочие характеристики неоднородных трактов	183

Глава 5

Параметры передачи электрических цепей как четырехполюсников

5.1. Собственные параметры передачи четырехполюсников	190
5.2. Рабочие параметры четырехполюсника и выражение их через собственные параметры передачи	200
5.3. Волновые матрицы четырехполюсника	202

Глава 6

Электрические цепи со специальными частотными и временными характеристиками

6.1. Устройства со специальными характеристиками в системах телемеханики и связи	208
6.2. Частотные зависимости сопротивлений и проводимостей двухполюсных цепей rC и методы их исследования	212
6.3. Частотные зависимости сопротивлений реактивных двухполюсников и приемы их исследования	214
6.4. Двухполюсники с потерями	224

6.5. Построение двухполюсников по заданной частотной характеристике сопротивления или проводимости	226
6.6. Схемы простейших фильтрующих и корректирующих цепей и их характеристики	237
6.7. Активные фильтры rC	246
6.8. Виды аппроксимации, применяемые при синтезе фильтрующих цепей	252
6.9. Корректоры амплитудно-частотных характеристик	257
6.10. Корректоры частотной характеристики группового времени прохождения	263

Глава 7

Электрические фильтры LC

7.1. Условия пропускания и задерживания цепочечных фильтров	267
7.2. Фильтр нижних частот типа k	270
7.3. Фильтр верхних частот типа k	273
7.4. Полосовой фильтр типа k	275
7.5. Преобразование масштаба частот	279
7.6. Влияние потерь и несогласованности нагрузок на характеристики фильтров	281
7.7. Фильтры типа m	284
7.8. Требования к электрическим фильтрам. Пример расчета	290
7.9. Мостовые фильтры	294
7.10. Принципы построения фильтрующих и корректирующих цепей на основе временных характеристик	301
7.11. Временные характеристики электрических фильтров	303

Глава 8

Цифровые фильтры

8.1. Понятие о цифровой обработке сигналов. Области применения цифровых фильтров	312
8.2. Линейная модель цифрового фильтра. Нерекурсивные и рекурсивные фильтры	313
8.3. Операторные характеристики и канонические схемы цифровых фильтров	317
8.4. Приемы построения цифровых фильтров по заданным характеристикам	318
8.5. Точность цифровых фильтров. Источники погрешностей в цифровых фильтрах и их оценка	322
Список литературы	328
Предметный указатель	329