

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

ММСП

Содержание

Введение.....	3
1. Приближение табличных данных конкретной системой базисных функций по методу наименьших квадратов.....	4
2. Численное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.....	11
Заключение.....	21
Литература.....	22

ВВЕДЕНИЕ

Инженерные и научные задачи часто приводят к решению различных уравнений или систем уравнений, описывающих поведение параметров объекта, например динамические нагрузки на строительную конструкцию или тепловые потоки через стены дома. Совокупность всех уравнений и дополнительных условий, которым должно удовлетворять решение, называется математической моделью. Простая математическая модель – это совокупность алгебраических формул, по которым явно вычисляются искомые величины. Однако чаще всего поведение параметров описывается дифференциальными уравнениями в частных производных. Найти решение этих сложных задач можно только с использованием современных быстродействующих ЭВМ. Решение сложной математической задачи на ЭВМ включает в себя необходимые этапы выбора метода решения, создания алгоритма, разработки программы и ее тестирования. После этого можно применять разработанный пакет программ для решения нужной задачи. Даже для того, чтобы воспользоваться стандартной, т.е. уже готовой программой, нужно иметь представление о существующих методах решения, их преимуществах, недостатках и особенностях использования.

1. Приближение табличных данных конкретной системой базисных функций по методу наименьших квадратов.

1.1 Постановка задачи

Программой `linfit` приблизить таблично заданную функцию на указанном отрезке с заданным числом точек по методу наименьших квадратов для указанной системы базисных функций.

$$f = 2: y = \cos^5 x; [0; \pi]; 315 \text{ точек}; \varphi_j(x) = x^j, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

1.2 Метод решения

Очень часто, особенно при анализе эмпирических данных возникает необходимость найти в явном виде функциональную зависимость между величинами x и y , которые получены в результате измерений.

При аналитическом исследовании взаимосвязи между двумя величинами x и y производят ряд наблюдений и в результате получается таблица значений:

x	x_1	x_2	\dots	x_i	\dots	x_n
y	y_1	y_2	\dots	y_i	\dots	y_n

Эта таблица обычно получается как итог каких-либо экспериментов, в которых x_i (независимая величина) задается экспериментатором, а y_i получается в результате опыта. Поэтому эти значения y_i будем называть эмпирическими или опытными значениями.

Между величинами x и y существует функциональная зависимость, но ее аналитический вид обычно неизвестен, поэтому возникает практически важная задача - найти эмпирическую формулу

$$y = f(x; a_1, a_2, \dots, a_m), \quad (1.1)$$

(где a_1, a_2, \dots, a_m - параметры), значения которой при $x = x_i$ возможно мало отличались бы от опытных значений y_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Обычно указывают класс функций (например, множество линейных, степенных, показательных и т.п.) из которого выбирается функция $f(x)$, и далее определяются наилучшие значения параметров.

Если в эмпирическую формулу (1.1) подставить исходные x_i , то получим теоретические значения $y_i^T = f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_m)$, где $i = 1, 2, \dots, n$.

Разности $y_i^T - y_i$ называются отклонениями и представляют собой расстояния по вертикали от точек M_i до графика эмпирической функции.

Согласно методу наименьших квадратов наилучшими коэффициентами a_1, a_2, \dots, a_m считаются те, для которых сумма квадратов отклонений найденной эмпирической функции от заданных значений функции

$$S(a_1, a_2, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n [f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_m) - y_i]^2 \quad (1.2)$$

будет минимальной.

Поясним геометрический смысл метода наименьших квадратов.

Каждая пара чисел (x_i, y_i) из исходной таблицы определяет точку M_i на плоскости XOY . Используя формулу (1.1) при различных значениях коэффициентов a_1, a_2, \dots, a_m можно построить ряд кривых, которые являются графиками функции (1.1). Задача состоит в определении коэффициентов a_1, a_2, \dots, a_m таким образом, чтобы сумма квадратов расстояний по вертикали от точек $M_i(x_i, y_i)$ до графика функции (1.1) была наименьшей.

