

Задача 1.1 (44)

Дана электрическая схема (рис. 1.11):

$$R_1 = 40 \text{ Ом}; R_2 = 160 \text{ Ом}; R_3 = 200 \text{ Ом};$$

$$R'_4 = 120 \text{ Ом}; R''_4 = 168 \text{ Ом};$$

$$R_5 = 300 \text{ Ом}; R'_6 = 40 \text{ Ом}; R''_6 = 40 \text{ Ом};$$

$$E_2 = 200 \text{ В}; E_3 = 200 \text{ В};$$

$$J_2 = 0 \text{ А}; J_3 = 1.5 \text{ А}$$

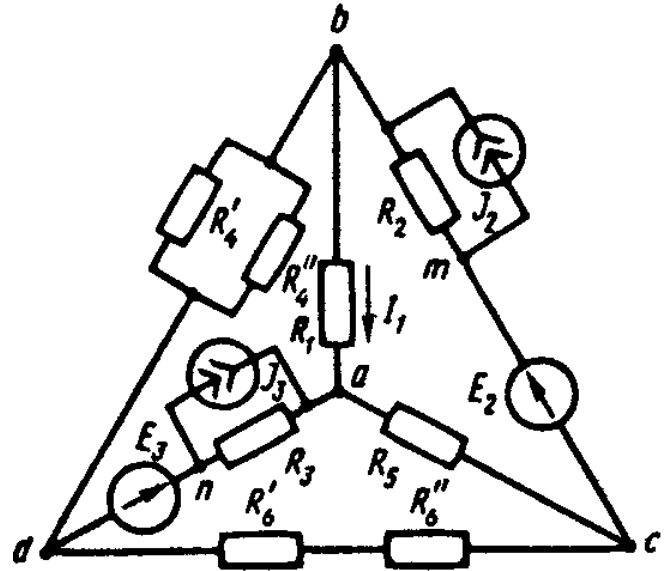


Рис. 1.11.

1. Упростим схему исходную, заменив последовательно и параллельно соединенные резисторы четвертой и шестой ветвей эквивалентными (рис. 1).

$$R_6 = R'_6 + R''_6 = 80 \text{ Ом}; R_4 = \frac{R'_4 \cdot R''_4}{R'_4 + R''_4} = 70 \text{ Ом}.$$

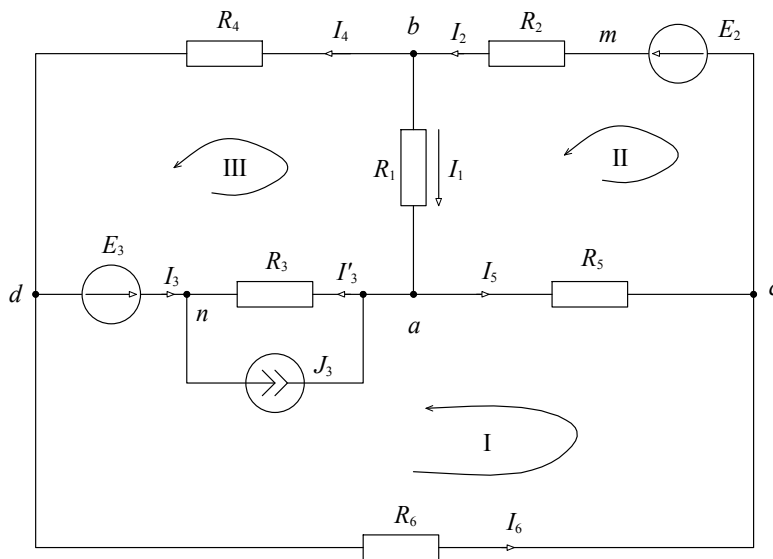


Рис. 1.

