Расчет электрических цепей постоянного тока методом эквивалентных преобразований

Основными законами, определяющими электрическое состояние любой электрической цепи, являются законы Кирхгофа.

На основе этих законов разработан ряд практических методов расчета цепей постоянного тока, позволяющих сократить вычисления при расчете сложных схем. Существенно упростить вычисления, а в некоторых случаях и снизить трудоемкость расчета, возможно с помощью эквивалентных преобразований схемы.

Преобразуют параллельные и последовательные соединения элементов, соединение «звезда» в эквивалентный «треугольник» и наоборот. Осуществляют замену источника тока эквивалентным источником ЭДС. Методом эквивалентных преобразований теоретически можно рассчитать любую цепь, и при этом использовать простые вычислительные средства. Или же определить ток в какой-либо одной ветви, без расчета токов других участков цепи.

В данном практикуме по теоретическим основам электротехники рассмотрены примеры расчета линейных электрических цепей постоянного тока с использованием эквивалентных преобразований типовых схем соединения источников и потребителей энергии, приведены расчетные формулы, а также задачи для самостоятельного решения.

Практикум предназначен для глубокой самостоятельной проработки и самоконтроля усвоения курса ТОЭ.

Задача 1. Для цепи (рис. 1), определить эквивалентное сопротивление относительно входных зажимов $a-g$, если известно: $R_1 = R_2 = 0{,}5$ Ом, $R_3 = 8$ Ом, $R_4 = R_5 = 1$ Ом, $R_6 = 12$ Ом, $R_7 = 15$ Ом, $R_8 = 2$ Ом, $R_9 = 10$ Ом, $R_{10} = 20$ Ом.

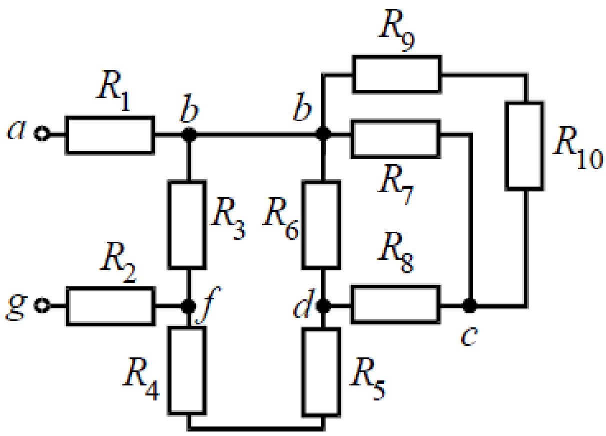


Рис. 1

Решение

Начнем преобразование схемы с ветви наиболее удаленной от источника, т.е. от зажимов $a-g$:

$$R_{11} = R_9 + R_{10} = 10+20 = 30 \text{ Ом};\qquad R_{12} = \frac{R_{11} \cdot R_7}{R_{11} + R_7} = \frac{30 \cdot 15}{30 + 15} = 10 \text{ Ом};$$

$$R_{13} = R_8 + R_{12} = 2+10 = 12 \text{ Ом};\qquad R_{14} = \frac{R_6 \cdot R_{13}}{R_6 + R_{13}} = \frac{12 \cdot 12}{12 + 12} = 6 \text{ Ом};$$

$$R_{15} = R_{14} + R_5 + R_4 = 6+1+1 = 8 \text{ Ом};\qquad R_{16} = \frac{R_3 \cdot R_{15}}{R_3 + R_{15}} = \frac{8 \cdot 8}{8 + 8} = 4 \text{ Ом};$$

$$R_э = R_1 + R_{16} + R_2 = 0{,}5+4+0{,}5 = 5 \text{ Ом}.$$

Задача 2. Для цепи (рис. 2, *а*), определить входное сопротивление если известно: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 40$ Ом.