Построение эмпирической формулы состоит из двух этапов: выяснение общего вида этой формулы и определение ее наилучших параметров.

Если неизвестен характер зависимости между данными величинами x и y , то вид эмпирической зависимости является произвольным. Предпочтение отдается простым формулам, обладающим хорошей точностью. Удачный

выбор эмпирической формулы в значительной мере зависит от знаний исследователя в предметной области, используя которые он может указать класс функций из теоретических соображений. Большое значение имеет изображение полученных данных в декартовых или в специальных системах координат (полулогарифмической, логарифмической и т.д.). По положению точек можно примерно угадать общий вид зависимости путем установления сходства между построенным графиком и образцами известных кривых.

Определение наилучших коэффициентов a_1, a_2, \dots, a_m входящих в эмпирическую формулу производят хорошо известными аналитическими методами.

Для того, чтобы найти набор коэффициентов a_1, a_2, \dots, a_m , которые доставляют минимум функции S , определяемой формулой (1.2), используем необходимое условие экстремума функции нескольких переменных - равенство нулю частных производных. В результате получим нормальную систему для определения коэффициентов a_i ($i = 1, 2, \dots, m$):

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0. \quad (1.3)$$

Таким образом, нахождение коэффициентов a_i сводится к решению системы (1.3).

Эта система упрощается, если эмпирическая формула (1.1) линейна относительно параметров a_i , тогда система (1.3) - будет линейной.

Конкретный вид системы (1.3) зависит от того, из какого класса эмпирических формул мы ищем зависимость (1.1). В случае линейной зависимости $y = a_1 + a_2 x$ система (1.3) примет вид:

$$\begin{cases} a_1 n + a_2 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i, \\ a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{cases} \quad (1.4)$$

Эта линейная система может быть решена любым известным методом (методом Гаусса, простых итераций, формулами Крамера). В случае квадратичной зависимости $y = a_1 + a_2x + a_3x^2$ система (1.3) примет вид:

$$\begin{cases} a_1n + a_2 \sum_{i=1}^n x_i + a_3 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \quad , \\ a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_3 \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad , \\ a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_3 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \quad . \end{cases} \quad (1.5)$$

Метод наименьших квадратов позволяет «приблизить» исходные данные с помощью линейной комбинации любых элементарных функций. Часто используются приближения следующими функциями:

- линейной $F(x) = a_1 + a_2x$,
- тригонометрической $F(x) = a_1\sin(x) + a_2\cos(x)$,
- экспоненциальной $F(x) = a_1e^x + a_2e^{-x}$

Некоторые из них реализованы в MathCAD в виде стандартных функций.

С помощью функции `linfit` можно подобрать коэффициенты a_i для моделирования данных в виде линейной комбинации произвольных функций:

$$y = a_0f_0(x) + a_1f_1(x) + \dots + a_nf_n(x)$$

Функция `linfit (vx, vy, F)` возвращает вектор, содержащий коэффициенты, используемые, чтобы создать линейную комбинацию функций из F, дающую наилучшую аппроксимацию данных из векторов v_x и v_y. F — функция, которая возвращает вектор, состоящий из функций, которые нужно объединить в виде линейной комбинации.

1.3 Текст программы на MathCAD

$$M := 315 \quad a := 0 \quad b := \pi \quad h := \frac{b - a}{M} \quad h = 0.009973$$

$$i := 0, 1 \dots M \quad x_i := i \cdot h + a \quad y_i := \cos(x_i)^5$$

$$F(x) := \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix}$$

+

$$\text{alpha} := \text{linfit}(x, y, F)$$

$$\text{alpha} = \begin{pmatrix} 1.019312 \\ -0.127911 \\ -3.178551 \\ 3.519171 \\ -1.358226 \\ 0.172935 \end{pmatrix}$$

$$r_i := y_i - u(x_i)$$

$$e21 := r \cdot r \quad e21 = 0.075182 \quad S1 := \sqrt{\frac{1 \cdot e21}{M}} \quad S1 = 0.015449$$