2. Составим на основании законов Кирхгофа систему уравнений для расчета токов во всех ветвях схемы (рис. 1).

$$y = 5 \quad - \text{ число узлов};$$

$$v = 8 \quad - \text{ число ветвей};$$

$$v_{um} = 1 \quad - \text{ число ветвей с источником тока}.$$

Количество уравнений по первому закону Кирхгофа $n_1 = y - 1 = 4$

Количество уравнений по второму закону Кирхгофа $n_2 = \sigma - \sigma_{um} - (y - 1) = 3$

$$\left. \begin{aligned} I_1 + I_3 - I_5 &= 0 \\ -I_1 + I_2 - I_4 &= 0 \\ -I_2 + I_5 + I_6 &= 0 \\ J_3 - I_3 - I'_3 &= 0 \\ \\ I'_3 \cdot R_3 + I_6 \cdot R_6 - I_5 \cdot R_5 &= -E_3 \\ I_1 \cdot R_1 + I_5 \cdot R_5 - I_2 \cdot R_2 &= E_2 \\ -I_1 \cdot R_1 + I_4 \cdot R_4 - I'_3 \cdot R_3 &= E_3 \end{aligned} \right\}$$

3. Определим токи во всех ветвях схемы методом контурных токов.

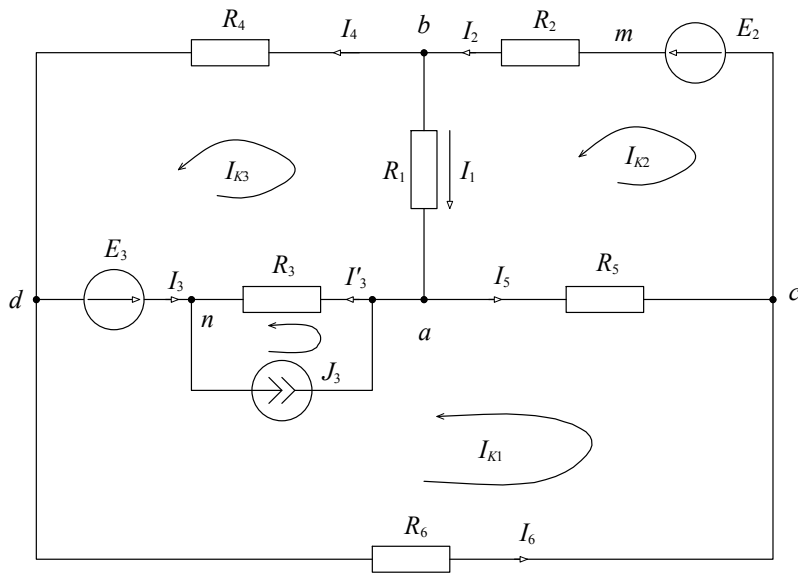


Рис. 2.

*

$$\begin{cases} I_{K1}(R_3 + R_5 + R_6) - I_{K2}R_5 - I_{K3}R_3 + J_3R_3 = -E_3 \\ I_{K2}(R_1 + R_2 + R_5) - I_{K1}R_5 - I_{K3}R_1 = E_2 \\ I_{K3}(R_1 + R_3 + R_4) - I_{K1}R_3 - I_{K2}R_1 - J_3R_3 = E_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (R_3 + R_5 + R_6)I_{K1} & -R_5I_{K2} & -R_3I_{K3} & = & -E_3 - J_3R_3 \\ -R_5I_{K1} & +(R_1 + R_2 + R_5)I_{K2} & -R_1I_{K3} & = & E_2 \\ -R_3I_{K1} & -R_1I_{K2} & +(R_1 + R_3 + R_4)I_{K3} & = & E_3 + J_3R_3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 580 & -300 & -200 \\ -300 & 500 & -40 \\ -200 & -40 & 310 \end{vmatrix} = [580 \cdot 500 \cdot 310 + (-300) \cdot (-40) \cdot (-200) + (-200) \cdot (-300) \cdot (-40)] - \\ - [(-200) \cdot 500 \cdot (-200) + 580 \cdot (-40) \cdot (-40) + (-300) \cdot (-300) \cdot 310] = \\ = 85100000 - 48828000 = 36272000$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -500 & -300 & -200 \\ 200 & 500 & -40 \\ 500 & -40 & 310 \end{vmatrix} = [-500 \cdot 500 \cdot 310 + 200 \cdot (-40) \cdot (-200) + 500 \cdot (-300) \cdot (-40)] - \\ - [500 \cdot 500 \cdot (-200) + (-500) \cdot (-40) \cdot (-40) + 200 \cdot (-300) \cdot 310] = \\ = -69900000 - (-69400000) = -500000$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 580 & -500 & -200 \\ -300 & 200 & -40 \\ -200 & 500 & 310 \end{vmatrix} = [580 \cdot 200 \cdot 310 + (-300) \cdot 500 \cdot (-200) + (-200) \cdot (-500) \cdot (-40)] - \\ - [(-200) \cdot 200 \cdot (-200) + 580 \cdot 500 \cdot (-40) + (-300) \cdot (-500) \cdot 310] = \\ = 61960000 - 42900000 = 19060000$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 580 & -300 & -500 \\ -300 & 500 & 200 \\ -200 & -40 & 500 \end{vmatrix} = [580 \cdot 500 \cdot 500 + (-300) \cdot (-40) \cdot (-500) + (-200) \cdot (-300) \cdot 200] - \\ - [(-200) \cdot 500 \cdot (-500) + 580 \cdot (-40) \cdot 200 + (-300) \cdot (-300) \cdot 500] = \\ = 151000000 - 90360000 = 60640000$$