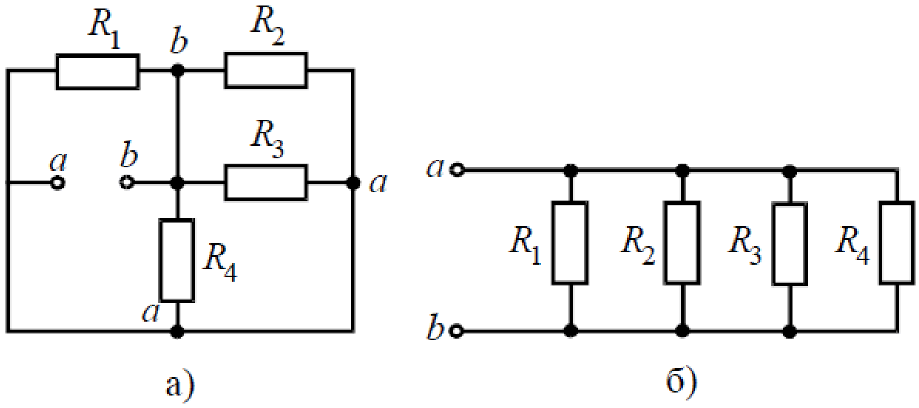


Рис. 2

Решение

Исходную схему можно перечертить относительно входных зажимов (рис. 2, *б*), из чего видно, что все сопротивления включены параллельно. Так как величины сопротивлений равны, то для определения величины эквивалентного сопротивления можно воспользоваться формулой:

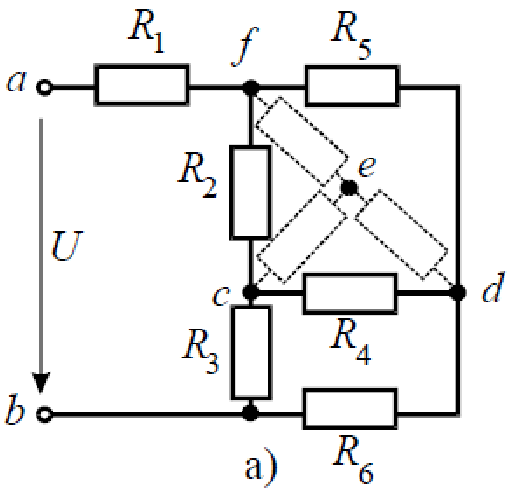
$$R_э = \frac{R}{n},$$

где R – величина сопротивления, Ом;

n – количество параллельно соединенных сопротивлений.

$$R_э = \frac{40}{4} = 10 \text{ Ом.}$$

Задача 3. Определить эквивалентное сопротивление относительно зажимов a–b, если $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 10$ Ом (рис. 3, *а*).



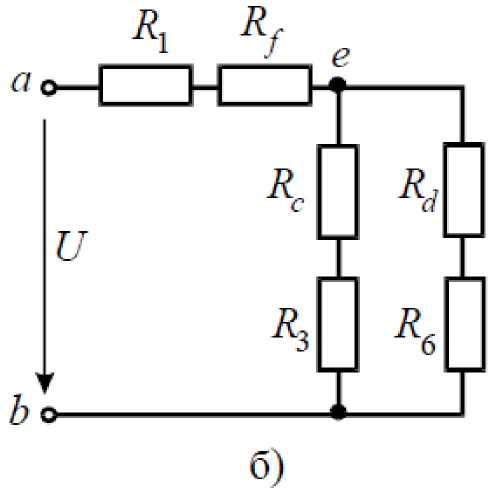


Рис. 3

Решение

Преобразуем соединение «треугольник» $f-d-c$ в эквивалентную «звезду». Определяем величины преобразованных сопротивлений (рис. 3, *б*):

$$R_f = \frac{R_2 \cdot R_5}{R_2 + R_5 + R_4} = \frac{10 \cdot 10}{10+10+10} = \frac{100}{30} = 3{,}33 \text{ Ом.}$$

По условию задачи величины всех сопротивлений равны, а значит:

$$R_f = R_d = R_c = 3{,}33 \text{ Ом.}$$

На преобразованной схеме получили параллельное соединение ветвей между узлами e–b, тогда эквивалентное сопротивление равно:

$$R_{eb} = \frac{(R_c + R_3)\cdot(R_d + R_6)}{(R_c + R_3)+(R_d + R_6)} = \frac{(3{,}33+10)\cdot(3{,}33+10)}{(3{,}33+10)+(3{,}33+10)} = 6{,}67 \text{ Ом.}$$

И тогда эквивалентное сопротивление исходной схемы представляет последовательное соединение сопротивлений:

$$R_{ab} = R_1 + R_f + R_{eb} = 10+3{,}33+6{,}67 = 20 \text{ Ом.}$$

Задача 4. В заданной цепи (рис. 4, *а*) определить входные сопротивления ветвей *a−b*, *c–d* и *f−b*, если известно, что: R_1 = 4 Ом, R_2 = 8 Ом, R_3 =4 Ом, R_4 = 8 Ом, R_5 = 2 Ом, R_6 = 8 Ом, R_7 = 6 Ом, R_8 =8 Ом.