1.4 Графики:

а) исходная и приближающая зависимости (рис. 1,2)

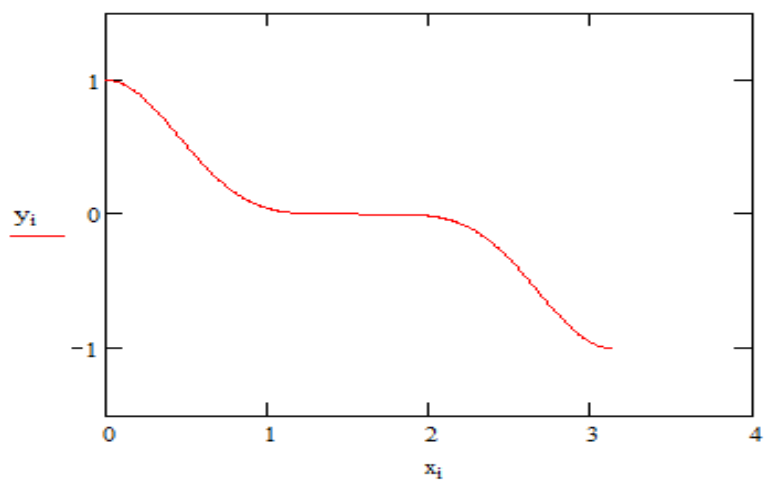


Рисунок 1. Исходная зависимость.

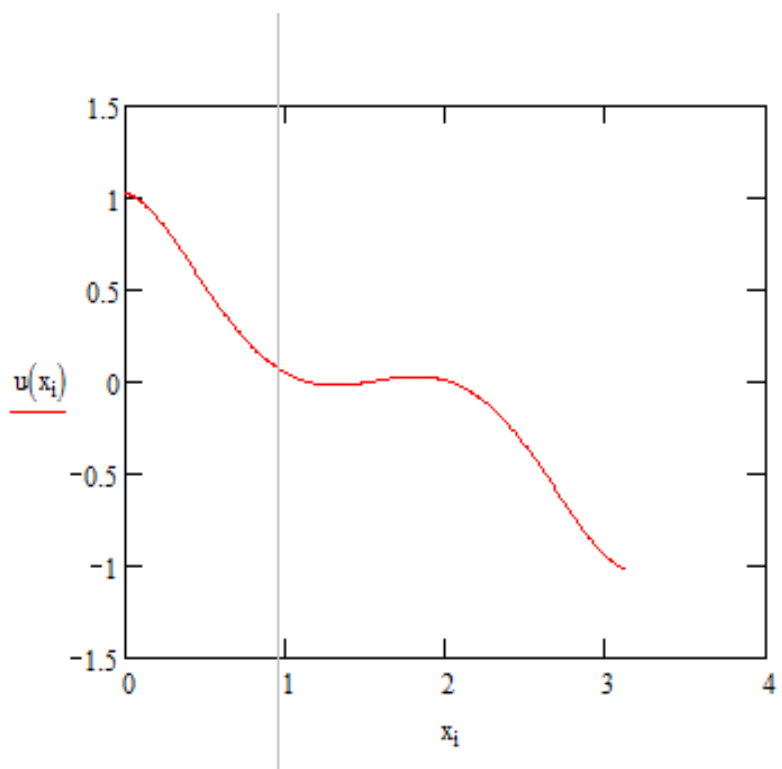


Рисунок 2. Приближающая зависимость

б) погрешности: поточечная (рис. 3)