Контурные токи:

$$I_{K1} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-500000}{36272000} = -0.0138 \text{ A}$$

$$I_{K2} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{19060000}{36272000} = 0.5255 \text{ A}$$

$$I_{K3} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{60640000}{36272000} = 1.6718 \text{ A}$$

Токи в ветвях

$$I_1 = I_{K2} - I_{K3} = 0.5255 - 1.6718 = -1.146 \text{ A}$$

$$I_2 = I_{K2} = 0.525 \text{ A}$$

$$I_3 = I_{K3} - I_{K1} = 1.6718 - (-0.0138) = 1.686 \text{ A}$$

$$I'_3 = I_{K1} - I_{K3} + J_3 = -0.0138 - 1.6718 + 1.5 = -0.186 \text{ A}$$

$$I_4 = I_{K3} = 1.672 \text{ A}$$

$$I_5 = I_{K2} - I_{K1} = 0.5255 - (-0.0138) = 0.539 \text{ A}$$

$$I_6 = I_{K1} = -0.014 \text{ A}$$

4. Определим токи во всех ветвях схемы методом узловых потенциалов (рис. 3).

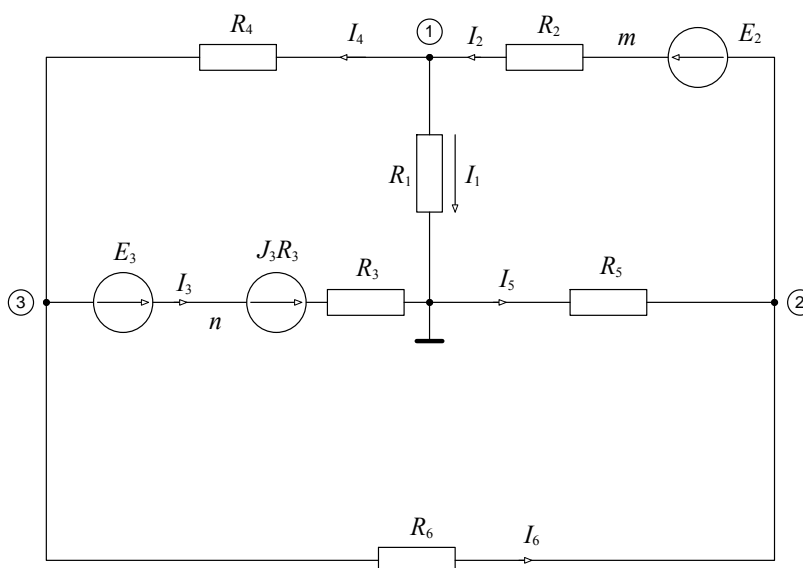


Рис. 3.

$$\begin{cases} \phi_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) - \phi_2 \frac{1}{R_2} - \phi_3 \frac{1}{R_4} = \frac{E_2}{R_2} \\ \phi_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) - \phi_1 \frac{1}{R_2} - \phi_3 \frac{1}{R_6} = -\frac{E_2}{R_2} \\ \phi_3 \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} \right) - \phi_1 \frac{1}{R_4} - \phi_2 \frac{1}{R_6} = -\frac{E_3 + J_3 R_3}{R_3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) \phi_1 & -\frac{1}{R_2} \phi_1 & -\frac{1}{R_4} \phi_6 & = & \frac{E_2}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} \phi_1 & + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) \phi_2 & -\frac{1}{R_6} \phi_3 & = & -\frac{E_2}{R_2} \\ -\frac{1}{R_4} \phi_1 & -\frac{1}{R_6} \phi_2 & + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} \right) \phi_3 & = & -\frac{E_3}{R_3} - J_3 \end{cases}$$