Решение

Для определения входного сопротивления ветвей исключают из схемы все источники ЭДС. При этом точки *c* и *d*, а также *b* и *f* соединяются накоротко, т.к. внутренние сопротивления идеальных источников напряжения равны нулю.

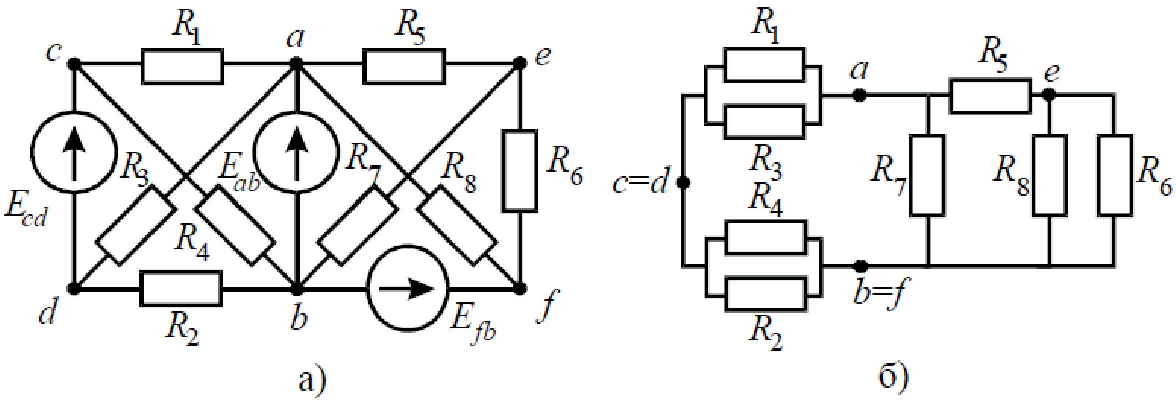


Рис. 4

Ветвь *a−b* разрывают, и т.к. сопротивление $R_{a\text{–}b}$ = 0, то входное сопротивление ветви равно эквивалентному сопротивлению схемы относительно точек *a* и *b* (рис. 4, *б*):

$$R'_{ab} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_4} = \frac{4 \cdot 4}{4+4} + \frac{8 \cdot 8}{8+8} = 6 \text{ Ом};$$

$$R''_{ab} = \frac{\left(R_5 + \dfrac{R_6 \cdot R_8}{R_6 + R_8}\right) \cdot R_7}{R_5 + \dfrac{R_6 \cdot R_8}{R_6 + R_8} + R_7} = \frac{\left(2 + \dfrac{8 \cdot 8}{8+8}\right) \cdot 6}{2 + \dfrac{8 \cdot 8}{8+8} + 6} = 3 \text{ Ом};$$

$$R_{ab} = \frac{R'_{ab} \cdot R''_{ab}}{R'_{ab} + R''_{ab}} = \frac{6 \cdot 3}{6+3} = 2 \text{ Ом}.$$

Аналогично определяются входные сопротивления ветвей R_{cd} и R_{bf}. Причем, при вычислении сопротивлений учтено, что соединение накоротко точек *a* и

b исключает из схемы сопротивления R_1, R_2, R_3, R_4 в первом случае, и R_5, R_6, R_7, R_8 во втором случае.

$$R_{cd} = \frac{R_1 \cdot R_4}{R_1 + R_4} + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{4 \cdot 8}{4+8} + \frac{8 \cdot 4}{8+4} = \frac{16}{3} \text{ Ом}$$

$$R_{bf} = \frac{\left(R_6 + \dfrac{R_5 \cdot R_8}{R_5 + R_8}\right) \cdot R_7}{R_6 + \dfrac{R_5 \cdot R_8}{R_5 + R_8} + R_7} = \frac{\left(8 + \dfrac{2 \cdot 8}{2+8}\right) \cdot 6}{8 + \dfrac{2 \cdot 8}{2+8} + 6} = \frac{48}{13} \text{ Ом.}$$

Задача 5. В цепи (рис. 5) определить токи I_1, I_2, I_3 методом эквивалентных преобразований и составить баланс мощностей, если известно: R_1 = 12 Ом, R_2 = 20 Ом, R_3 = 30 Ом, U = 120 В.