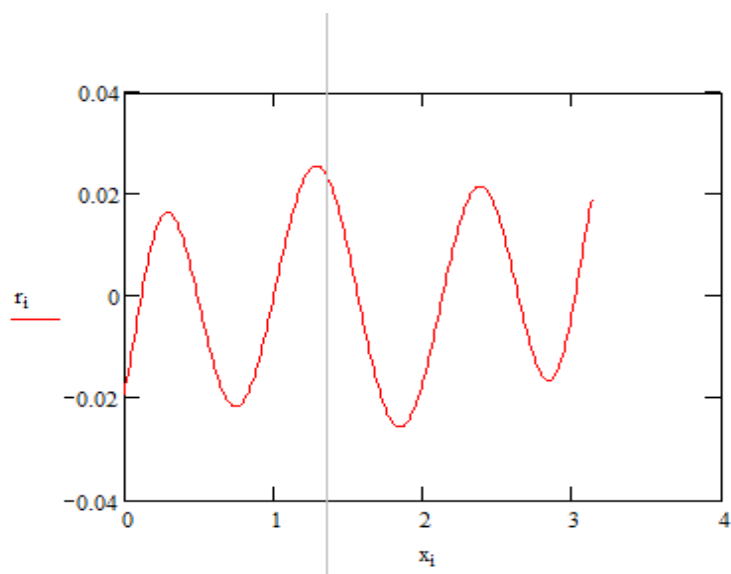


Рисунок 3. Поточечная погрешность

1.5 Выводы.

Применение функции `linfit`, входящей в пакет MathCAD, позволяет подобрать коэффициенты линейной комбинации функций, приближающей экспериментальные данные. В MathCAD существуют средства для проведения регрессии самого общего вида. Это означает, что можно использовать любые функции в качестве аппроксимирующих и находить оптимальные значения любых их параметров, как линейных, так и нелинейных. В том случае, если регрессионная функция является линейной по всем параметрам, т.е. представляет линейную комбинацию жестко заданных функций, провести регрессию можно с помощью встроенной функции `linfit(vx,vy,F)`. Аргумент F - это векторная функция, из элементов которой должна быть построена линейная комбинация, наилучшим образом аппроксимирующая заданную последовательность точек. Результатом работы функции `linfit` является вектор линейных коэффициентов. Каждый элемент этого вектора - коэффициент при функции, стоящей на соответствующем месте в векторе F . Таким образом, для того чтобы получить регрессионную функцию, достаточно скалярно перемножить эти два вектора.

2. Численное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.

1.1 Постановка задачи.

Программой `rkfixed` численно решить указанную задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка на отрезке $[0; 1]$ с шагом $h = 0,001$

$$f=2: y' = x^5; y(0) = 0$$

1.2 Метод решения

Обыкновенными дифференциальными уравнениями называются уравнения с одной независимой переменной. Если независимых переменных больше, чем одна, то уравнение называется дифференциальным уравнением с частными производными.

С помощью обыкновенных дифференциальных уравнений строятся модели движения систем взаимодействующих частиц, электротехнических процессов в электрических цепях, кинетики химических реакций, процессов заселения уровней энергии в высокотемпературных средах и многих других объектов и процессов.

К задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений сводятся некоторые задачи для уравнений в частных производных, когда многомерное уравнение позволяет провести разделение переменных (например, при вычислении энергетического спектра частиц в полях определенной симметрии).

Рассмотрим ОДУ первого порядка, записанное в общем виде:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2.1)$$

Общее решение уравнения содержит произвольную константу C , т.е. является однопараметрическим семейством интегральных кривых

$$y(x) = \int f(x, y)dx + C \quad (2.2)$$

Для выбора конкретной интегральной кривой следует определить значение константы C , для чего достаточно задать начальные данные

$$y(x_0) = y_0$$

Несмотря на внешнюю простоту уравнения (2.1), решить его аналитически, т.е. найти общее решение $y = y(x, C)$ с тем, чтобы затем выделить из него интегральную кривую $y = y(x)$, проходящую через точку (x_0, y_0) удастся лишь для некоторых специальных типов уравнений. В общем случае решение задачи можно найти только приближенно.

Одними из численных методов решения дифференциальных уравнений являются методы Рунге-Кутты, обеспечивающие построение разностных схем (методов) различного порядка точности. Наиболее употребительны схемы (методы) второго и четвертого порядков.