$$\Delta = \left| \begin{pmatrix} 0.045536 & -0.00625 & -0.014286 \\ -0.00625 & 0.022083 & -0.0125 \\ -0.014286 & -0.0125 & 0.031786 \end{pmatrix} \right| = 1.6867 \times 10^{-5}$$

$$\Delta_1 = \left| \begin{pmatrix} 1.25 & -0.00625 & -0.014286 \\ -1.25 & 0.022083 & -0.0125 \\ -2.5 & -0.0125 & 0.031786 \end{pmatrix} \right| = -7.735 \times 10^{-4}$$

$$\Delta_2 = \left| \begin{pmatrix} 0.045536 & 1.25 & -0.014286 \\ -0.00625 & -1.25 & -0.0125 \\ -0.014286 & -2.5 & 0.031786 \end{pmatrix} \right| = -2.7288 \times 10^{-3}$$

$$\Delta_3 = \left| \begin{pmatrix} 0.045536 & -0.00625 & 1.25 \\ -0.00625 & 0.022083 & -1.25 \\ -0.014286 & -0.0125 & -2.5 \end{pmatrix} \right| = -2.7474 \times 10^{-3}$$

Узловые потенциалы:

$$\phi_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-7.735 \times 10^{-4}}{1.6867 \times 10^{-5}} = -45.86 \text{ В}$$

$$\phi_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2.7288 \times 10^{-3}}{1.6867 \times 10^{-5}} = -161.78 \text{ В}$$

$$\phi_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-2.7474 \times 10^{-3}}{1.6867 \times 10^{-5}} = -162.89 \text{ В}$$

Токи в ветвях

$$I_1 = \frac{\phi_1}{R_1} = \frac{-45.86}{40} = -1.147 \text{ А}$$

$$I_2 = \frac{\phi_2 - \phi_1 + E_2}{R_2} = \frac{-161.78 - (-45.86) + 200}{160} = 0.525 \text{ А}$$

$$I_3 = \frac{\phi_3 + E_3}{R_3} + J_3 = \frac{-162.89 + 200}{200} + 1.5 = 1.686 \text{ А}$$

$$I_4 = \frac{\phi_1 - \phi_3}{R_4} = \frac{-45.86 - (-162.89)}{70} = 1.672 \text{ А}$$

$$I_5 = \frac{-\phi_2}{R_5} = \frac{-(-161.78)}{300} = 0.539 \text{ А}$$

$$I_6 = \frac{\phi_3 - \phi_2}{R_6} = \frac{-162.89 - (-161.78)}{80} = -0.014 \text{ А}$$

5. Сравним результаты расчета токов, проведенного двумя методами (табл. 1).

*

Таблица 1

Метод \	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
МКТ	-1,146	0,525	1,686	1,672	0,539	-0,014
МУП	-1,147	0,525	1,686	1,672	0,539	-0,014

6. Составим баланс мощностей в исходной схеме (рис. 1).

Напряжение на зажимах источника тока

$$U_J = I_3' R_3 = -0.186 \cdot 200 = -37.2 \text{ В}$$

Мощность источников энергии

$$\begin{aligned} P_{\text{ист}} &= E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3 + U_J \cdot J_3 = \\ &= 200 \cdot 0.525 + 200 \cdot 1.686 + (-37.2) \cdot 1.5 = 386.4 \text{ Вт} \end{aligned}$$

Мощность приемников энергии

$$\begin{aligned} P_{\text{пр}} &= I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3'^2 \cdot R_3 + I_4^2 \cdot R_4 + I_5^2 \cdot R_5 + I_6^2 \cdot R_6 = \\ &= (-1.146)^2 \cdot 40 + 0.525^2 \cdot 160 + (-0.186)^2 \cdot 200 + 1.672^2 \cdot 70 + 0.539^2 \cdot 300 + (-0.014)^2 \cdot 80 = 386.41 \text{ Вт} \end{aligned}$$

Погрешность расчета

$$\delta_{\%} = \frac{|P_{\text{ист}} - P_{\text{пр}}|}{P_{\text{ист}}} 100\% = \frac{|386.4 - 386.41|}{386.4} \cdot 100 = 0.003 \%$$

7. Определим ток I_1 , в заданной по условию схеме с источником тока, используя метод эквивалентного генератора.