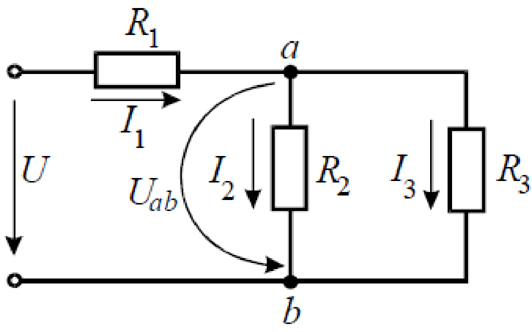


Рис. 5

Решение

Эквивалентное сопротивление для параллельно включенных сопротивлений:

$$R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} = 12 \text{ Ом.}$$

Эквивалентное сопротивление всей цепи:

$$R_э = R_1 + R_{23} = 12 + 12 = 24 \text{ Ом.}$$

Ток в неразветвленной части схемы:

$$I_1 = U / R_э = 120/24 = 5 \text{ А.}$$

Напряжение на параллельных сопротивлениях:

$$U_{ab} = R_{23} \cdot I_1 = 12 \cdot 5 = 60 \text{ В.}$$

Токи в параллельных ветвях:

$$I_2 = U_{ab} / R_2 = 60/20 = 3 \text{ А;}$$
$$I_3 = U_{ab} / R_3 = 60/30 = 2 \text{ А.}$$

Баланс мощностей:

$$P_{ист} = I_1 \cdot U = 5 \cdot 120 = 600 \text{ Вт;}$$
$$P_{потр} = I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3 = 5^2 \cdot 12 + 3^2 \cdot 20 + 2^2 \cdot 30 = 600 \text{ Вт.}$$

Задача 6. В цепи (рис. 6, *а*), определить показания амперметра, если известно: R_1 = 2 Ом, R_2 = 20 Ом, R_3 = 30 Ом, R_4 = 40 Ом, R_5 = 10 Ом, R_6 = 20 Ом, E = 48 В. Сопротивление амперметра можно считать равным нулю.

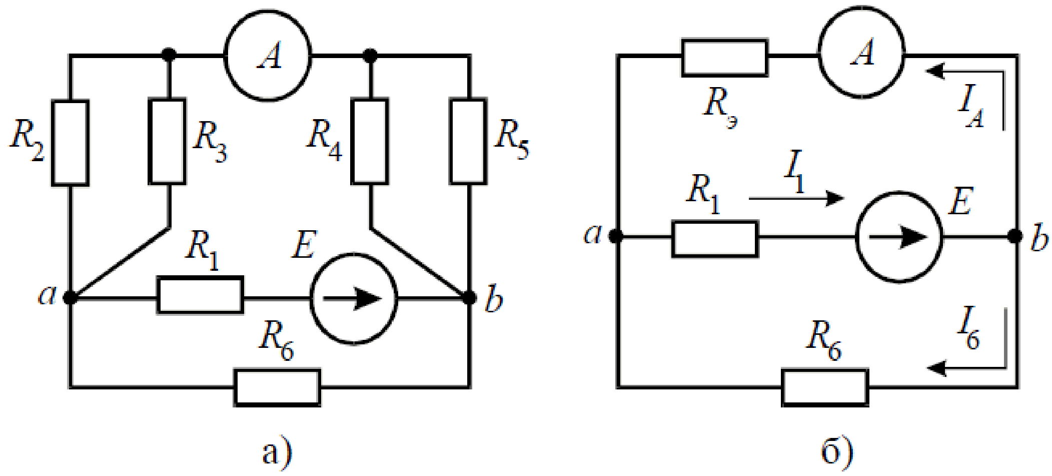


Рис. 6

Решение

Если сопротивления R_2, R_3, R_4, R_5 заменить одним эквивалентным $R_Э$, то исходную схему можно представить в упрощенном виде (рис. 6, *б*).

Величина эквивалентного сопротивления:

$$R_э = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} + \frac{R_4 \cdot R_5}{R_4 + R_5} = \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} + \frac{40 \cdot 10}{40 + 10} = 20 \text{ Ом}$$

Преобразовав параллельное соединение сопротивлений $R_Э$ и R_6 схемы (рис. 6, *б*), получим замкнутый контур, для которого по второму закону Кирхгофа можно записать уравнение:

$$I_1 \cdot \left(R_1 + \frac{R_э \cdot R_6}{R_э + R_6} \right) = E,$$

откуда ток I_1:

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + \dfrac{R_э \cdot R_6}{R_э + R_6}} = \frac{48}{2 + \dfrac{20 \cdot 20}{20 + 20}} = 4 \text{ А.}$$