Предварительно введем некоторые понятия и определения. Сеткой на отрезке $[a, b]$ называется фиксированное множество точек этого отрезка ω_N . Функция, определенная в данных точках, называется сеточной функцией.

Координаты точек x_i удовлетворяют условиям:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-2} < x_{N-1} < x_N = b .$$

Точки $x_i \in \omega_N$ являются узлами сетки. Равномерной сеткой на $[a, b]$ называется множество точек

$$\omega_h = \{x_i = a + ih\} , i = 0, 1, 2, \dots, N ,$$

где $h = \frac{b-a}{N}$ - шаг сетки.

При решении дифференциальных уравнений приближенным методом основным является вопрос о сходимости. Применительно к разностным методам традиционно более употребительно понятие сходимости при $h \rightarrow 0$. Обозначим значения сеточной функции y_i значения точного

решения дифференциального уравнения (1) в узле i - $v(x_i)$ (y_i являются приближенными значениями $v(x_i)$). Сходимость при $h \rightarrow 0$ означает следующее. Фиксируем точку x и строим совокупность сеток ω_h таким образом, что $h \rightarrow 0$ и $x_i = a + ih = x$ (при этом $i \rightarrow \infty$). Тогда считают, что численный метод сходится в точке x , если $|y_i - v(x_i)| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, $x_i = x$. Метод сходится на отрезке $[a, b]$, если он сходится в каждой точке $x \in [a, b]$. Говорят, что метод имеет p -й порядок точности, если можно найти такое число $p > 0$, что $|y_i - v(x_i)| = O(h^p)$ при $h \rightarrow 0$.

Введем далее понятие невязки или погрешности аппроксимации разностного уравнения, заменяющего заданное дифференциальное уравнение, на решении исходного уравнения, т.е. невязка ψ_i представляет собой результат подстановки точного решения уравнения (1) $v(x)$ в разностное уравнение. Например, (2.1) можно заменить следующим простейшим разностным уравнением

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \varphi(x_i, y_i) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad y_0 = v_0.$$

Тогда невязка определится следующим выражением

$$\psi_i = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \varphi(x_i, y_i).$$

Приближенное решение не совпадает вообще говоря с u_i , поэтому невязка ψ_i в i -ой точке не равна нулю. Вводят следующее определение: численный метод аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение, если $\psi_i \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, и имеет p -й порядок точности, если $\psi_i = O(h^p)$.

Доказывается, что порядок точности численного метода решения дифференциального уравнения совпадает с порядком аппроксимации при достаточно общих предположениях.

Теперь перейдем к анализу схем Рунге-Кутты. Сначала обратимся к схемам второго порядка точности.

Используя формулу Тейлора, решение дифференциального уравнения (2.1) можно представить в виде

$$v_{n+1} = v_n + h_n v'_n + \frac{1}{2} h_n^2 v''_n + \dots, \quad (2.3)$$

где обозначено $v_n = v(x_n)$, $v'_n = v'(x_n)$, $h_n = x_{n+1} - x_n$.

Отметим, что согласно (2.1) $v'_n = \varphi(x_n, v_n)$,
 $v''_n = \varphi'_x(x_n, v_n) \varphi'_v(x_n, v_n)$.

Далее удерживаем только выписанные члены ряда. Представим вторую производную следующим образом:

$$v''_n = (v'_n)' = \frac{\varphi(\tilde{x}, \tilde{v}) - \varphi(x_n, v_n)}{\Delta x},$$

где \tilde{x} , \tilde{v} - пока неизвестные величины. Пусть

$$\tilde{x} = x_n + \gamma h, \quad \tilde{v} = v_n + \delta h.$$

Обозначим приближенное значение решения в узле с номером n через y_n (именно это решение будет получаться после того, как мы ограничим ряд членами с порядком не выше второго).