ЭДС эквивалентного генератора (рис. 4).

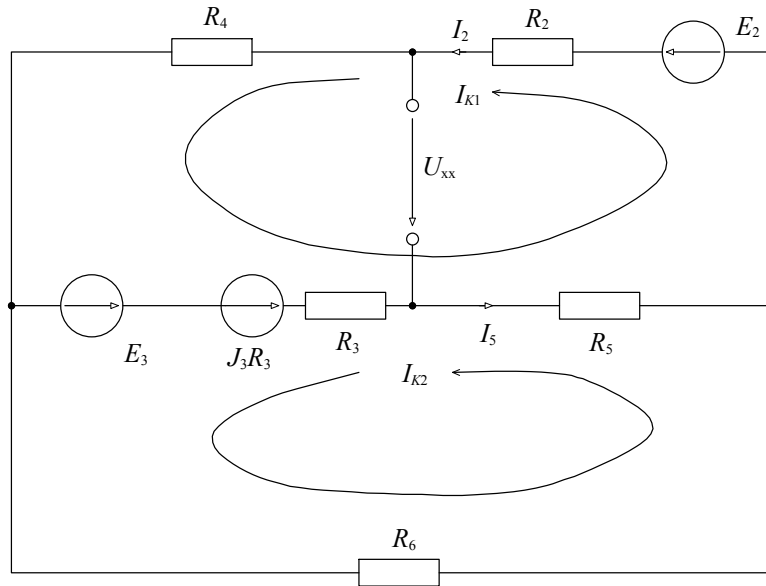


Рис. 4.

Составим систему уравнений для цепи по методу контурных токов

$$\begin{cases} (R_3 + R_5 + R_6) \cdot I_{K1} - (R_3 + R_5) \cdot I_{K2} & = -E_3 - J_3 R_3 \\ (R_2 + R_3 + R_4 + R_5) \cdot I_{K2} - (R_3 + R_5) \cdot I_{K1} & = E_2 + E_3 + J_3 R_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (R_3 + R_5 + R_6) \cdot I_{K1} & - (R_3 + R_5) \cdot I_{K2} & = & -E_3 - J_3 R_3 \\ - (R_3 + R_5) \cdot I_{K1} & + (R_2 + R_3 + R_4 + R_5) \cdot I_{K2} & = & E_2 + E_3 + J_3 R_3 \end{cases}$$

*

Систему уравнений решаем методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 580 & -500 \\ -500 & 730 \end{vmatrix} = 580 \cdot 730 - (-500)^2 = 173400$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -500 & -500 \\ 700 & 730 \end{vmatrix} = -500 \cdot 730 - 700 \cdot (-500) = -15000$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 580 & -500 \\ -500 & 700 \end{vmatrix} = 580 \cdot 700 - (-500) \cdot (-500) = 156000$$

Контурные токи:

$$I_{K1} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-15000}{173400} = -0.08651 \text{ A}$$

$$I_{K2} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{156000}{173400} = 0.89965 \text{ A}$$

Токи в ветвях:

$$I_2 = I_{K2} = 0.8997 \text{ A}$$

$$I_5 = I_{K2} - I_{K1} = 0.89965 - (-0.08651) = 0.9862 \text{ A}$$

ЭДС эквивалентного генератора

$$U_{XX} + I_5 \cdot R_5 + I_2 \cdot R_2 = E_2 ;$$

$$E_{\mathcal{E}\Gamma} = U_{XX} = E_2 - I_2 \cdot R_2 - I_5 \cdot R_5 = 200 - 0.8997 \cdot 160 - 0.9862 \cdot 300 = -239.8 \text{ В.}$$

Сопротивление эквивалентного генератора (рис. 5а, 5б).