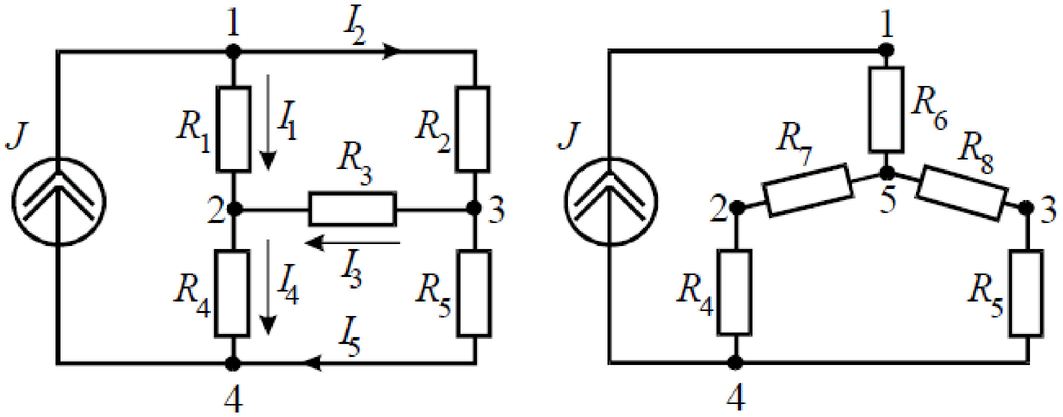
Напряжение на зажимах параллельных ветвей U_{ab} выразим из уравнения по закону Ома для пассивной ветви, полученной преобразованием $R_Э$ и R_6:

$$U_{ab} = I_1 \cdot \frac{R_э \cdot R_6}{R_э + R_6}.$$

Тогда амперметр покажет ток:

$$I_A = I_1 \cdot \frac{R_6}{R_э + R_6} = 4 \cdot \frac{20}{20 + 20} = 2 \text{ А}.$$

Задача 7. Определить токи ветвей схемы (рис. 7, *а*), если $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 3$ Ом, $J = 5$ А, $R_5 = 5$ Ом.



а) б)

Рис. 7

Решение

Преобразуем «треугольник» сопротивлений R_1, R_2, R_3 в эквивалентную «звезду» R_6, R_7, R_8 (рис. 7, *б*) и определим величины полученных сопротивлений:

$$R_6 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{3 \cdot 3}{3+3+3} = 1 \text{ Ом};$$

$$R_7 = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{3 \cdot 3}{3+3+3} = 1 \text{ Ом};$$

$$R_8 = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{3 \cdot 3}{3+3+3} = 1 \text{ Ом}.$$

Преобразуем параллельное соединение ветвей между узлами 4 и 5

$$R_9 = \frac{(R_4 + R_7)\cdot(R_5 + R_8)}{(R_4 + R_7) + (R_5 + R_8)} = \frac{(1+3)\cdot(1+5)}{1+3+1+5} = 2{,}4 \text{ Ом}.$$

Ток в контуре, полученном в результате преобразований, считаем равным току источника тока J, и тогда напряжение:

$$U_{54} = J \cdot R_9 = 5 \cdot 2{,}4 = 12 \text{ В}.$$

И теперь можно определить токи I_4 и I_5:

$$I_4 = \frac{U_{54}}{R_7 + R_4} = \frac{12}{1+3} = 3 \text{ А}; \qquad I_5 = \frac{U_{54}}{R_8 + R_5} = \frac{12}{1+5} = 2 \text{ А}.$$

Возвращаясь к исходной схеме, определим напряжение U_{32} из уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$U_{32} + I_4 R_4 - I_5 R_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad U_{32} = I_5 R_5 - I_4 R_4 = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 1 \text{ В}.$$

Тогда ток в ветви с сопротивлением R_3 определится:

$$I_3 = \frac{U_{32}}{R_3} = \frac{1}{3} = 0{,}33 \text{ А}.$$

Величины оставшихся неизвестными токов можно определить из уравнений по первому закону Кирхгофа для узлов 3 и 1:

$$I_2 - I_3 - I_5 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; I_2 = I_3 + I_5 = 0{,}33 + 2 = 2{,}33 \text{ А};$$

$$J - I_1 - I_2 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; I_1 = J - I_2 = 5 - 2{,}33 = 2{,}67 \text{ А}.$$