Имеем

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h_n \varphi(x_n, y_n) + \frac{1}{2} h_n^2 \left[\frac{\varphi(x_n + \gamma h_n, y_n + \delta h_n) - \varphi(x_n, y_n)}{\Delta x} \right] = \\ &= y_n + h_n [\beta \varphi(x_n, y_n) + \alpha \varphi(x_n + \gamma h_n, y_n + \delta h_n)] \end{aligned}$$

Введенные здесь параметры α, β, γ и δ подлежат определению.

Разлагая правую часть в ряд Тейлора и приводя подобные члены, получим последовательно

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h_n \{ \beta \cdot \varphi(x_n, y_n) + \alpha \cdot [\varphi(x_n, y_n) + \\
&\varphi'_x(x_n, y_n)\gamma h_n + \varphi'_y(x_n, y_n)\delta h_n] \} = \\
&= y_n + (\alpha + \beta)h_n \varphi(x_n, y_n) + \alpha h_n^2 [\gamma \varphi'_x(x_n, y_n) + \delta \varphi'_y(x_n, y_n)]
\end{aligned} \quad (2.4)$$

Условием выбора параметров α, β, γ и δ поставим близость выражения (2.4) ряду (2.3), тогда

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\gamma = \frac{1}{2}, \quad \alpha\delta = \frac{1}{2} \varphi(x_n, y_n).$$

Один параметр остается свободным. Пусть это будет α , тогда

$$\beta = 1 - \alpha, \quad \gamma = \frac{1}{2\alpha}, \quad \delta = \frac{1}{2\alpha} \varphi(x_n, y_n)$$

и окончательно из (2.4) с учетом найденных отношений для β, γ и δ получим

$$y_{n+1} = y_n + h_n \left\{ (1 - \alpha) \varphi(x_n, y_n) + \alpha \varphi \left(x_n + \frac{1}{2\alpha} h_n, y_n + \frac{h_n}{2\alpha} \varphi'(x_n, y_n) \right) \right\} \quad (2.5)$$

Соотношение (2.5) описывает однопараметрическое семейство двучленных формул Рунге-Кутты.

В специальной литературе доказывается, что если $\varphi(x, y)$ непрерывна и ограничена вместе со своими вторыми производными, то приближенное решение схемы (2.5) равномерно сходится к точному решению с погрешностью $O(\max h_n^2)$, т.е. схема (2.5) обладает вторым порядком точности.

В практике расчетов используют формулы (2.5) при значениях параметра $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$.

$$\text{Случай } \alpha = \frac{1}{2}.$$

Из (4) выводим

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [\varphi(x_n, y_n) + \varphi(x_n + h, y_n + h\varphi(x_n, y_n))] \quad , \quad (2.6)$$

Применение формулы (2.6) сводится к следующей последовательности шагов:

1. Вычисляется грубо значение функции \bar{y}_{n+1} (по схеме ломаных)

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + h_n \varphi(x_n, y_n) \quad .$$

2. Определяется наклон интегральной кривой в точке (x_{n+1}, y_{n+1})

$$\bar{y}'_{n+1} = \varphi(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) \quad .$$

3. Находится среднее значение производной функции на шаге h_n

$$y'_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [\varphi(x_n, y_n) + \bar{y}'_{n+1}] \quad ,$$

4. Рассчитывается значение функции в $(n + 1)$ -м узле

$$y_{n+1} = y_n + h y'_{n+\frac{1}{2}} \quad .$$

Данная схема имеет специальное название "предиктор - корректор".

Случай $\alpha = 1$.

Согласно (4) получаем

$$y_{n+1} = y_n + h_n \varphi \left[x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} \varphi(x_n, y_n) \right] \quad .$$

Задача решается посредством следующих шагов:

1. Вычисляется значение функции в половинном узле

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h_n}{2} \varphi(x_n, y_n) \quad .$$

2. Определяется значение производной в узле $n + \frac{1}{2}$

$$y'_{n+\frac{1}{2}} = \varphi \left(x_n + \frac{h_n}{2}, y_{n+\frac{1}{2}} \right) \quad .$$