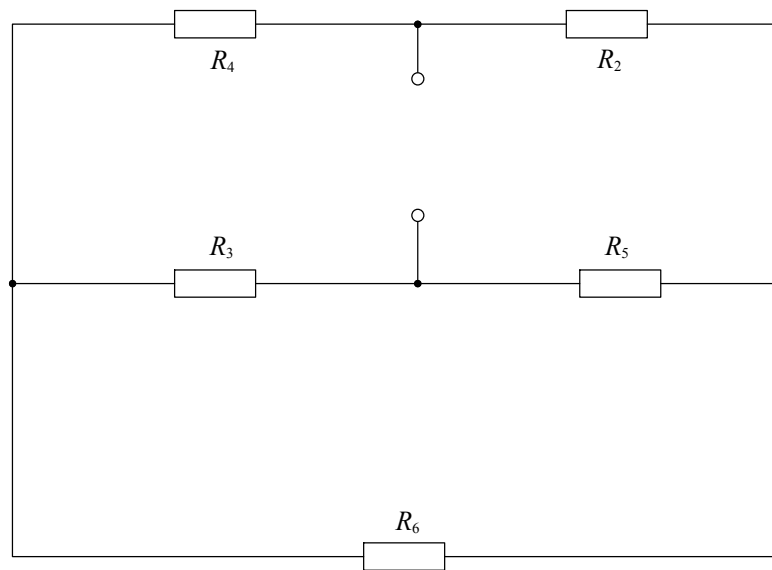


Рис. 5а.

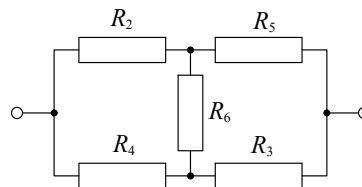


Рис. 5б.

Определим сопротивление цепи (рис. 5), преобразовав "треугольник" $R_3R_5R_6$ в эквивалентную "звезду" (рис. 6).

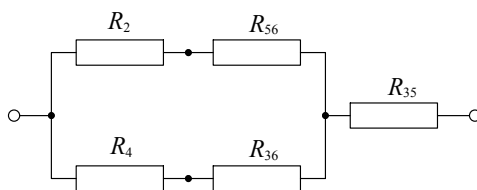


Рис. 6.

$$R = R_3 + R_5 + R_6 = 200 + 300 + 80 = 580 \text{ Ом}$$

$$R_{35} = \frac{R_3 \cdot R_5}{R} = \frac{200 \cdot 300}{580} = 103.45 \text{ Ом}$$

$$R_{36} = \frac{R_3 \cdot R_6}{R} = \frac{200 \cdot 80}{580} = 27.59 \text{ Ом}$$

$$R_{56} = \frac{R_5 \cdot R_6}{R} = \frac{300 \cdot 80}{580} = 41.38 \text{ Ом}$$

Сопротивление эквивалентного генератора:

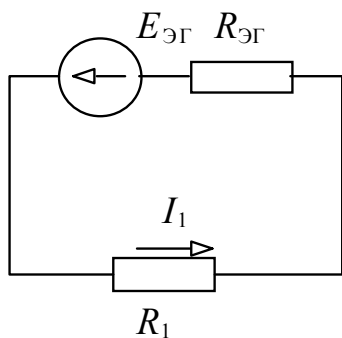


Рис. 7.

$$R_{ЭГ} = \frac{(R_2 + R_{56}) \cdot (R_4 + R_{36})}{(R_2 + R_{56}) + (R_4 + R_{36})} + R_{35} =$$

$$= \frac{(160 + 41.38) \cdot (70 + 27.59)}{160 + 41.38 + 70 + 27.59} + 103.45 = 169.18 \text{ Ом.}$$

Ток I_1 по методу эквивалентного генератора (рис. 7):

$$I_1 = \frac{E_{ЭГ}}{R_1 + R_{ЭГ}} = \frac{-239.8}{40 + 169.18} = -1.146 \text{ А.}$$

8. Начертим потенциальную диаграмму для замкнутого контура "abmcдна".

*

$$\phi_a = 0;$$

$$\phi_b = \phi_a + I_1 R_1 = 0 + (-1.146) \cdot 40 = -45.84 \text{ В}$$

$$\phi_m = \phi_b + I_2 R_2 = -45.84 + 0.525 \cdot 160 = 38.16 \text{ В}$$

$$\phi_c = \phi_m - E_2 = 38.16 - 200 = -161.84 \text{ В}$$

$$\phi_d = \phi_c + I_6 R_6 = -161.84 + (-0.014) \cdot 80 = -162.96 \text{ В}$$

$$\phi_n = \phi_d + E_3 = -162.96 + 200 = 37.04 \text{ В}$$

$$\phi'_a = \phi_n + I'_3 R_3 = 37.04 + (-0.186) \cdot 200 = -0.2 \text{ В}$$