3. Находится значение функции в $(n + 1)$ -м узле

$$y_{n+1} = y_n + h_n y'_{n+\frac{1}{2}} .$$

Помимо рассмотренных выше двучленных схем широкое распространение в практике расчетов имеют схемы Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Ниже даются без вывода соответствующие формулы:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) / 6 , \\ k_1 &= h_n \varphi(x_n, y_n) , \quad k_2 = h_n \varphi(x_n + h_n / 2, y_n + k_1 / 2) , \\ k_3 &= h_n \varphi(x_n + h_n / 2, y_n + k_2 / 2) , \quad k_4 = h_n \varphi(x_n + h_n, y_n + k_3) . \end{aligned} \quad (2.7),$$

где k – стадия, шаг

Схемы с большим числом членов практически не применяются. Пятичленные формулы обеспечивают четвертый порядок точности, шестичленные формулы имеют шестой порядок, но их вид весьма сложен.

Погрешности приведенных схем Рунге-Кутты определяются максимальными значениями соответствующих производных.

Оценку погрешностей легко получить для частного случая правой части дифференциального уравнения

$$\varphi(x, v) \equiv \varphi(x) .$$

В этом случае решение уравнения может быть сведено к квадратуре и все схемы разностного решения переходят в формулы численного интегрирования. Например, схема (2.6) принимает вид

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2} [\varphi(x_n) + \varphi(x_{n+1})] ,$$

то есть имеет вид формулы трапеций, а схема (2.7) переходит в схему

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2} [\varphi(x_n) + 4\varphi(x_n + h_n / 2) + \varphi(x_n + h_n)] ,$$

представляющую собой формулу Симпсона с шагом $\frac{h_n}{2}$.

Мажорантные оценки погрешности формул трапеций и Симпсона известны. Видно, что точность схем Рунге-Кутта достаточно высока.

Выбор той или иной из приведенных схем для решения конкретной задачи определяется следующими соображениями. Если функция $\varphi(x, v)$ в правой части уравнения непрерывна и ограничена, а также непрерывны и ограничены ее четвертые производные, то наилучший результат достигается при использовании схемы (2.7). В том случае, когда функция $\varphi(x, v)$ не имеет названных выше производных, предельный (четвертый) порядок схемы (2.7) не может быть достигнут, и целесообразным оказывается применение более простых схем.

Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с начальными условиями (задача Коши) в пакете Mathcad имеется множество функций, реализующих алгоритмы основных методов, таких как метод Рунге-Куты с постоянным шагом, адаптивный метод Рунге-Куты с переменным шагом, метод Адамса и др. Алгоритмы методов Эйлера не встроены в Mathcad по причине их низкой точности, тем не менее, они могут быть реализованы самостоятельно.

Функция $\text{rkfixed}(ic, a, b, nstep, D)$ – возвращает решение обыкновенного дифференциального уравнения (или системы уравнений) первого порядка с заданными начальными условиями. Функция использует метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности с фиксированным шагом.

Параметры:

- ic – вектор начальных условий;
- a – начальное значение независимой переменной;
- b – конечное значение независимой переменной;
- $nstep$ – параметр, задающий количество шагов интегрирования;
- D – вектор правых частей дифференциальных уравнений.

1.3 Текст программы на MathCAD

Найдем точное решение дифференциального уравнения.

$$y' = x^5; y(0) = 0$$

$$y' = x^5$$

Проинтегрируем обе части равенства:

$$y = \int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$$

Решение задачи Коши:

$$y(0) = \frac{x^6}{6} + C = 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

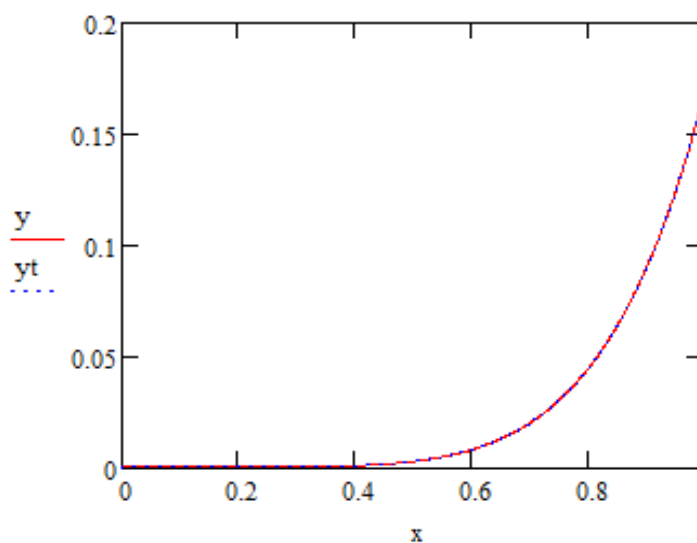
Точное решение:

$$y = \frac{x^6}{6}$$

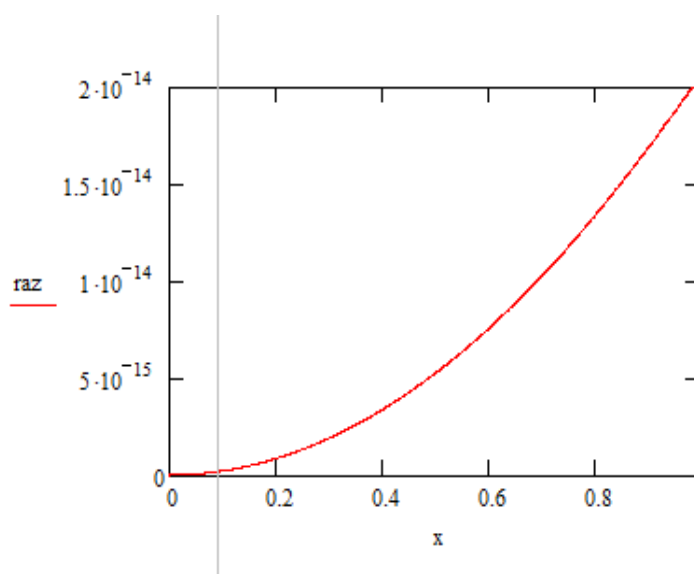
$y := 0$		0	1
$D(x,y) := x^5$		0	0
$M := \text{rkfixed}(y, 0, 1, 1000, D)$		1·10 ⁻³	0
$x := M^{(0)}$		2·10 ⁻³	0
$v := M^{(1)}$		3·10 ⁻³	0
$yt := \frac{x^6}{6}$		4·10 ⁻³	0
$raz := y - yt$		5·10 ⁻³	2.605·10 ⁻¹⁵
+	M =	6·10 ⁻³	7.777·10 ⁻¹⁵
		7·10 ⁻³	1.961·10 ⁻¹⁴
		8·10 ⁻³	4.369·10 ⁻¹⁴
		9·10 ⁻³	8.858·10 ⁻¹⁴
		0.01	1.667·10 ⁻¹³
		0.011	2.953·10 ⁻¹³
		0.012	4.977·10 ⁻¹³
		0.013	8.045·10 ⁻¹³
		0.014	1.255·10 ⁻¹²
		0.015	1.898·10 ⁻¹²

1.4 Графики:

а) точное и приближенное решение;



б) погрешность (и их разность)



1.5 Выводы

С помощью функции `rkfixed` пакета MathCAD можно получить численное решение дифференциального уравнения методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности с постоянным шагом.

Данный метод позволяет автоматически менять величину шага интегрирования при решении задачи Коши в зависимости от требуемой

точности, что является неременным требованием, предъявляемым ко всем хорошим современным программам данного класса.

Литература

1. Вержбицкий В.М, Основы численных методов / В.М. Вержбицкий. – М.: Высшая школа, 2002. – 840 с.
2. Калиткин Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М. : Наука, 1978. – 518 с.
3. Куликова О.В., Поповский Э.С., Скачков П.П. Применение системы MathCAD для исследования функции одной переменной. Методические рекомендации. Екатеринбург, УрГУПС, 2005, 66 с.